Coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas: relación entre geometría y álgebra

Germán Torregrosa Gironés, Universidad de Alicante (España)

Recibido el 18 de enero de 2017; aceptado el 28 de julio de 2017

Coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas: relación entre geometría y álgebra

Resumen

Se presenta una ampliación del modelo de razonamiento configural para el análisis de la resolución de problemas empíricos de geometría, en los que los datos iniciales son numéricos o literales. La extensión del modelo de Razonamiento Configural consiste en la ampliación de significados de las Aprehensiones Operativas y Discursivas (Duval, 1998) y la aceptación del uso del registro algebraico en el discurso generado durante la resolución de problemas de geometría con lápiz y papel. La inclusión del registro algebraico en el modelo se fundamenta en los conceptos de conversión y tratamiento de la Teoría de los Sistemas Semióticos de Duval. Analizamos varias resoluciones a un problema empírico con el nuevo modelo de Razonamiento Configural extendido para evidenciar su potencial.

Palabras clave. Sistemas de representación; Razonamiento configural; Problema empírico; Geometría y Álgebra.

Coordenação de processos cognitivos em solucionando problemas: relação entre geometria e álgebra

Resumo

Este trabalho apresenta uma extensão do modelo de raciocínio configural para a análise dos problemas empíricos de resolução de geometria, no qual os dados iniciais são numérica ou literal. A extensão do modelo de raciocínio Configural consiste no alargamento dos significados deles apreensões operacionais e discursivas (Duval, 1998) e a aceitação do uso do registro algébrico no discurso gerado durante a resolução de problemas de geometria com lápis e papel. A inclusão do registro algébrico no modelo baseia-se os conceitos de conversão e tratamento da Teoria dos Sistemas Semióticos de Duval. Analisamos várias resoluções de um problema empírico com o novo modelo de raciocínio Configural estendido para revelar o seu potencial.

Palavras chave. Sistemas de representação; Raciocínio configural; Problema empírico; Geometria e Álgebra.

Coordination of cognitive processes in problem solving: relationship between geometry and algebra

Para citar: Torregrosa Gironés, G. (2017). Coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas: relación entre geometría y álgebra. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *12*, 1-17.

Abstract

This paper presents an extension of the model of configural reasoning for the analysis of the resolution of empirical problems of geometry, in which the initial data are numerical or literal. The extension of the configural reasoning model consists in the widening of operative and discursive apprehension meanings (Duval, 1998) and the acceptance of the use of the algebraic register in the discourse generated during the resolution of geometry problems with pencil and paper. The inclusion of the algebraic register in the model draws on the concepts of conversion and treatment of the Theory of Semiotic Systems by Duval. We analyzed several resolutions to an empirical problem with the new extended configural reasoning model to show its potential.

Key words. Representation systems; Configural reasoning; Empirical problem; Geometry and Algebra.

Coordination des processus cognitifs dans la résolution des problèmes: relation entre la géométrie et l'algèbre

Résumé

Cet article présente une extension du modèle de raisonnement configural pour l'analyse de la résolution des problèmes empiriques de la géométrie, dans lequel les données initiales sont numériques ou littérales. L'extension du modèle de raisonnement Configural consiste en l'élargissement des significations de ces appréhensions opérationnelles et discursives (Duval, 1998) et l'acceptation de l'utilisation de l'enregistrement algébrique dans le discours généré lors de la résolution des problèmes de géométrie empirique avec crayon et du papier. L'inscription de l'enregistrement du modèle algébrique est basée sur les concepts de la conversion et le traitement de la Théorie des Systèmes Sémiotiques de Duval. Nous analysons plusieurs résolutions à un problème avec le nouveau modèle de raisonnement Configural étendu afin de démontrer son potentiel.

Paroles clés. Systèmes de représentation; Raisonnement configural; Problème empirique; Géométrie et Algèbre.

1. Introducción

En este trabajo presentamos una ampliación del modelo de razonamiento configural (Torregrosa & Quesada, 2007; Prior & Torregrosa, 2013) al ámbito del análisis de la resolución de problemas de probar de geometría que contienen datos numéricos en el enunciado. En este trabajo denominamos problemas de geometría empíricos a problemas de probar en el que su enunciado asigna cantidades y relaciones entre las cantidades a los objetos geométricos. El uso del modelo extendido en este tipo de problemas permite mostrar que los estudiantes siguen los mismos procesos cognitivos que hemos identificado en las resoluciones de problemas clásicos de probar en Geometría, usando los modos de representación algebraico y geométrico.

El uso del modelo de razonamiento configural, para analizar la resolución de problemas de geometría empíricos, ofrece una aproximación cognitiva y matemática a la comprensión del comportamiento del alumno al resolver este tipo de problemas (Zazkis & Dubinsky, 1996). La literatura sobre la demostración matemática (prueba) tiene distintos focos: aspectos epistemológicos (Balacheff, 2008; Hanna & Jahnke, 1996); dificultades del alumno (Harel & Sowder, 1998); coordinación de estrategias visuales y analíticas (Zazkis, Dubinsky & Dautermann, 1996); relación entre discurso y demostración (Duval, 1995; Robotti, 2012), relación entre conjeturar y probar (Fiallo & Gutiérrez, 2017); y enseñanza/aprendizaje de la prueba en varios contextos educativos (Hilbert, Renkl, Kessler & Reiss, 2008; Ibañes, 2002; Ibañes & Ortega, 2005; Komatsu, 2016; Miyazaki, Fujita & Jones, 2017; Reiss, Heinze, Renkl & Groß, 2008).

La propuesta integra diferentes aspectos para analizar las dimensiones, epistemológica, cognitiva y discursiva, de la demostración matemática como manera de analizar las aproximaciones analíticas y geométricas de alumnos en la resolución de los problemas empíricos. A partir de la teoría de la representación de Duval y sus estudios sobre los procesos cognitivos de visualización y razonamiento, el modelo del razonamiento configural permite analizar producciones de alumnos cuando resuelven problemas de probar de Geometría, en un entorno de lápiz y papel (Torregrosa & Quesada, 2007; Torregrosa, Quesada & Penalva, 2010; Prior & Torregrosa, 2013). En el uso inicial del modelo de razonamiento configural se consideraron problemas de probar clásicos de geometría con lápiz y papel. Sin embargo, en la etapa escolar y en la Universidad se consideran problemas de contexto geométrico que involucran medidas como datos (problemas de aplicación de resultados geométricos a la vida real). Estos problemas no exigen una demostración matemática formal en sentido estricto, pero sí precisan del conocimiento y uso de las mismas propiedades y resultados geométricos teóricos para resolver los problemas de probar. El análisis de los procesos de resolución de estos problemas empíricos conlleva problemas teóricos que deben abordarse y resolverse con carácter previo. Por ejemplo, no se dan hipótesis consistentes en propiedades geométricas genéricas (*dado el triángulo isósceles de la figura*) sino datos numéricos o literales (*en el triángulo de la figura los lados miden a, a y b cm*). Así, las aprehensiones discursivas, las asociaciones de configuraciones puntuales a afirmaciones matemáticas, no siguen el mismo proceso. Además, durante la resolución de problemas empíricos, aparece el registro algebraico para convertir el enunciado dado y los datos en expresiones algebraicas que no se contempla en el modelo de razonamiento configural.

2. Planteamiento del problema

Veamos el análisis de la solución a un problema clásico de geometría de probar, utilizando el modelo del razonamiento configural, para lo que necesitamos definir los elementos teóricos que utilizamos.

2.1. Elementos teóricos en el modelo de razonamiento configural

Llamamos *Razonamiento Configural* (RC en adelante) al desarrollo de la acción coordinada entre Aprehensiones Operativas y Aprehensiones Discursivas, realizada por el alumno, asociando afirmaciones matemáticas y/o realizando modificaciones en la configuración inicial, cuando resuelve un problema de geometría mediante lápiz y papel (Torregrosa & Quesada, 2007; Torregrosa et al., 2010; Prior & Torregrosa, 2013).

Un alumno realiza una *Aprehensión Operativa* (en adelante AO) cuando modifica la configuración inicial del problema (Duval, 1995, 1998, 1999). El significado de esta modificación incluye: añadir o quitar elementos geométricos a/de la configuración inicial; reconfigurar las partes (subconfiguraciones) de la configuración inicial, moviendo las subconfiguraciones como piezas de un rompecabezas; identificar un elemento geométrico elemental (segmento, ángulo, triángulo, círculo…) en cuanto que se "aísla" prescindiendo (quitándolo) del resto de la configuración inicial. La modificación se puede realizar tanto física como mentalmente ya que no se representan todas las modificaciones del resolutor.

Un alumno realiza una *Aprehensión Discursiva* (en adelante AD) cuando asocia una configuración identificada con una afirmación matemática, para inferir conocimiento que le ayude a resolver el problema (Duval, 1995, 1998, 1999). Esta asociación puede tener dos desencadenantes que corresponden a: la subconfiguración identificada por el alumno le recuerda alguna afirmación matemática, en cuyo caso decimos que hay un cambio de anclaje de visual a discursivo, o bien los conocimientos teóricos del alumno le llevan a buscar la subconfiguración adecuada en la configuración inicial, en cuyo caso decimos que hay un cambio de anclaje de discursivo a visual. El término *afirmación matemática* incluye teoremas, axiomas, definiciones, propiedades…

Al analizar las acciones coordinadas AO/AD, que realiza el alumno para resolver el problema, se clasifica su respuesta según los siguientes desenlaces del RC:

- Si hay solución al problema:
  - *Truncamiento*, desenlace que ocurre cuando la coordinación realizada por el alumno proporciona la “idea” que resuelve el problema, permitiéndole generar un proceso deductivo que resuelve el problema. El truncamiento hace referencia al momento en que el alumno “se da cuenta” de la solución. En ese momento finaliza el proceso de razonamiento, entendido como deducir información nueva a partir de otra dada o conocida, y empieza el proceso de generar el discurso deductivo para <u>comunicar</u> la solución. Por tanto, el término no se refiere a ninguna interrupción.
  - *Conjetura sin demostración*, el razonamiento permite generar una solución al problema, pero basada en conjeturas no probadas, como inferencias realizadas en base a percepciones, erróneas o no, de la configuración inicial.
- Si no hay solución al problema
  - *Bucle*, que se da cuando se establecen afirmaciones matemáticas que no permiten el avance hacia la solución, de forma que los resolutores vuelven a la situación inicial, una o varias veces, ante la imposibilidad de avanzar en la resolución. Por tanto, decimos que RC desemboca en bucle, cuando se da una situación de bloqueo que no permite el avance hacia la solución.

2.2. Problemas de geometría clásicos y empíricos

En los problemas de geometría clásicos de probar intervienen conceptos geométricos: “dos cuerdas paralelas”, “recta perpendicular a las cuerdas” que “pasa por el centro de la circunferencia” o “contiene los puntos medios”. Se dan situaciones o propiedades geométricas elementales y se pide “Probar que”. En los problemas empíricos se dan las medidas de los elementos geométricos y se pide “Calcular”. En el problema empírico de la Figura 1, se dan las medidas de las cuerdas y la distancia entre ellas, concretando las opciones de intervención del alumno para resolver el problema. En ocasiones esta concreción es una limitación que no deja lugar a la creatividad, pero en otras ocasiones orienta las acciones para resolver el problema. Igualmente, existen diferencias en la pregunta que se solicita en cada tipo de problema. En los enunciados clásicos a menudo se pide demostrar una propiedad de carácter general: “contiene los puntos medios de ambas cuerdas”, mientras que en el problema empírico se pide calcular la medida del radio de la circunferencia, que es un dato concreto de la situación particular propuesta.

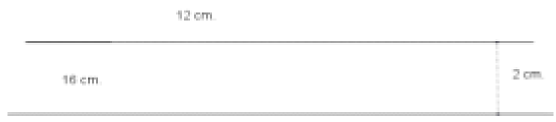
Enunciado de problema clásico. *Dadas dos cuerdas paralelas de una circunferencia, demostrar que la recta perpendicular a las cuerdas que pasa por el centro de la circunferencia contiene a los puntos medios de las cuerdas.*
Enunciado de problema empírico. *Las dos cuerdas paralelas de una circunferencia miden 12 y 16 cm. La distancia entre ellas es 2 cm. Calcula el radio de la circunferencia.* 

Figura 1. Ejemplos de enunciados de problemas clásico y empírico

El uso de problemas empíricos en las etapas educativas es actualmente predominante en el estudio de la Geometría. Esta tendencia se justificaría entre otras razones por la motivación que aporta este tipo de problemas geométricos; el uso que hacen de ellos los libros de texto en la educación Secundaria; la formación recibida por los graduados de carreras técnicas (ingenieros y arquitectos) en los primeros cursos.

2.3. Sobre los procesos de resolución

En cuanto al proceso de resolución, la resolución de los problemas clásicos se apoya en la capacidad de coordinar conocimiento geométrico, para realizar conjeturas que desemboquen en la solución del problema (demostración matemática). Mientras que en los problemas empíricos, el proceso de resolución no conlleva la resolución de cuestiones generales, sino que se estudia una situación geométrica específica y se calcula un dato concreto de ella. Por otra parte, el registro geométrico para comunicar una demostración, de un problema clásico de probar en Geometría, no contempla el uso del registro algebraico (ecuaciones/sistemas de ecuaciones), mientras que la solución a los problemas empíricos se apoya en la posibilidad de usar este registro. Esta situación nos ha llevado a intentar avanzar en la comprensión de la coordinación de los procesos cognitivos de los alumnos (realizando AO y AD) en la resolución de problemas empíricos.

2.4. Ejemplo de análisis de la resolución de un problema clásico de geometría de probar según el modelo RC

Dado el problema clásico de geometría de probar que aparece en la Figura 1, analizaremos una resolución según RC:

Problema 1. *Dadas dos cuerdas paralelas de una circunferencia, demostrar que la recta perpendicular a las cuerdas que pasa por el centro de la circunferencia contiene a los puntos medios de las cuerdas.*

Solución. Realizamos la construcción de una circunferencia de centro O y representamos dos cuerdas paralelas AB y CD (Figura 2). Trazamos los segmentos OA y OB y la recta perpendicular a AB que pasa por O, llamando P al punto de intersección.

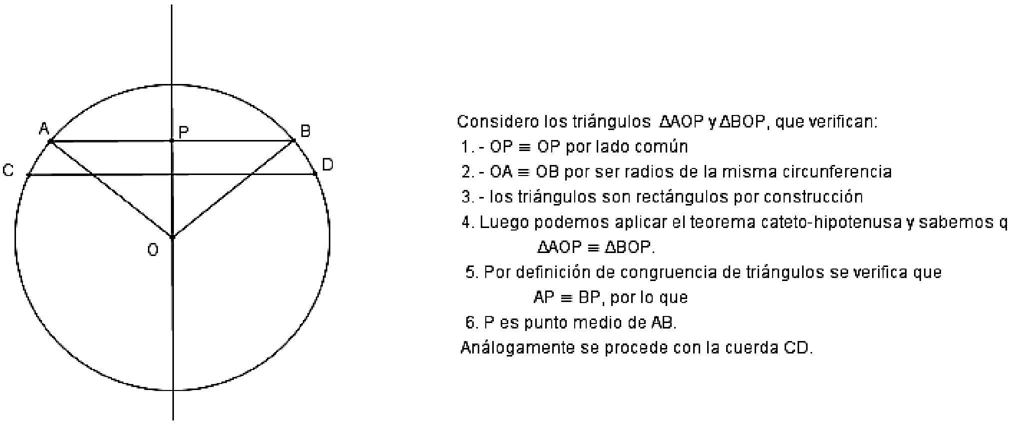


Figura 2. Una solución al problema 1 clásico de geometría de probar

Análisis de la solución desde el modelo RC

En primer lugar, se representa la situación geométrica descrita en el enunciado mediante la construcción de una circunferencia de centro *O*. Esta acción supone una AD (recordar la definición de circunferencia) y asociarle la configuración de puntos del plano que equidistan de un punto que llamamos centro (lo que supone una AO).

Del mismo modo, se realiza una AD con la definición de cuerda. Cuando esta se asocia con el segmento *AB* o el *CD* identificados, estamos ante una AO. A continuación se traza la recta perpendicular a la cuerda *AB* que pasa por *O*, lo que constituye una AO pues añadimos un elemento geométrico a la configuración inicial de circunferencia y cuerdas, cuya definición constituye una AD. Análogamente ocurre con los radios, AD (definición de radio de una circunferencia) que asociamos a los segmentos identificados *OA* u *OB*, que trazamos realizando una AO. Llamamos *P* al punto de corte de *AB* con la recta *OP*. Todas estas acciones, salvo el trazado de los radios *OA* y *OB*, corresponden a la realización de una representación de la situación geométrica descrita por el enunciado.

Seguidamente se identifican los dos triángulos Δ*AOP* y Δ*BOP*, mediante una AO, ya que se prescinde del resto de la configuración, y se asocia con el criterio de congruencia cateto-hipotenusa mediante una AD. Las condiciones a verificar para aplicar el criterio cateto-hipotenusa corresponden a 1, 2 y 3 de la respuesta escrita. En cada condición se observa una AO (identificación de una subconfiguración) asociada a una propiedad/afirmación matemática que constituye la AD.

En 4 se establece la conclusión de que los triángulos rectángulos son congruentes. Por definición de triángulos congruentes (AD) identificamos como congruentes a los segmentos correspondientes *AP* y *BP* (AO). De lo que se deduce que *P* es punto medio de la cuerda *AB*. Análogamente se procedería con el punto medio de la cuerda *CD*. Esta es una respuesta que un experto podría dar al problema de probar planteado y que ha sido usada para describir el análisis de una resolución desde el modelo RC. En esta resolución, el *truncamiento* se produce cuando el resolutor traza los radios *OA* y *OB*, ya que en ese momento sabe la solución que busca.

2.5. Problemática del análisis de la respuesta a un problema empírico según el modelo RC

Dado el problema empírico de la Figura 1, presentamos el análisis de una solución según RC.

Problema 2. *Las dos cuerdas paralelas de una circunferencia de la figura miden 12 y 16 cm. La distancia entre ellas es de 2 cm. Calcula el radio de la circunferencia.*

Solución. Trazamos la circunferencia de centro *O* y las dos cuerdas *AB* de 12 cm de longitud y la *CD* de 16 cm. La distancia entre ellas es de 2 cm. Construyo el segmento *OP* perpendicular a *AB* en *P* (punto medio de la cuerda *AB*, por lo que sabemos que pasará por el centro de la circunferencia) y trazo los radios *OB* y *OD*. Llamo *Q* al punto de intersección de *OP* con la cuerda *CD* (*Q* también es punto medio de *CD*, por ser *OP* una perpendicular a la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia).

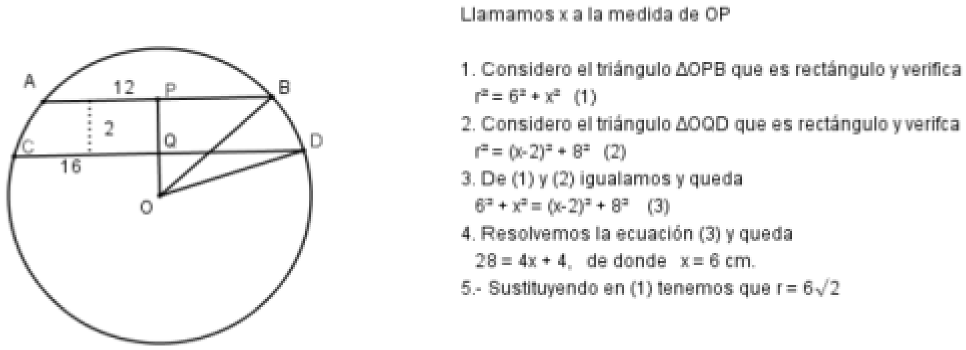


Figura 3. Solución al problema 2 empírico

Análisis de la solución al problema 2 desde el modelo RC

Al igual que en el problema 1, comenzamos representando la situación geométrica del enunciado mediante la construcción de una circunferencia de centro *O*. Esta acción supone una AD (recordar definición de circunferencia) y asociarle la configuración de puntos del plano que equidistan de un punto que llamamos centro (lo que constituye una AO). Del mismo modo, se realiza una AD con la definición de cuerda y cuando se asocia esta con el segmento *AB* o el *CD* identificados, estamos realizando una AO. A continuación se traza la recta perpendicular a la cuerda *AB* que pasa por *O*, lo que constituye una AO, pues añadimos un elemento geométrico a la configuración inicial de circunferencia y cuerdas, y asociamos la definición, lo que constituye una AD. Análogamente ocurre con los radios, AD (definición de radio de circunferencia) que asociamos a los segmentos *OA* y *OB* y trazamos realizando una AO. Llamamos *P* al punto de corte de *AB* con la perpendicular que pasa por *O*, y *Q* al punto de corte con la cuerda *CD*, lo que equivale a aislar, en cada caso, un punto (realizando una AO) al que asociamos la propiedad de ser punto medio de sus respectivas cuerdas (realizamos una AD al vincular la subconfiguración con el conocimiento geométrico "la recta perpendicular en el punto medio de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia"). Igualmente, trazamos los segmentos *OB* y *OD* (AO) y los asociamos a la definición de radio (AD).

Seguidamente, identificamos el segmento *OP* (realizando una AO) y le asignamos una medida que llamamos *x*. Esta acción no tiene significado teórico en el modelo RC puesto que no asociamos el segmento con ninguna propiedad/definición/teorema y, por tanto, no realizamos una AD, en el sentido definido en el modelo. Esto mismo ocurre cuando, en la representación geométrica particular del problema, hemos afirmado que *P* y *Q* distan, respectivamente de *B* y de *D*, 6 y 8 cm. También identificamos puntos (AO) pero no asociamos con propiedad/definición/teorema, sino con una medida.

Además, en 1 y 2 en el proceso de resolución (Figura 3) consideramos los triángulos Δ*OPB* y Δ*OQD*, realizando en cada caso una AO, y les asociamos la propiedad de ser rectángulos mediante una AD, pero aparecen dos ecuaciones cuyo significado no se contempla en el modelo RC; esto es, aparece el registro algebraico. En 3, 4 y 5, realizamos unas manipulaciones simbólicas de las ecuaciones que, teniendo sentido en el registro algebraico (tratamiento) puesto que estamos resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, carece de interpretación dentro del modelo RC.

El modelo RC (Torregrosa & Quesada, 2007; Torregrosa et al., 2010), para analizar las respuestas a los problemas clásicos de probar en geometría, no permite analizar completamente los procesos de resolución en los problemas empíricos. En el enunciado no se dan hipótesis consistentes en propiedades geométricas (dadas dos cuerdas paralelas de una circunferencia), sino datos numéricos o literales concretos (las dos cuerdas paralelas miden 12 y 16 cm). Esto implica que las AD (asociaciones de configuraciones puntuales a afirmaciones matemáticas) que el modelo exige identificar no siguen el mismo proceso. Por otra parte, durante la resolución de los problemas empíricos, aparece el registro algebraico para convertir enunciado y datos en expresiones algebraicas. El tratamiento necesario para la solución no se contempla en el modelo RC inicial.

3. Extensión del modelo RC

La extensión del modelo RC al análisis de los problemas empíricos consiste en considerar que en las AD, dentro del significado de afirmación matemática que incluía a teoremas, axiomas, definiciones, propiedades,… también se incluyan las condiciones iniciales (hipótesis) de los problemas empíricos, expresados como datos numéricos o literales (7 cm; *x* cm). Además, tenemos en cuenta el registro en el que se representa el discurso generado durante la resolución del problema. Debemos considerar, junto al registro geométrico, el registro algebraico dentro de un contexto geométrico. Esta inclusión del registro algebraico en el modelo se justifica, desde el punto de vista cognitivo, mediante el significado del concepto de conversión entre registros de representación (Duval, 1999). Es decir, los estudiantes convierten un problema representado en registro geométrico en unas condiciones representadas en registro algebraico. De la misma forma, cuando los estudiantes generan el discurso para la resolución del problema planteado mediante registro algebraico (resuelven las ecuaciones planteadas) están realizando un tratamiento dentro del mismo registro algebraico.

Por tanto, la extensión del modelo teórico RC consiste, en primer lugar en la ampliación del significado que damos a la expresión afirmación matemática, considerando como tal a cada uno de los datos numéricos o literales en los problemas empíricos. En segundo lugar, RC extendido considera el uso del registro algebraico en la solución de los problemas, en los dos procesos señalados: uso del registro algebraico como proceso de conversión entre registros distintos, y uso del registro algebraico como proceso de tratamiento, dentro de un registro, para resolver sistemas de ecuaciones.

Con estas ampliaciones, es posible identificar los tres tipos de desenlaces: *truncamiento y conjetura sin demostración*, cuando el proceso desemboca en solución al problema planteado; *bucle*, cuando el alumno vuelve a la situación de partida una o varias veces, entrando en una trayectoria de bloqueo. Para evidenciar la necesidad de la ampliación del modelo RC, realizamos el análisis de la respuesta de una alumna a un problema empírico (Figura 4). Indicamos los momentos del proceso de resolución en los que son necesarias las ampliaciones de los elementos teóricos del modelo configural.

Problema 3. *Dos círculos son tangentes interiores como se muestra en la figura. Calcula los radios de ambos círculos.*

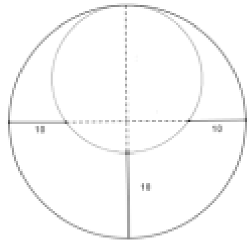
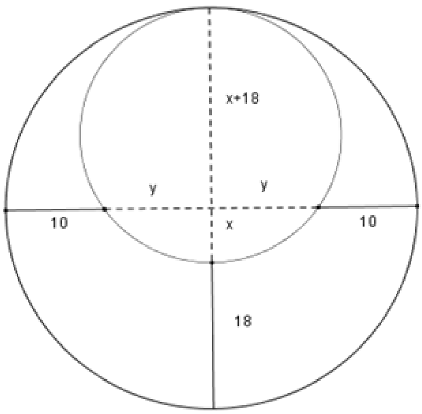


Figura 4. Problema empírico 3

Este problema muestra una situación geométrica particular ("como se muestra en la figura") de dos circunferencias tangentes interiores y pide la medida de un elemento geométrico de dicha situación ("el radio de cada círculo"). Se añaden las medidas de tres segmentos particulares como datos. Por tanto, no se hace mención a propiedades geométricas genéricas y se solicita el cálculo de las medidas de dos segmentos. Se presenta en la Figura 5 la transcripción de la respuesta de la alumna 1:



$1.- \quad \therefore \quad x+18=y+10$

$y-x=8 \quad (1)$

$2.-$ *Coloco letras para poder formar ecuaciones*

$$R_1=\frac{2x+36}{2}=x+18=y+10$$

$$R_2=\frac{2x+18}{2}=x+9$$

$3.- \; y.y=x(x+18)$ *prop. cuerdas (círculo pequeño)*

$(2) \quad y^2=x^2+18x$ *Reemplazo* 1 *en* 2

$4.- \; (x+8)^2=x^2+18x$

$x^2+16x+64=x^2+18x$

$2x=64$

$x=32$

$\boxed{R_1=50 \quad R_2=32+9=41}$

Figura 5. Transcripción de la respuesta de la alumna 1 al problema 3

Análisis de la respuesta desde el modelo RC

La alumna, en 1, plantea una igualdad entre dos expresiones de la medida del radio del círculo mayor según las incógnitas que usa en la configuración inicial (coloco letras para poder formar ecuaciones). El símbolo $\therefore$ se lee "por tanto". Seguidamente, en 2, llama *R1* al radio del círculo mayor y *R2* al radio del círculo menor que expresa en función de *x*, calculándolos a partir de la definición de radio como mitad del diámetro (aunque no lo cita). Hasta este momento, la alumna está identificando elementos geométricos de ambos círculos (los radios de ambos) y trata de asociarles su medida. El hecho de identificar elementos geométricos se puede interpretar desde RC como realización de aprehensiones operativas puesto que prescinde del resto de la configuración inicial. Sin embargo la asociación de una medida a un elemento geométrico no equivale a la asociación con una afirmación matemática, es decir: no es lo mismo que asociar un teorema, un axioma, una definición, una propiedad. El modelo RC que usamos para realizar el análisis de las soluciones a los problemas clásicos de probar en Geometría no contempla esta acción cognitiva de asociar una medida a un elemento geométrico. En 3, la alumna usa una propiedad de las cuerdas junto a una ecuación, sin relación directa con lo anterior, que resuelve el problema. Esta propiedad está vinculada a la identificación de la sub-configuración (parte de la configuración inicial) de la Figura 6:

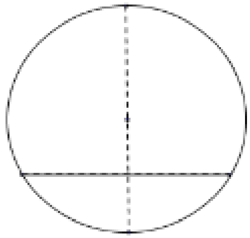


Figura 6. Subconfiguración relevante identificada

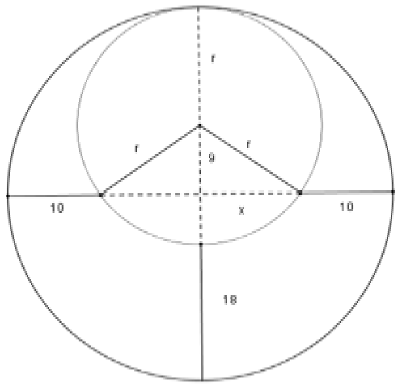
Esta identificación constituye una AO, para asociar a la subconfiguración de la Figura 5 la propiedad de las cuerdas: “Si P es un punto en el plano y se fija una circunferencia con centro *O*, entonces para toda recta que pase por P y corte a la circunferencia en dos puntos *A*, *B*, se cumplirá que $PA\,x\,PB$ es constante”. El valor de dicha constante se denomina potencia del punto *P* respecto de la circunferencia de centro *O*. La asociación entre subconfiguración y afirmación matemática es una AD que permite realizar una conversión entre registro gráfico y algebraico (propiedad de las cuerdas en forma de relación algebraica). En 4, la alumna realiza un tratamiento dentro del registro algebraico (resuelve las ecuaciones) y da la solución al problema (acción no contemplada en el modelo RC). El desenlace de RC es la solución al problema propuesto. En 3, la alumna realiza un *truncamiento*; cuando escribe la expresión algebraica realizando la conversión de la propiedad de las cuerdas ya conoce el camino para la resolución al problema (RC desemboca en *truncamiento*). Solo tenía que resolver las ecuaciones planteadas.

En el relato del análisis se mezclan conceptos en el modelo RC (AO y AD, coordinación entre ambas, cambios de anclaje) con la aparición de ecuaciones (en registro algebraico), algunas vinculadas a afirmaciones matemáticas genéricas (propiedad de las cuerdas) y otras a la configuración que acompaña el enunciado del problema (medidas 10 y 18 de la configuración inicial, $x+18 = y+10$). El rol desempeñado por ambos tipos de ecuación en el proceso de resolución del problema es distinto. Las ecuaciones no vinculadas a afirmaciones matemáticas genéricas no son contempladas en el modelo RC.

4. Análisis con el modelo RC extendido

4.1. Ejemplo alumna 2

La Figura 7 muestra la respuesta de la alumna 2 al problema empírico 3. Se ve una solución que usa afirmaciones geométricas (teorema de Pitágoras) y su conversión en registro algebraico y complementa con relaciones algebraicas (ecuaciones) entre las medidas de los diámetros y radios de ambas circunferencias. Una vez establecidas las ecuaciones resuelve el sistema y logra la solución.



$$1.-\quad 2r+18=2R$$
$$r+9=R$$
$$2.-\quad x^2+9^2=r^2$$
$$3.-\quad x+10=R$$
$$x=R-10$$
$$3.-\ en\ 2.-\quad x\ en\ x$$
$$4.-\quad (R-10)^2+81=r^2$$
$$1.-\ en\ 4.-\quad R\ en\ R$$
$$(r+9-10)^2+81=r^2$$
$$r^2-2r+1+81=r^2$$
$$82=2r$$
$$r=41$$
$$\boxed{R=50}$$

Figura 7. Transcripción de la respuesta de la alumna 2 al problema 3

Análisis de la respuesta desde el modelo RC extendido

1- Identifica los diámetros de ambas circunferencias realizando una AO y les asocia sus medidas (*2r* y *2R*) mediante una AD.

2- Relaciona ambos segmentos según los datos del problema y expresa la relación en registro algebraico, realizando una *conversión* pasando del registro gráfico al registro algebraico, *2r+18=2R*. Posteriormente simplifica la relación mediante *tratamiento* obteniendo *r+9=R*

3- Identifica el triángulo (AO) cuyos lados miden *x*, 9, *r* (AD). Identifica el triángulo (AO), asumiendo *sin demostración* que es rectángulo, y le asocia el teorema de Pitágoras (AD). Expresa la relación dada por el teorema de Pitágoras en registro algebraico.

4- Asocia dos expresiones literales *x+10* y *R* (AD) al segmento identificado, el radio mayor (AO). Expresa la identidad en registro algebraico y realiza un *tratamiento*. Indica el paso siguiente: 3 en 2 en la continuación del *tratamiento*.

5- Sustituye y resuelve el problema.

El proceso de resolución desemboca en una solución de *conjetura sin demostración* al aceptar sin demostrar que el triángulo identificado es rectángulo. El uso del modelo RC extendido da cuenta de las coordinaciones cognitivas entre registro geométrico y algebraico al incorporar las ideas del tratamiento y conversión entre registros.

4.2. Ejemplo alumno 3

La Figura 8 muestra la respuesta del alumno 3 al problema 3, siendo en este caso una solución totalmente expresada en registro algebraico. Aquí el alumno parte de la definición de la tangente trigonométrica de un ángulo y plantea varias expresiones para un mismo ángulo. Realiza el tratamiento adecuado en el registro algebraico y resuelve.

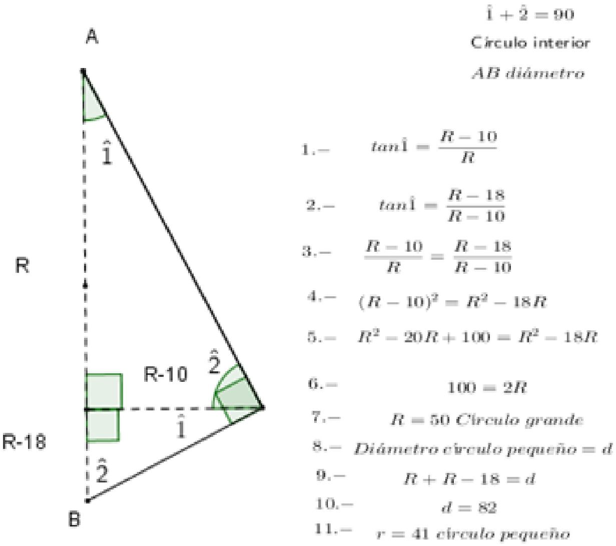


Figura 8. Transcripción de la respuesta del alumno 3 al problema 3

Análisis de la respuesta desde el modelo RC extendido

1. En la figura del enunciado, el alumno identifica tres triángulos rectángulos con ángulos rectos marcados en color (AO). Marca los ángulos agudos de cada triángulo en ^1 y ^2. Estas acciones se corresponden a AO (identificación de subconfiguraciones) y AD al asociarles sus valores ^1, ^2.
2. También realiza una AD cuando asocia el valor de 90 a la medida del ángulo ^1+^2. Igualmente, realiza una AO cuando identifica un ángulo inscrito que abarca una semicircunferencia y le asocia su medida 90º.
3. Identifica el radio del círculo grande (AO) y le asocia su valor *R* (AD).

El alumno no ha demostrado que los diámetros se cortan formando ángulos rectos. Por ese motivo, al igual que en el ejemplo anterior, se considera que hay un desenlace del RC de *conjetura sin demostración*. Identifica segmentos que forman parte del radio del círculo grande y le asocia sus medidas, de acuerdo con los datos del problema (*R*, *R-10* y *R-18*). Todas estas identificaciones y asociaciones son acciones coordinadas entre AO (al aislar parte de la subconfiguración y expresarla en registro algebraico) y AD (al asociar las medidas). En 1 y 2, aparece la expresión de la tangente del ángulo ^1 en forma de dos cocientes, a partir de identificar la subconfiguración de la Figura 9.

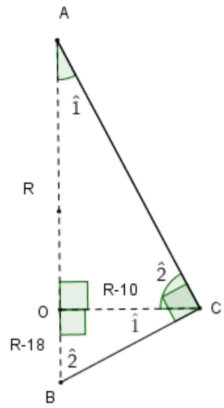


Figura 9. Subconfiguración relevante del problema 3 para el alumno 3

A partir de la identificación de las subconfiguraciones: triángulos *AOC* y *COB* (lo que constituyen dos AO) el alumno asocia la definición de la tangente trigonométrica del mismo ángulo en dos triángulos distintos (lo que constituye en cada asociación una AD). En el momento en que el alumno identifica el mismo ángulo en ambos triángulos se produce *truncamiento* (aunque cabe considerar este desenlace como *conjetura sin demostración* por aceptar, sin demostrarlo, que los diámetros son perpendiculares). El alumno ya sabe cómo resolver el problema. A partir del punto 3 y hasta el final, mediante el tratamiento adecuado dentro del registro algebraico (resolviendo el sistema de ecuaciones), el alumno encuentra la solución. Esta solución utiliza solamente registro algebraico en su presentación en lenguaje escrito. Ni siquiera ha dado la definición de la tangente trigonométrica de un ángulo como “cateto opuesto partido por cateto adyacente”. Se ha limitado a representar la situación particular del problema en lenguaje algebraico para hallar las relaciones (ecuaciones) que necesitaba para llegar a la solución.

5. Discusión y conclusiones

Con este trabajo se indica la pertinencia de ampliar el modelo RC, usado en el análisis de la resolución de problemas de probar de geometria clásicos, en un contexto de lápiz y papel, cuando se resuelven problemas empíricos. Se han analizado tres soluciones a un problema empírico, correspondientes a tres estrategias de resolución. Una en la que la alumna 1 utiliza una propiedad geométrica general (propiedad de las cuerdas), que convierte al registro algebraico y que complementa con una relación algebraica, a partir de la situación particular de la figura (igualdad entre dos expresiones del radio mayor) para hallar la solución. Esta solución ha servido para introducir la necesidad del modelo RC extendido. La resolución se podría considerar que constituye un razonamiento geométrico general en registro algebraico. En la segunda resolución, la alumna 2 busca una relación entre los radios de ambas circunferencias, que le lleva a establecer una ecuación (que expresa la relación entre radios) y que complementa con una propiedad genérica (teorema de Pitágoras). En esta solución hay una mezcla de razonamientos y registros algebraico y geométrico. En la tercera, el alumno 3 expresa de dos formas la tangente trigonométrica del mismo ángulo, que no define, obteniendo una ecuación con una incógnita que resuelve el problema, con una solución en registro algebraico.

Los ejemplos descritos muestran el potencial explicatorio del modelo RC extendido, cuando se usa para el análisis de la resolución de los problemas empíricos. Con el modelo extendido podemos analizar las respuestas de los alumnos a problemas empíricos y así avanzar en el estudio de características del razonamiento de los alumnos cuando resuelven problemas de probar y calcular en contexto geométrico, con lápiz y papel, tanto si usan un registro solo geométrico como si introducen en su discurso el registro algebraico.

Todas las respuestas analizadas suponen cierta la perpendicularidad entre los diámetros de la circunferencia mayor pues la utilizan, aunque sea implícitamente, para resolver el problema, pero no la explicitan. Este es un problema recurrente en geometría. A veces utilizamos enunciados con figuras “mudas” (sin ninguna marca) y decimos simplemente, como en nuestro problema: *Dos círculos son tangentes interiores* ***como se muestra en la figura***. Esta forma de proceder no es coherente con la exigencia a los alumnos de que no deben basar sus conjeturas en lo que parece que se cumple en la configuración inicial que acompaña a los enunciados. Esta reflexión implica que deberíamos restringir el uso de las figuras mudas en el enunciado de los problemas. Tal vez, el hecho de no incluir la hipótesis de la perpendicularidad de los diámetros del círculo mayor ha propiciado la aparición de varias soluciones, evidenciando que es muy complicado estudiar los procesos desarrollados por los alumnos durante la resolución de un problema a través de un contenido fijado a priori, como por ejemplo "conocimiento susceptible de ser utilizado" (Clemente & Llinares, 2015).

Con los problemas empíricos ampliamos los objetivos de nuestra investigación. Desde el registro geométrico, que necesita conocimiento de afirmaciones matemáticas y capacidad de coordinación para relacionarlas y generar luego un discurso expresado según las normas del razonamiento deductivo, pasamos a considerar estrategias de resolución que están expresadas en una combinación de registros geométricos-algebraicos. Una característica de los problemas empíricos es el registro algebraico, que es un lenguaje potente. Aunque precisa conocimiento matemático igual que el registro geométrico, el rol desempeñado por la coordinación entre hechos geométricos pierde relevancia. Cuando el alumno es capaz de expresar (representar) la situación geométrica del problema en forma de ecuaciones (registro algebraico), estas se resuelven de manera "algorítmica", simplificándose la tarea de elaborar un discurso deductivo al responder a la característica del propio problema ("Calcular"). Se precisan investigaciones de largo periodo de observación para evidenciar analogías/diferencias, si las hay, entre el razonamiento de los alumnos en diferentes tipos de problemas por causa de la formación recibida, según haya predominado el registro geométrico o el algebraico.

La solución del problema que hemos presentado se desencadena a partir de la identificación de una subconfiguración relevante, aunque el desencadenante no funcione desde el anclaje visual al discursivo (Clemente, Llinares & Torregrosa, 2017). Hay evidencias que sugieren que el conocimiento teórico de los alumnos les hace "buscar" la subconfiguración que se ajuste a dicho conocimiento teórico (Llinares & Clemente, 2014). Sin embargo, son necesarios más trabajos de investigación para explicar el cambio de anclaje (Duval, 1998). La identificación de características que explicasen cómo realizan los alumnos los cambios de anclaje tendría implicaciones en la enseñanza de las matemáticas en general y de la geometría en particular: identificar cómo los estudiantes realizan la asociación entre lo que identifica en una configuración inicial y las afirmaciones matemáticas que conoce. En otras palabras: por qué hay estudiantes que resuelven los problemas, generalmente, con cambio de anclaje de visual a discursivo y otros que realizan la asociación en sentido contrario: de discursivo a visual.

Referencias

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM, 40*, 501-512.

Clemente, F., & Llinares, S. (2015). Formas del discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestro en la resolución de problemas de Geometría. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(1), 9-27.

Clemente, F., Llinares, S., & Torregrosa, G. (2017). Visualización y razonamiento configural. *BOLEMA, 31*(57), 497-516.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processing. En R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142-157). Berlín: Springer.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive Point of view. En C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study* (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano.* Cali, Colombia: Univalle.

Fiallo, J., & Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove on a grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 145-167.

Hanna, G., & Jahnke, N. (1996). Proof and proving. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: results from exploratory studies. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research on Collegiate Mathematics Education* III (pp. 234-283). Providence: AMS.

Hilbert, T., Renkl, A., Kessler, S., & Reiss, K. (2008). Learning to prove in geometry: learning from heuristic examples and how it can be supported. *Learning and Instruction, 18*, 54-65.

Ibañes, M. (2002). Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas, J. D. Godino (Eds.), *Investigación en Educación Matemática V* (pp. 11-26). Almería: Universidad de Almería.

Ibañes, M., & Ortega, T. (2005). Dimensiones de la demostración matemática en bachillerato. *Números, 61*, 19-40.

Komatsu, K. (2016). A framework for proofs and refutations in school mathematics: Increasing content by deductive guessing. *Educational Studies in Mathematics, 92*(2), 147-162.

Llinares, S., & Clemente, F. (2014). Characteristics of pre-service primary school teachers' configural reasoning. *Mathematical Thinking and Learning, 16*(3), 234-250.

Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics, 94*(2), 223-239

Prior, J. y Torregrosa, G. (2013). Razonamiento Configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(3), 339-368.

Reiss, K.M., Heinze, A., Renkl, A., & Groß, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: Effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples. *ZDM, 40*(3), 455-467.

Robotti, E. (2012). Natural language as a tool for analyzing the proving process: the case of plane geometry proof. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 433-450.

Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y enseñanza de la geometría. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática, 62,* 49-56.

Torregrosa, G., & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,10(*2), 275-300.

Torregrosa, G.; Quesada, H., & Penalva, M.C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos Visualización. *Enseñanza de las Ciencias,28*(3), 327-340.

Zazkis, R., & Dubinsky, E. (1996). Dihedral groups: a tale of two interpretations. *CBMS. Issues in Mathematics Education, 6*, 61-82.

Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytical estrategies. A Study of students' understanding of the group D_4. *Journal for Research in Mathematics Education, 27(4),* 435-457.

Referencia al autor

Germán Torregrosa, Universidad de Alicante (España) german.torregrosa@ua.es

Coordination of cognitive processes in problem solving: relationship between geometry and algebra.

Germán Torregrosa, Universidad de Alicante (Spain)

The study of the characteristics of students' reasoning when they solve problems of geometry with pencil and paper has led us to elaborate a theoretical model called Configural Reasoning (CR). CR implies that students develop a coordinated action between Operative and Discursive Apprehensions, associating mathematical affirmations and/or making modifications in the initial configuration when they are solving a geometry problem with pencil and paper.

From a cognitive standpoint, the CR model explains the development of the process followed by students when facing geometrical problems of proof. Nonetheless, the model does not well cover the analysis of students' answers in the resolution of empirical geometrical problems; that is, when students solve problems in which the initial conditions are not geometric properties but concrete measures (numerical or literal). Due to the dominance of empirical geometrical problems in secondary education, the greater relation of these problems with students' daily life and the greater motivation involved, it is necessary to investigate new approaches to the CR model in order to expand the set of problems that can be analyzed.

Extended Configural Reasoning (ECR) is the result of research around such new approach. This paper presents the extension of the CR model for the analysis of the resolution of empirical problems of geometry, in which the initial data are numerical or literal. The extension of the CR model consists of considering that in Discursive Apprehensions, within the meaning of "mathematical affirmation" including theorems, axioms, definitions, properties as well as the initial conditions (hypotheses) of empirical problems, expressed as numerical or literal data. Furthermore, this new model considers the algebraic register generated in the discourse during the resolution of a problem, within a geometrical context. This inclusion of the algebraic register in the model draws on the concepts of conversion and treatment of the Theory of Semiotic Systems by Duval. After the analysis of several resolutions to an empirical problem with the ECR model, newer aspects have come to explain the "traditional" behavior of students in their learning of Geometry. For future research, we could consider the use of "silent" figures. We could also change our focus to incorporate the analysis of resolution strategies expressed through hybrid geometrical-algebraic registers.

Interpretación de gráficos estadísticos por futuros profesores de Educación Secundaria

María M. Gea, Universidad de Granada (España)

Pedro Arteaga, Universidad de Granada (España)

Gustavo R. Cañadas, Universidad de Granada (España)

Recibido el 6 de octubre de 2016; aceptado el 28 de septiembre de 2017

Interpretación de gráficos estadísticos por futuros profesores de Educación Secundaria

Resumen

El objetivo del trabajo fue evaluar la interpretación de gráficos estadísticos por parte de estudiantes que se preparan como futuros profesores en el Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato. Con dicha finalidad, analizamos las respuestas escritas de 65 estudiantes de la especialidad de matemática a tres tareas en las que deben interpretar el histograma, diagrama acumulativo y gráfico de la caja de la distribución de la esperanza de vida al nacer en 193 países diferentes. Se categorizan las interpretaciones de los participantes, en función del nivel de lectura alcanzado y de acuerdo con los resúmenes estadísticos y elementos del gráfico que interpretan. Aunque la mayoría de las interpretaciones son correctas, en el análisis de las respuestas se identifican errores de comprensión de algunos conceptos estadísticos, que deberían considerarse en la formación de profesores.

Palabras clave. Conocimiento común del contenido, futuros profesores, Educación Secundaria y Bachillerato, gráficos estadísticos.

Interpretação de gráficos estatísticos por futuros professores do ensino secundário

Resumo

O objetivo de trabalho é avaliar a interpretação de gráficos estatísticos por estudantes que se preparam como professores no Masters de Formação de Professores. Para atingir este objectivo são analisadas as respostas de 65 estudantes na especialidade de matemática para três tarefas em que têm de interpretar o histograma, diagrama cumulativos e gráfico de caixa para a distribuição de expectativa de vida em 193 países. São categorizadas suas interpretações tendo em conta o nível de leitura da resposta, os resumos e elementos dos gráficos que eles interpretam. Embora a maioria das interpretações dos participantes estavam corretos, a análise das respostas revela erros em compreender alguns conceitos estatísticos que devem ser levadas em conta na formação desses professores.

Palavras chave. Conhecimento comum do conteúdo, futuros professores, ensino médio e alto, gráficos estatísticos.

Prospective secondary school teachers' interpretation of statistical graphs

Para citar: Gea, M.M., Arteaga, P. y Cañadas, G.R. (2017). Interpretación de gráficos estadísticos por futuros profesores de Educación Secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *12*, 19-37.

Abstract

The aim of this paper is the assessment of the interpretation of statistical graphs by students in the Masters of Secondary and High School Teacher Education. To achieve this aim we analyse the responses of 65 students in the itinerary of mathematics to three tasks in which they have to interpret the histogram, cumulative diagram and box plot for the distribution of life expectation in 193 countries. We categorize their interpretations taking into account the reading level of the response and the statistical summaries and elements of the graphs under interpretation. Although most participants' interpretations were correct, the analysis of responses reveals errors in the understanding of statistical concepts for consideration in teacher education.

Key words. Common content knowledge, prospective teachers, secondary and high school, statistical graphs.

Interprétation de graphiques statistiques pour les futurs enseignants du secondaire

Résumé

L'objectif de cet article est d'évaluer l'interprétation de graphiques statistiques réalisées par élèves qui se préparent dans les Maîtres de formation des enseignants de secondaire et la Baccalauréat. Pour atteindre cet objectif, nous analysons les réponses des 65 étudiants dans la spécialité des mathématiques à trois tâches dans lesquelles ils ont interpréter l'histogramme, diagramme cumulatif et boîte à moustaches pour la distribution de l'espérance de vie dans 193 pays. Nous classons leur interprétation en tenant compte du niveau de lecture, les résumés statistiques et des éléments des graphiques qu'ils interprètent. Bien que la plupart des interprétations des participants fussent correctes, l'analyse des réponses révèle des erreurs dans la compréhension de certains concepts statistiques qui devraient être prises en compte dans l'éducation de ces enseignants.

Paroles clés. Connaissance commune du contenu, futurs enseignants, enseignement secondaire et Baccalauréat, graphiques statistiques.

1. Introducción

En el trabajo con la estadística se utilizan variedad de representaciones gráficas de relevancia en la organización y análisis de datos. Pfannkuch y Wild (2004) atribuyen a los gráficos estadísticos un papel esencial en lo que denominan "transnumeración", componente del razonamiento estadístico que consiste en descubrir características de una distribución de datos a partir de una representación gráfica de la misma. Debido a su presencia en los medios de comunicación y el trabajo profesional, una persona culta debiera poder interpretar los gráficos estadísticos elementales (Sharma, 2013), ya que esta presencia ha aumentado mucho con los avances tecnológicos (Gal & Murray, 2011; Kemp & Kissane, 2010). Esta interpretación no puede reducirse a una lectura literal del gráfico, sino que se deben poder identificar las tendencias y variabilidad de los datos y obtener conclusiones sobre la información representada (Schield, 2011). Dichas competencias forman parte de la cultura estadística que, según Gal y Murray (2011), consta de dos componentes: (a) competencia para interpretar y realizar una evaluación crítica de la información estadística; y (b) capacidad de formular y comunicar a otros una opinión razonada sobre dicha información.

La enseñanza de los gráficos estadísticos se incluye en las directrices curriculares españolas de Educación Primaria (MECD, 2014) y Educación Secundaria y Bachillerato (MECD, 2015) y debiera contribuir al desarrollo de las anteriores capacidades. No obstante, el éxito en la enseñanza de este tema dependerá de la competencia de los profesores en la interpretación de gráficos estadísticos, donde se ponen en juego las dos componentes señaladas de la cultura estadística. En este contexto, las investigaciones sobre interpretación de gráficos por parte de futuros profesores son escasas; casi en su totalidad están centradas en futuros profesores de Educación Primaria, revelando dificultades para interpretar más allá de la lectura de datos representados (Arteaga, 2011; González, Espinel & Ainley, 2011).

La finalidad de este trabajo es evaluar la competencia de interpretación de algunos gráficos estadísticos incluidos en las directrices curriculares de estudiantes que se preparan como profesores de matemática para la Educación Secundaria y Bachillerato. Los resultados servirán como base para la organización de actividades de formación sobre este tema, según recomiendan Remillard, Herbel-Eisenmann y Lloyd (2011).

2. Fundamentos

Nos basamos en dos tipos de fundamentos. Primero, la conceptualización del conocimiento del profesor de matemáticas, definiendo el conocimiento común del contenido. Segundo, la comprensión gráfica y los niveles de lectura de gráficos.

2.1. Conocimiento del profesor de matemáticas

Shulman (1986) inició el estudio del conocimiento requerido por los profesores para abordar con éxito la enseñanza desglosándolo en conocimiento del contenido, conocimiento del contenido pedagógico y conocimiento del currículo. Su trabajo promovió una línea de investigación muy amplia (Blömeke, Hsieh, Kaiser & Schmidt, 2014; Even & Ball, 2009; Llinares & Krainer, 2006; Tatto & Senk, 2011).

En la investigación sobre formación de profesores, un marco teórico de impacto es el del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) (Adler & Venkat, 2014; Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Hill, Ball & Schilling, 2008; Speer, King & Howell, 2015). Al igual que en Shulman (1986), se consideran el conocimiento del contenido y el conocimiento del contenido pedagógico, dividiendo el primero en:

- *Conocimiento común del contenido*, es el que posee una persona (no necesariamente el profesor) después de haber estudiado el tema; se trataría del conocimiento que el profesor ha de enseñar a sus alumnos. En nuestro trabajo, sería el conocimiento de los gráficos estadísticos en las directrices curriculares.
- *Conocimiento en el horizonte matemático*, va más allá del conocimiento común; incluye conocimiento del tema a un nivel superior. En nuestro caso, los gráficos utilizados en la formación universitaria.
- *Conocimiento especializado del contenido*, es el aplicado por el profesor para articular tareas de enseñanza referidas al tema a enseñar. Por ejemplo, saber proponer un ejemplo o evaluar a sus estudiantes.

En nuestro estudio analizamos el conocimiento común del contenido en una muestra de futuros profesores de Educación Secundaria y Bachillerato sobre tres gráficos estadísticos: histograma, gráfico acumulativo y gráfico de caja. Nos interesamos por su interpretación, que, indirectamente, permite evaluar la comprensión que los futuros profesores muestran de los resúmenes estadísticos de valor central y dispersión y otros elementos de los gráficos. Estos son conocimientos comunes en el futuro profesor, ya que su interpretación se incluye en las directrices curriculares.

2.2. Niveles de comprensión gráfica

Muchas investigaciones analizan los componentes de la comprensión gráfica y los niveles en esta comprensión (Bertin, 1967, Curcio, 1987; Friel, Curcio & Brigth, 2001).

Bertin (1967) indica que un gráfico es un objeto semiótico complejo, constituido, tanto globalmente como por cada elemento que lo compone, por signos que requieren una interpretación por aquellos que los leen. Según el autor, la lectura de un gráfico comienza con una identificación externa del tema al que se refiere, a través de la comprensión del título y las etiquetas. A continuación, se requiere una identificación interna de las dimensiones relevantes de variación en el gráfico, es decir, las variables representadas y sus escalas. Finalmente, se produce una percepción de la correspondencia entre los niveles de cada dimensión visual para obtener conclusiones sobre los niveles de cada variable y sus relaciones en la realidad representada.

Friel et al. (2001) definen la comprensión gráfica como la capacidad de dotar de significado a los gráficos creados por uno mismo o por otros. Partiendo de Curcio (1987), se proponen los siguientes niveles en esta comprensión:

- *Leer los datos* o identificar elementos del gráfico. En nuestro estudio consistiría, por ejemplo, en poner en relación un elemento de un eje con el de otro eje para extraer la frecuencia asociada a un valor de la variable o viceversa. Otro ejemplo es cuando se describe el gráfico o su contenido, sin interpretarlo.
- *Leer entre los datos o extracción de tendencias*, cuando se percibe en el gráfico una relación entre dos subconjuntos de datos, efectuando para ello cálculos o comparaciones. Un caso particular en nuestro estudio es determinar visualmente la moda u otra medida de valor central o posición, ya que para ello hay que comparar las frecuencias en diferentes intervalos.
- *Leer más allá de los datos o análisis de la estructura*, consiste en comparar tendencias o agrupamientos o bien efectuar predicciones. Un ejemplo es cuando se ponen en relación los valores centrales y de dispersión de una distribución.
- *Leer detrás de los datos*, consiste en integrar la información que ofrece el gráfico y el contexto de los mismos para extraer conclusiones acerca de la recogida de información o la posible extensión de las conclusiones a otros casos. Este nivel se encuadra en un conocimiento especializado y en el horizonte matemático.

En nuestro trabajo se propone a los futuros profesores la interpretación de diferentes gráficos, esperando que lleguen al nivel más avanzado de lectura e interesándonos por los estadísticos y elementos del gráfico que interpretan.

3. Antecedentes

En las investigaciones previas encontramos trabajos que analizan la competencia gráfica de los profesores de Educación Primaria, en los que se detectan carencias (González et al., 2011). La mayoría de estos trabajos se centran en la construcción de gráficos. Por ejemplo, en su estudio con 29 futuros profesores de Educación Primaria, Bruno y Espinel (2005) encontraron errores frecuentes en la construcción de histogramas y polígonos de frecuencia. En un estudio con 30 futuros profesores de Educación Primaria, Burgess (2002) encontró sólo seis participantes capaces de producir gráficos adecuados y solo la mitad interpretó el gráfico para ponerlo en relación con el contexto del estudio. Monteiro y Ainley (2006), en su investigación con 218 futuros profesores de Educación Primaria, encontraron dificultad para leer algunos gráficos tomados de la prensa. Batanero, Arteaga y Ruiz (2010) evalúan los gráficos producidos por 93 futuros profesores de Educación Primaria, observando errores en su construcción. También se analizaron los niveles de lectura, según Friel et al. (2001), indicando que pocos sujetos alcanzaron el nivel más alto de lectura.

Son escasas las investigaciones sobre comprensión de resúmenes estadísticos por futuros profesores. Entre ellas citamos las de Groth y Bergner (2006), con 46 futuros profesores de Educación Secundaria, sobre su comprensión de la media, mediana y moda; sus resultados indican que, aunque conocían la definición, no recordaban algunas propiedades importantes o las situaciones en que hay que utilizar cada uno de estos conceptos. Estrada, Batanero y Fortuny (2004) proponen un cuestionario a 367 futuros profesores de Educación Primaria para analizar su comprensión de diferentes resúmenes estadísticos. Encontraron errores como no tener en cuenta los valores atípicos en el cálculo de la media, o confundir media, mediana y moda. Errores similares fueron encontrados por Ortiz y Font (2014). También se encuentran dificultades en trabajos sobre el conocimiento de probabilidad de futuros profesores (Vásquez y Alsina, 2015).

Nuestra investigación trata de completar las anteriores, proponiendo la interpretación de gráficos a futuros profesores de Educación Secundaria. Además de analizar el nivel de lectura alcanzado, utilizaremos sus respuestas para analizar su comprensión de los resúmenes estadísticos y elementos del gráfico que citan.

4. Metodología

El estudio contó con 65 estudiantes del Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato. Fueron informados de la finalidad del estudio y cedieron sus datos voluntariamente mostrándose interesados por colaborar. La Tabla 1 resume su titulación de procedencia, formación didáctica y experiencia docente. Todos los participantes eran licenciados en matemáticas, estadística, ciencias o ingenieros y habían estudiado estadística durante la licenciatura. Conocían los gráficos considerados, tanto de su formación universitaria como de su educación secundaria.

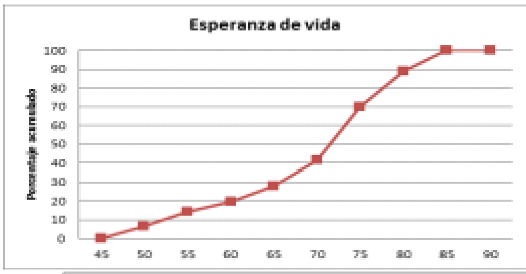
Tabla 1. *Experiencia didáctica de los participantes (% respecto a la muestra)*

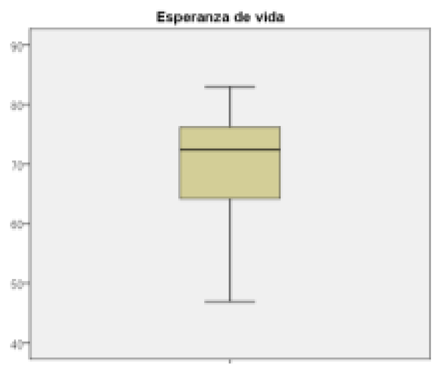
	Experiencia docente		Asignaturas de didáctica cursadas	
Titulación	Sí	No	Sí	No
Matemáticas	22 (33,8)	12 (18,5)	11 (16,9)	23 (35,4)
Estadística	2 (3,1)		1 (1,5)	1 (1,5)
Ingeniería	11 (16,9)	8 (12,3)	1 (1,5)	18 (27,7)
Ciencias	2 (3,1)	8 (12,3)		10 (15,4)
Total	37 (56,9)	28 (43,1)	13 (20)	52 (80)

Las tareas propuestas (Figura 1) forman parte de un taller formativo sobre enseñanza de la estadística basada en proyectos. El objetivo fue estudiar la variable "Esperanza de vida al nacer", utilizando datos reales sobre la esperanza de vida en 193 países tomados del servidor de las Naciones Unidas (http://hdr.undp.org/es/data). El taller comenzó analizando el significado de la variable esperanza de vida al nacer y su distribución, para lo cual se construyeron un histograma de la distribución, un diagrama de frecuencias acumulados, un gráfico de la caja y una tabla con estadísticos resumen. Cada participante completó la actividad individualmente y por escrito. Recogidos los cuestionarios se llevó a cabo un análisis del contenido, dividiendo el texto en unidades que pueden clasificarse en un número reducido de categorías, con la finalidad de realizar inferencias sobre su contenido (Colle, 2011; Krippendorff, 2013). Cada interpretación se analizó mediante un proceso inductivo y cíclico, que permitió identificar las categorías utilizadas en el análisis. A continuación describimos estas categorías, los resultados de la interpretación de cada gráfico y una síntesis de los mismos. Finalizamos con la descripción de las actividades formativas realizadas al finalizar la evaluación y con algunas implicaciones para la formación de profesores.

1. *Esperanza de vida.* Hemos preparado una tabla de frecuencias, gráficos y calculado algunos estadísticos de la esperanza de vida en el total de países de la muestra. Interpreta cada uno de estos gráficos, explicando qué nos indican sobre la distribución de la esperanza de vida.

Estadísticas de esperanza de vida			
Media	69,2	Máximo	83,0
Mediana	72,5	Primer cuartil	64,2
Moda	72,7	Tercer cuartil	76,1
Mínimo	46,9	D. Típica	9,88





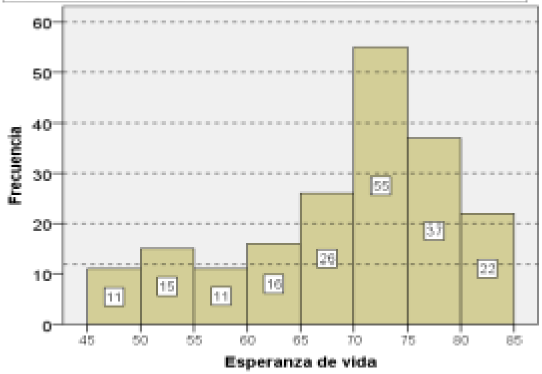


Figura 1. Tareas propuestas

5. Resultados y discusión

5.1. Categorías de análisis de las interpretaciones de los gráficos

Las interpretaciones de los futuros profesores de los gráficos estadísticos de la tarea se han clasificado en tres categorías “lectura de datos”, “lectura entre los datos” y “lectura más allá de los datos” propuestas por Curcio (1987) y Friel et al. (2001). En cada una se han encontrado estrategias que consideramos como subcategorías, de las cuales se muestran interpretaciones correctas e incorrectas de los futuros profesores.

Lectura de datos. Se trata de interpretaciones que suponen únicamente una lectura literal de los datos y se encuadran en la siguiente categoría:

Describe el contenido del gráfico. Cuando se describe el significado del gráfico reproduciendo una definición del mismo o indicando su utilidad. En el caso del histograma, se indica que cada rectángulo representa el número de países que poseen una determinada esperanza de vida y, en algún caso, se describen los datos representados en uno de los intervalos o incluso todos:

> En este caso la frecuencia representa el nº de países cuya esperanza de vida se encuentra en el intervalo del eje horizontal. Por ejemplo, en el intervalo marcado se interpreta que hay 16 países cuya esperanza de vida está entre 60 y 65 años. (ME)

> Hay 55 países que tienen una esperanza de vida de 75, 36 países con esperanza de vida de 80 y 22 países que tienen una esperanza de 85, son pocos los países que tienen una esperanza de vida menor a 65 años. (DG)

Encontramos también interpretaciones incorrectas del histograma. En línea con el error descrito en Cobo (2003), CM confunde la media con el valor de la variable:

> Existen unos 55 países que tienen una esperanza de vida de 75 años, unos 36 países que tienen una media de 80 años, unos 27 países que tienen una media de esperanza de vida de 70 años. Los demás países que son menos, tienen una esperanza de vida de menos de 65 años. (CM)

En menor medida, encontramos futuros profesores que interpretan que la distribución de frecuencias es una distribución de personas y no de países, o confunden la esperanza de vida con el número de muertes. Otra interpretación incorrecta es la de MIC, quien confunde la frecuencia absoluta con porcentaje:

> Este gráfico nos da el porcentaje de países que tienen una edad determinada como esperanza de vida. Por ejemplo 12 de los países tienen una esperanza de vida de ≅ 50 años. El dato más interesante es que el 55 (más de la mitad de los países) tienen una esperanza de 75 años. (MIC)

Los participantes que describen el diagrama acumulativo generalmente indican que en dicho gráfico se representan las frecuencias acumuladas de la esperanza de vida en el conjunto de países de la muestra, acompañada a veces de la interpretación de datos particulares del gráfico:

> En el gráfico se observa, que sólo el 6,2% de los países tienen una esperanza de vida menor de 50 años, que es el dato más drástico. Un dato destacado es que el 47% de los países tienen una esperanza de vida entre 70 y 80 años (JP)

Encontramos también descripciones incorrectas del diagrama acumulativo como la siguiente, donde se confunden frecuencias acumuladas y no acumuladas:

> Como podemos observar en el gráfico 1 existen 0 países donde la esperanza de vida es de 45 años, el 6'2% tiene una esperanza de vida de 50 años, y la esperanza de vida va aumentando hasta que el 100% de los países tienen una esperanza de vida entre los 85 y 90 años. (ER)

Otros errores se deben a confusión de la frecuencia (número de países con una cierta esperanza de vida o menor) con el número de muertes:

> Hasta los 70 años ha muerto el 40% de la población, en los últimos 20 años muere el resto ≅ 60%, hay una mayor concentración de muertes en los últimos 20 años (FR)

Cuando se describe el significado del gráfico de la caja, se suele utilizar sus componentes (cuartiles, máximo y mínimo, y puntos extremos), indicando cómo se organiza la información, y completando los valores de algunos estadísticos:

> En este gráfico se observan de forma aproximada (pues no se da en papel milimetrado) los siguientes datos sobre la esperanza de vida: Mínimo en: 47 años; Máximo en: 82 años; Mediana próxima a: 73 años; cuartiles respectivos a 64 años y 76 años. (AMA)
>
> Algunos futuros profesores indican además, la ausencia de datos atípicos.
>
> No hay datos atípicos porque si no saldrían puntos sueltos (JC)

Hay también interpretaciones incorrectas del gráfico de la caja, como en LT, quien considera que el diagrama representa tan sólo la información de la esperanza de vida de una cuarta parte de los países del estudio:

> Se refiere a la cuarta parte de todos los países que intervienen en la muestra (LT)

<u>Lectura entre los datos.</u> Estas interpretaciones suponen el realizar cálculos o comparaciones con los datos obteniendo al menos un estadístico, aunque no los ponen en relación. Son las siguientes:

Interpreta el rango. Cuando se informa del intervalo de valores que toma la variable, categoría también hallada en Arteaga (2011). Supone un nivel de lectura entre datos, ya que los alumnos obtienen previamente los extremos del gráfico para deducir el rango. Las interpretaciones son correctas, tanto en el histograma (por ejemplo, EGA) como el diagrama acumulativo (por ejemplo, AJD). Es más difícil interpretar el rango en el diagrama de caja. VC confunde rango con rango intercuartílico:

> No hay ningún país con la esperanza de vida inferior a 50, ni superior a 85. (EGA)
>
> El gráfico 1 nos dice que las esperanzas de vida de todos los países están entre 45 y 90. (AJD)
>
> La gráfica 4 habla de una esperanza de vida de entre 63 y 77 años. (VC)

Interpreta el máximo. Esta categoría también aparece en Arteaga (2011), requiere realizar comparaciones, por tanto el segundo nivel de lectura. Aunque con poca frecuencia, algunos participantes lo interpretan adecuadamente en el histograma; por ejemplo AJD indica que el valor máximo ha de estar en el último intervalo completando la frecuencia que corresponde a este intervalo:

> La esperanza de vida máxima es de 82,5 a 87,5 años, y esta se da solamente en 22 países (AJD)

Encontramos también algunas interpretaciones incorrectas en las que se confunde la esperanza de vida con la edad de muerte:

> También con todos estos gráficos observamos que en los diferentes países la población no supera los 85 años (MJG)

En las interpretaciones incorrectas en el diagrama acumulativo se confunde la frecuencia acumulada con la absoluta y/o el valor de la variable. Al observar que en el gráfico hay la misma frecuencia acumulada para los valores de esperanza de vida de 85 y 90 años, ChC interpreta que hay la misma esperanza de vida; en línea con lo hallado en Cobo (2003/ y Arteaga (2011), confunde valor y frecuencia de la variable:

> La esperanza de vida a los 85 años es igual a la esperanza de vida a los 90 años. (ChC)

MM piensa que al ser el máximo de la frecuencia acumulada igual a 100, todos los países tienen igual esperanza de vida. No comprende que el máximo de la frecuencia acumulada siempre es 100 y no lo relaciona con el valor de la variable (90):

> También se observa que existe el 100% de países que tienen la misma esperanza de vida. (MM)

Hay futuros profesores que aluden al máximo al interpretar el gráfico de la caja:

> […] la máxima esperanza de vida 83, (AJD)

Interpreta el mínimo. Otros participantes interpretan el menor valor de esperanza de vida, interpretación que también aparece en Arteaga (2011). Aunque debiera ser fácil, encontramos interpretaciones incorrectas de este estadístico para el diagrama acumulativo, como por ejemplo EGA, pues, como se ha dicho, la gráfica se refiere a la esperanza de vida, no a la edad de muerte:

> Antes de los 45 años no muere nadie (EGA)

Las interpretaciones del mínimo en el gráfico de la caja son todas correctas:

> El gráfico 3 nos dice que la mínima esperanza de vida es aproximadamente 47 (AJD)

Interpreta la media. Algunos participantes interpretan la media de la variable a partir del histograma, llegando a conclusiones erróneas ya que, por lo general, se confunde con la mediana o la moda. Así, MC proporciona un intervalo demasiado amplio para la estimación de la media (que además, podría haber obtenido de la tabla de resúmenes estadísticos); sin tener en cuenta que al ser la distribución asimétrica negativa, la media debe ser menor que la moda:

> Además podemos intuir que la media se encontrará entre 65 y 85 porque es donde se concentra más los datos (MC)

Interpreta la moda. Cuando se interpreta la esperanza de vida más frecuente entre los países del estudio o el intervalo modal; también encontrado en Arteaga (2011). Es una de las interpretaciones más frecuentes del histograma:

> […] que la moda está en el intervalo entre 70 y 75 y los siguientes intervalos más frecuentes son de 75 a 80 y de 65 a 70, (AJD)

Encontramos algunos errores al interpretar la frecuencia, de países como número de personas. Además, aunque la esperanza de vida modal es 75, puede no coincidir con la edad a la que muere la mayoría de personas:

> También indica que a los 75 años aproximadamente, muere mucha gente (JFM)

En menor medida hay confusión entre moda y media, mostrando falta de comprensión del efecto de valores atípicos sobre la media (ver Estrada et al., 2004):

> Lo que destaca del segundo gráfico es que la mayor frecuencia se da en los 75 años, en este baremo se encuentra la media de la esperanza de vida de esos países se encuentra de 72,5 y 82,5 años (JC)

Pocos profesores interpretan la moda en el diagrama acumulativo; aunque todos lo hacen correctamente; mayormente no se da la moda sino el intervalo modal:

> La mayoría de países tienen su esperanza de vida comprendida entre los 70-75 años. (EGA)

> La esperanza de vida suele estar entre los 80 y 75 años. (ANL)

Cuando se interpreta este estadístico en el gráfico de caja, se suele comparar la esperanza de vida más frecuente con la mediana. Un futuro profesor interpreta este parámetro de modo incorrecto al confundir máximo con valor de mayor frecuencia:

> [Mientras que la mediana se sitúa en torno a 72,5 años] que coincide más o menos con el valor en el que los países obtienen mayor esperanza de vida. (IM)

Interpreta el intervalo de menor frecuencia. Esta categoría se asocia a la interpretación del histograma y generalmente es correcta como PP, aunque también encontramos interpretaciones incorrectas como la de IM, que confunde la frecuencia con el valor de la variable:

> El menor número de países (11 países) tienen una esperanza de vida de 60 años (PP)

> Mientras que aproximadamente a los 60 años, la esperanza de vida decrece (IM)

Estima o calcula estadísticos en el diagrama sin interpretarlos. Algunos participantes explican cómo obtener algunos estadísticos de la esperanza de vida a través del diagrama acumulativo, razonamiento que no apareció en Arteaga (2011). Por ejemplo, JMV explica cómo obtener varios estadísticos:

> Como tenemos la función acumulada deberíamos de restar los valores para obtener las frecuencias; si hacemos esto podemos ver que la mediana está en torno a los 75 años, esto lo podemos ver también aproximadamente en el diagrama de caja (4) gráficamente. Para

calcular la media hay que hacer la proporción. Para calcular la probabilidad de vivir menos que un cierto tiempo habría que ver el valor de dicha función partido por 100. (JMV)

En el gráfico de la caja, algunos futuros profesores marcan la posición aproximada de los cuartiles o los valores máximo y mínimo de la variable, pero no los interpretan. Los participantes reconocen los estadísticos y su cálculo, pero no son capaces de interpretarlos de manera conjunta con el gráfico.

Lectura más allá de los datos. En estas interpretaciones se analiza la estructura global de los datos, poniendo en relación varios estadísticos y son las siguientes:

Interpreta los cuartiles y/o la mediana. Algunos participantes interpretan los cuartiles y/o la mediana en el histograma, generalmente apoyándose en la tabla de resúmenes estadísticos y señalan su presencia en el histograma, por ejemplo, FR, que primero repite el valor de los cuartiles dados en la tabla y posteriormente indica el valor de dos marcas de clase. Puesto que en este caso se interpreta más de un estadístico, los estudiantes alcanzan el nivel de lectura más allá de los datos.

La mayoría de los países tiene esperanza de vida entre 64,2 – 76,1 (1r, 3r cuartil) (entre los 67,5 – 82,5 años) (FR)

Otros participantes estiman los cuartiles a partir del diagrama acumulativo observando la frecuencia acumulada, como AJD, que estima bien el tercer cuartil y peor el primero; en el segundo ejemplo se estima la mediana.

El primer cuartil está aproximadamente en 63, la mediana en 72 y el tercer cuartil en 77 (AJD)

Según la gráfica 1, la esperanza de vida de la mitad de los países aproximadamente (un 41%) es de entre 45 y 70 años. El resto, un 59% tendrá una esperanza de vida de más de 70 años. Me $\in$ [70,75] (MIH)

Finalmente hay interpretaciones del gráfico de caja con un nivel de lectura más allá de los datos (Curcio, 1987) al interpretar conjuntamente el primer y tercer cuartil:

El 50% central de los países tienen una E.V. entre 69,2 y 76,1 años. (MAG)

Otras interpretaciones incorrectas de los cuartiles y la mediana se deben a que no se considera que los porcentajes entre cada cuartil son iguales. Este conflicto se suele manifestar al justificar la asimetría de la distribución, como en AMC. En otros casos, se confunde moda y mediana, como MI:

En el gráfico 4, en el diagrama de caja, vemos como la mayoría de los países se encuentran por debajo de la mediana 72,5 años. (AMC)

En el 3º gráfico, la línea de la mediana nos indica dónde está la mayor cantidad de individuos del estudio, en este caso: esperanza de vida 72,5. (MI)

Interpreta la pendiente. Se utilizan conocimientos de representación gráfica de funciones pues, aunque el diagrama acumulativo es siempre creciente, la tasa de crecimiento (pendiente) no es homogénea. El alumno lo nota, y obtiene de ello una conclusión sobre la esperanza de vida, aunque generalmente incorrecta. En general, se suele interpretar la tasa de crecimiento con el número de muertes en los países, confundiendo valor de la variable, tasa de crecimiento y frecuencia. Si la interpretación fuese correcta, implicaría un nivel de lectura más allá de los datos, pues se debe analizar diferentes elementos de la gráfica poniéndolos en relación.

En el caso de EGO se indica el intervalo de mayor pendiente (donde mayor número de países tiene esa esperanza de vida) refiriéndose a que hay más muertes a esa edad, lo cual corresponde a la misma idea. En el segundo ejemplo, se concluye erróneamente que en el intervalo de mayor pendiente se encuentra la moda de la esperanza de vida. Esta categoría no aparece en Arteaga (2011):

> Según la pendiente del gráfico podemos ver que de 45 a 65 años no se muere mucha gente; pero de 70 a 75 años, al ser la pendiente más pronunciada, indica que se muere mucha gente en este intervalo. (EGO)
>
> Desde la primera gráfica observamos que la mayor diferencia se tiene entre los 70-75 años, luego nos indica que la esperanza de vida está entre estos valores. (MJG)

Interpreta la simetría de la distribución. En el histograma presentado es visible la asimetría de la distribución de la esperanza de vida, puesto que el rango de valores por debajo de la moda es más amplio que el rango de valores que se sitúa por encima de ella. También esta interpretación supone una lectura más allá de los datos (Curcio, 1987). Algunos participantes lo comentan en sus interpretaciones del histograma:

> Es importante tener en cuenta que en el histograma, podemos ver que la gran mayoría de los países se encuentra por encima de los 65 años, luego la mayoría se encuentra en un nivel alto de esperanza de vida y la distribución no está centrada. (JG)

El mismo participante continúa interpretando la asimetría de la distribución, resalta los valores extremos del diagrama y su situación respecto a la caja:

> También en el 4º ya que la caja (entre el primer y tercer cuartil) se encuentra más cerca del máximo que del mínimo. También podemos ver esto con la posición de la mediana con respecto a los cuartiles, encontrándose más próximo al tercero que al primero. (JG)

5.2. Interpretación del histograma

Tras definir categorías de análisis y codificar datos, se estudió la distribución de categorías en la muestra de futuros profesores, presentando mediante diagramas de barra apilados el porcentaje de participantes que realizan en forma correcta o incorrecta cada una de las interpretaciones anteriores. Se presentan en el mismo orden las categorías en las Figuras 2, 3 y 4 para una mejor comparación de resultados de la interpretación de los tres gráficos. La suma total de los porcentajes es mayor a 100 porque algunos participantes realizan más de una interpretación del mismo gráfico.

La Figura 2 presenta resultados de la interpretación del histograma, con un gran porcentaje de interpretaciones correctas del gráfico, aunque una de las interpretaciones mayoritarias (63,1%) consiste en la descripción del gráfico o la explicación de su utilidad e incluso se encuentra un 18,5% de descripciones con alguna incorrección. Dicha interpretación únicamente supone un nivel de lectura de los datos.

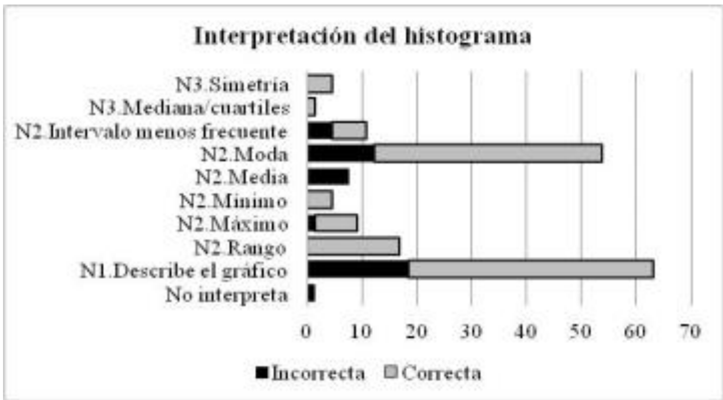


Figura 2. Porcentajes según interpretaciones de estadísticos en histograma

Es también frecuente la interpretación correcta de la moda. La moda (intervalo modal) es muy saliente en el histograma; sin embargo, por medio del histograma sólo obtenemos un valor aproximado y dicho valor variará si se cambia el ancho del intervalo de clase, por lo cual su estimación a partir de un histograma puede ser poco precisa (Batanero & Borovcnik, 2016). En la distribución de la esperanza de vida, el histograma proporciona una buena aproximación, que se observa al comparar la marca de clase del intervalo modal con el valor de la moda, dada en la tabla de resúmenes estadísticos. La coincidencia no fue resaltada por ningún participante. Estas son las dos principales interpretaciones, seguidas de la del rango (siempre correcta), el valor máximo y el intervalo menos frecuente (en estos dos casos con algún error). Todas ellas suponen un nivel de lectura entre datos. Por otra parte, la falta de simetría, que se aprecia en el histograma, es comentada por un 5% de participantes, que supondría un nivel de lectura más allá de los datos. Un estudiante interpreta la mediana y cuartiles conjuntamente, situándose también a este nivel de lectura.

5.3. Interpretación del diagrama acumulativo

La Figura 3 indica las interpretaciones de los futuros profesores del diagrama acumulativo. También aquí lo más frecuente es la descripción del gráfico (58,5% de los participantes; nivel de lectura de datos). Un 18,5% de futuros profesores incluyen algún error en la descripción; en particular, debido a la confusión entre frecuencia acumulada y frecuencia ordinaria, así como a la interpretación incorrecta de la variable representada (esperanza de vida) confundida por algunos como edad de muerte.

Es también frecuente la interpretación de la pendiente de la gráfica (44,7% de los participantes; lectura más allá de los datos). Hay un porcentaje del 18,5% de interpretaciones incorrectas de la pendiente debidas a la confusión entre frecuencia y valor de la variable al hacer esta interpretación, error que se ha descrito en otras investigaciones en educación estadística, como la de Cobo (2003).

Los participantes que describen el rango, al igual que en el histograma, lo hacen correctamente; no siempre sucede así al interpretar el máximo o mínimo porque confunden la variable con edad de muerte (esta confusión no ha afectado al rango, pues los estudiantes se limitan a decir que hay una variación de años, que puede referirse tanto a la variación de esperanza de vida, como variación en edad de muerte). Todas ellas suponen un nivel de lectura entre los datos. No aparece en el histograma la categoría “media”, ni la simetría pues es difícil de visualizarlos a partir de este gráfico.

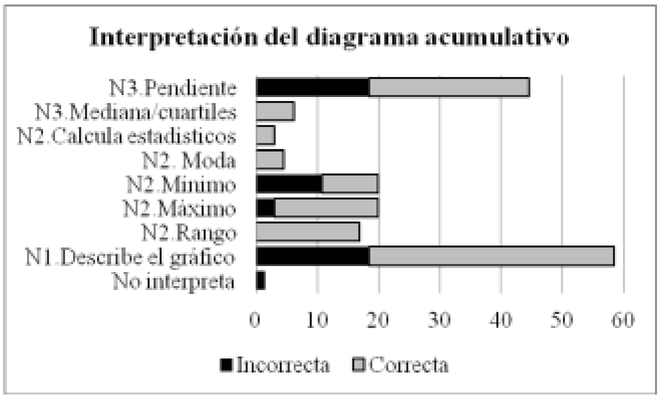


Figura 3. Porcentajes según interpretaciones de estadísticos en diagrama acumulativo

5.4. Interpretación del diagrama de caja

Los resultados de la interpretación del diagrama de caja se presentan en la Figura 4. En este caso, la interpretación más frecuente se centra en la mediana y los cuartiles, pues son los estadísticos más visibles en este tipo de gráfico; al relacionar varios estadísticos se trabaja en un nivel alto de lectura (más allá de los datos). Además, la interpretación es generalmente correcta (27,7% de participantes), aunque un 7,7% de los mismos realiza errores por interpretar que el porcentaje de caso entre los cinco puntos que definen el gráfico (mínimo, cuartiles, mediana y máximo) no corresponde exactamente a la misma frecuencia. Tanto esta interpretación como la de la simetría (10,7%), corresponden al nivel de lectura más allá de los datos.

Los que describen el gráfico (lectura de datos) son esta vez menos (29,3%), aunque la descripción es generalmente correcta. Tienen un porcentaje apreciable quienes señalan o calculan los estadísticos, sobre todo mínimo, máximo, mediana y cuartiles a partir del gráfico de caja (24,6) y siempre correctamente, aunque para esta gráfica supone un nivel inicial de leer los datos pues los estadísticos vienen dados por los extremos de la caja y bigotes. Otras interpretaciones como el máximo, mínimo (leer entre datos) tienen menor frecuencia. No obstante, este es el gráfico con mayor frecuencia del nivel de lectura más allá de los datos. Deducimos que la interpretación conjunta de resúmenes estadísticos se favorece en relación con los otros gráficos.

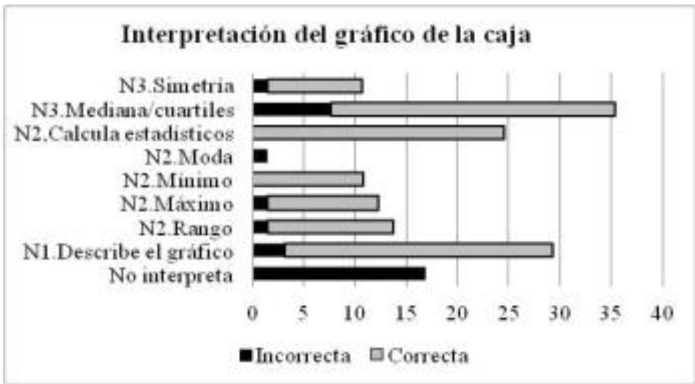


Figura 4. Porcentajes según interpretaciones de estadísticos en el gráfico de caja

5.5. Síntesis de resultados

Para comparar los resultados de las interpretaciones de los tres gráficos, la Tabla 2 presenta el valor medio y la desviación típica del número de interpretaciones correctas por participante y gráfico. En promedio, tenemos más de una interpretación correcta por participante, con resultados similares en los tres gráficos y valor moderado de la desviación típica, lo que indica homogeneidad del número de interpretaciones. Respecto a los errores de interpretación, hay más variedad. El número de errores es menor que el de interpretaciones correctas en cualquiera de los gráficos. Estas diferencias fueron todas estadísticamente significativas en el contraste *t* de diferencia de medias en muestras relacionadas ($p<0.01$ en los tres contrastes). Apenas hay errores en la interpretación del diagrama de caja; la mayor proporción aparece en el diagrama acumulativo e histograma, a pesar de ser gráficos conocidos por los participantes.

Tabla 2. *Media y desviación típica del número de interpretaciones correctas e incorrectas por alumno y gráfico*

	Correcta		Incorrecta		
Gráfico estadístico	Media	Desv. típica	Media	Desv. típica	Valor *t*
Histograma	1,30	,83	,45	,69	4,97
Polígono acumulativo	1,25	1,02	,52	,62	4,02
Diagrama de caja	1,46	,91	,19	,39	8,49

Nuestros resultados son mejores que los obtenidos por Arteaga (2011) en cuanto a la lectura de gráficos por parte de futuros profesores de Educación Primaria. En ese estudio fue muy pequeño el porcentaje de participantes que llega a interpretar correctamente gráficos más sencillos que estos (diagramas de barras y líneas), mientras que, en el estudio actual, la mayoría los interpreta en contexto y de un modo correcto. Aunque pocos alcanzan el nivel de lectura más allá de los datos, salvo en el gráfico de caja, muchos llegan al nivel de leer entre datos al interpretar al menos un estadístico en cualquiera de los gráficos. También este resultado mejora los de Arteaga (2011).

6. Actividades formativas

En una sesión posterior a la recogida de datos se organizó un debate de las interpretaciones realizadas con los futuros profesores, llegando a un acuerdo en que el diagrama acumulativo es el más sencillo de interpretar de los tres gráficos. Los participantes llegaron a reconocer que el diagrama acumulativo informa del porcentaje de países por debajo de un cierto valor para la variable esperanza de vida, en el conjunto de países de la muestra. El formador recordó que el gráfico permitirá situar cualquier país en su percentil, en función de la esperanza de vida, usando el caso de la esperanza de vida en España para situar a nuestro país en esta variable. Resaltó que la frecuencia acumulada es una función creciente, siendo más acusado el crecimiento en el intervalo de edad de 70 a 80 años, que en el resto de intervalos.

El formador recordó que el histograma proporciona información del número de países, según su esperanza de vida, y diferentes intervalos de valores. Los participantes reconocen que permite deducir fácilmente el intervalo de edad modal, que se sitúa alrededor de los 75 años; también llegan a reconocer que la moda puede variar al cambiar los intervalos. Algunos participantes observan que la distribución de la variable es asimétrica, con cola a la izquierda, y aunque se pudiera observar esta característica al comparar media y mediana de la tabla, se visualiza mucho mejor en el histograma. Algunos futuros profesores del primer año preguntan en qué intervalo se debe incluir un valor que coincide con el extremo del intervalo. El formador recuerda que puede haber diferentes criterios, aunque usualmente se colocaría en el intervalo siguiente donde coincide con el extremo inferior. Se continúa la discusión del gráfico de caja que, por un lado, indica que no hay valores atípicos, y, por otro, divide la población en cuatro partes de igual número de efectivos. Igualmente permite observar el amplio rango de variación de esta variable, donde el 75% de los países posee una esperanza de vida inferior a los 76,1 años de edad (Q3), concentrándose entre los 64,2 y 76,1 el 50% del total de países de la muestra. Llegados a este punto, un participante dice no recordar el significado de la mediana, lo cual es aclarado por sus compañeros.

7. Discusión e implicaciones para la formación de profesores

La investigación desarrollada proporciona nuevos resultados sobre el conocimiento matemático común, sobre los gráficos estadísticos y algunos resúmenes estadísticos en una muestra de futuros profesores de Educación Secundaria y Bachillerato, complementando, de este modo, los antecedentes sobre el tema. A pesar del alto índice de interpretaciones correctas de los gráficos, en la mayor parte de los casos las interpretaciones suponen un nivel inicial (leer los datos) o intermedio (leer entre los datos) de comprensión gráfica. Únicamente en el gráfico de la caja una proporción algo mayor de participantes llega al nivel de lectura más allá de los datos.

Los resultados muestran que algunos participantes no comprenden significativamente algunos resúmenes estadísticos que utilizan en sus interpretaciones o tienen dificultad en comprender qué aportaba alguno de los estadísticos sobre la distribución de la variable analizada. No obstante, este porcentaje es menor del encontrado en Arteaga (2011), Estrada et al. (2004) u Ortiz y Font (2014) con futuros profesores de primaria. Aunque algunos errores pueden venir motivados por el hecho de trabajar con datos agregados (la variable es una media ponderada de datos simples), otros son errores conceptuales. Estos errores son los siguientes:

- Confusión entre promedio y valor de la variable, o entre frecuencia con valor de la variable, errores ya mostrados en Cobo (2003) y Ortiz y Font (2014).
- Dificultad de comprensión de la idea de frecuencia acumulada, no poniéndola en relación con el valor de la variable al que corresponde dicha frecuencia. Igualmente se confunde frecuencia absoluta con porcentaje o confundir frecuencias acumuladas y frecuencias ordinarias.
- Confusión entre moda y media y no apreciar el efecto de los valores atípicos sobre la media, en coincidencia con Estrada et al. (2004) y Ortiz y Font (2014).
- Interpretación incorrecta del diagrama de la caja, como en Pfannkuch (2006).
- No considerar iguales el porcentaje de casos comprendidos entre mínimo, cuartiles, mediana y máximo.
- Interpretación incorrecta de la pendiente del diagrama acumulativo.
- Errores en la estimación de algunos estadísticos a partir de las gráficas; dichos errores no eran esperados, pues los estadísticos de la distribución se proporcionaban en una tabla, pero algunos participantes no los tienen en cuenta.

Finalmente un error que puede venir influido por la variable utilizada ha sido la dificultad al interpretar los estadísticos en el contexto de la variable, ya que un alto porcentaje de participantes conocen el significado de un estadístico, pero no integran el contexto de la variable para interpretar su distribución. Por ejemplo, esto ocurre al interpretar la distribución de países como distribución de personas o al confundir la esperanza de vida con la edad de muerte. Sin embargo, este resultado también se ha mostrado en Arteaga (2011), que trabaja con datos no agregados, por lo que puede deberse a falta de competencia en la habilidad de modelización.

Estos resultados son preocupantes. Se espera que el futuro profesor enseñe estos conceptos y desarrolle en sus estudiantes la capacidad de interpretar gráficos y estudios estadísticos. Uno de los estándares de aprendizaje evaluables para el cuarto curso de la Educación Secundaria Obligatoria, en las modalidades orientadas a la enseñanza académica y a las enseñanzas aplicadas (MECD, 2015, pp. 398 y 407) es: "Interpreta un estudio estadístico a partir de situaciones concretas cercanas al alumno". El futuro profesor ha de ser capaz de contextualizar la información resumida en cada gráfico y los resúmenes estadísticos que se deducen para ayudar al alumno a interpretar.

Concluimos, que es importante completar la formación de los futuros profesores de Educación Secundaria y Bachillerato sobre gráficos y resúmenes estadísticos, con talleres y actividades similares a las descritas aquí. Las actividades formativas en este trabajo fueron útiles para desarrollar el conocimiento estadístico en los participantes, además de evaluar sus conocimientos iniciales. El taller resultó interesante a los futuros profesores, que pudieron razonar sobre una variable relevante en la sociedad. Al trabajar con fuentes internacionales aumentó el interés de los participantes y su percepción de la utilidad de la estadística. A la vez, la discusión posterior de las soluciones permitió incrementar su conocimiento didáctico sobre el tema.

Agradecimientos

Proyectos EDU2013-41141-P (MEC) y EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Adler, J., & Venkat, H. (2014). Mathematical knowledge for teaching. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 385-388). Dordrecht: Springer.

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Trabajo de Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: the unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: AERA.

Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Rotterdam: Sense Publishers.

Batanero, C., Arteaga, P., & Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(1), 141-154.

Bertin, J. (1967). *Semiologie graphique*. París: Gauthier-Villars.

Blömeke, S., Hsieh, F. J., Kaiser, G., & Schmidt, W. (2014). *International perspectives on teacher knowledge, beliefs and opportunities to learn*. Dordrecht: Springer.

Bruno, A., & Espinel, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemáticas*, *7*, 57-85.

Burgess, T. (2002). Investigating the "data sense" of preservice teachers. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1-6). Cape Town: IASE.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria.* Trabajo de Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Colle, R. (2011). *El análisis de contenido de las comunicaciones.* Tenerife: Sociedad Latina de Comunicación Social.

Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(5), 382-393.

Estrada, A., Batanero, C., & Fortuny, J. M. (2004). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental en profesores en formación. *Educación Matemática, 16*, 89-112.

Even. R., & Ball, D. (Ed.) (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study*. New York: Springer.

Friel, S., Curcio, F., & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 124-158.

Gal, I., & Murray, S. T. (2011). Responding to diversity in users' statistical literacy and information needs: Institutional and educational implications. *Statistical Journal of the International Association for Official Statistics*, *27*(3-4), 185-195.

González, M. T., Espinel, M. C., & Ainley, J. (2011). Teachers' graphical competence. En C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education* (pp. 187-197). Dordrecht: Springer.

Groth, R. E., & Bergner, J. A. (2006). Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of mean, median, and mode. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*, 37-63.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*, 372-400.

Kemp, M., & Kissane, B. (2010) A five step framework for interpreting tables and graphs in their contexts. En C. Reading (Ed.), *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1-6). Ljubljana: ISI/IASE.

Krippendorff, K. (2013). *Content analysis: an introduction to its methodology*. London: Sage

Llinares, S., & Krainer K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds) *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 429- 459). Rotterdam: Sense Publishers.

MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.

MECD (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.

Monteiro, C., & Ainley, J. (2006). Student teachers interpreting media graphs. En A. Rossman, & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1-6). Salvador de Bahía: ISI/IASE.

Ortiz, J. J., & Font, V. (2014). Pre-service teachers' common content knowledge regarding the arithmetic mean. *REDIMAT*, *3*(3), 192-219.

Pfannkuch, M. (2006). Comparing box plot distributions: a teacher's reasoning. *Statistics Education Research Journal*, *5*(2), 27-45.

Pfannkuch, M., & Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. En J. B. Garfield & D. Ben-Zvi (Eds.). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 17-46). Dodrecht: Springer.

Remillard, J. T., Herbel-Eisenmann, B. A., & Lloyd, G. M. (2011). *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction*. London: Routledge.

Schield, M. (2011). Statistical literacy: A new mission for data producers. *Statistical Journal of the IAOS*, *27*(3-4), 173-183.

Sharma, S. (2013). Assessıng students' understandıng of tables and graphs: implıcatıons for teachıng and research. *International Journal of Educational Research and Technology*, 51-70.

Shulman (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Speer, N. M., King, K. D., & Howell, H. (2015). Definitions of mathematical knowledge for teaching: using these constructs in research on secondary and college mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *18*(2), 105-122.

Tatto, M. T., & Senk, S. (2011). The mathematics education of future primary and secondary teachers: methods and findings from the Teacher Education and Development Study in Mathematics. *Journal of Teacher Education*, *62*(2), 121-137.

Vásquez, C., & Alsina, A. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: un análisis global desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática 7*, 27-48.

Referencias de los autores

María M. Gea, Universidad de Granada (España). mmgea@ugr.es

Pedro Arteaga, Universidad de Granada (España). parteaga@ugr.es

Gustavo R. Cañadas, Universidad de Granada (España). grcanadas@ugr.es

Prospective secondary school teachers' interpretation of statistical graphs

María M. Gea, Universidad de Granada (España)

Pedro Arteaga, Universidad de Granada (España)

Gustavo R. Cañadas, Universidad de Granada (España)

Graphical language is essential in organising and analysing data. It is a tool for transnumeration, a basic component in statistical reasoning consisting of the production of information not available in raw data with a change of representation. This topic is included since the first grade of primary education in all educational levels in Spain and in particular in secondary education and high school. Curricular guidelines suggest that teachers should promote the students' work with statistical projects and real data, as well as interpretative activities. The aim of this paper is the assessment of the interpretation of some statistical graphs carried out by pre-service mathematics teachers in the Masters of Secondary and High School Teacher Education. To this purpose, we analyse the responses of 65 students to three tasks in which they have to interpret the histogram, cumulative diagram and box plot for the distribution of life expectation in 193 countries. The activity was part of a workshop based on rich and authentic social data downloaded from the United Nations Human Development Reports web server (http://hdr.undp.org/en/data), which can be used by teachers with their own students. Participants had to produce a written report with their interpretations of graphs. We categorized their interpretations taking into account the reading level in the classification by Curcio (1987), and then, took into account the statistical summaries and elements of the graphs under interpretation. Although most of the interpretations were correct, the analysis of responses reveaed that few of them reached the upper readings levels described by Friel, Curcio and Brigth (2001). Moreover, responses revealed some errors in the understanding of important statistical concepts. All this should be considered in designs of mathematics teacher education.

AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática – 2017, Nº 12, 39 - 57

Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica

Víctor Larios Osorio, Universidad Autónoma de Querétaro (México)

Luis Roberto Pino-Fan, Universidad de Los Lagos (Chile)

Noraísa González González, Escuela Secundaria General Mariano Matamoros (México)

Recibido el 27 de noviembre de 2016; aceptado el 6 de septiembre de 2017

Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica

Resumen

La validación del conocimiento construido en Matemáticas es una parte epistemológicamente importante en el proceso metodológico que se conoce como demostración matemática. Su enseñanza incluye procesos complejos y obstáculos que aparecen a lo largo del desarrollo cognitivo del individuo. Con el uso de Software de Geometría Dinámica (SGD), es posible diseñar actividades orientadas a promover la producción de conjeturas y justificaciones en ambientes geométricos, y que facilitarían su aprendizaje. En este trabajo presentamos los tipos de esquemas de argumentación de alumnos de Secundaria (14-15 años) cuando trabajan en el desarrollo de justificaciones matemáticas a partir de exploraciones. Se muestra cómo los alumnos centran su atención en características figurales que resultan irrelevantes en procesos de demostración deductiva. Asimismo, se discute el tipo de propuestas didácticas que deben diseñarse e implementarse para facilitar en los alumnos el desarrollo de esquemas de argumentación analíticos que implican deducciones.

Palabras clave. Geometría dinámica, justificaciones geométricas, aprendizaje de la demostración.

Esquemas argumentativos de estudantes do ensino médio em ambientes de geometria dinâmica

Resumo

A validação do conhecimento construído em matemática é uma parte epistemologicamente importante no processo metodológico e é conhecida como a prova matemática. Seu ensino inclui processos complexos e obstáculos que aparecem ao longo do desenvolvimento cognitivo do indivíduo. Usando software de geometria dinâmica (SGD), é possível projetar attividades para promover a produção de conjecturas e justificaçãos em atividades ambientes geométricos e que facilitam a sua aprendizagem. Neste artigo, apresentamos os tipos de esquemas de argumentação de estudantes do ensino médio (14-15 anos), quando trabalham no desenvolvimento de justificativas matemáticas das verificações. Ele mostra como os alunos centrar a sua atenção sobre características figurativas que são irrelevantes no processo da prova dedutiva. Além disso, o tipo de propostas educacionais de ser concebido e implementado para facilitar os alunos no desenvolvimento de esquemas de raciocínio analítico envolvendo deduções é discutido.

Palavras chave. Geometria dinámica, justificaçãos geométricas, aprendizagem de prova.

Para citar: Larios Osorio, V., Pino-Fan, L. R. y González González, N. (2017). Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *12*, 39-57.

Argumentative schemes of middle school students in dynamic geometry environments

Abstract

The validation of mathematical knowledge is an epistemologically important part of the methodological process known as mathematical proof. Its teaching includes complex processes and obstacles that appear along the cognitive development of the individual. The use of Dynamic Geometry Software (DGS) makes possible to design activities aimed at promoting the production of conjectures and justifications in geometric environments that facilitate learning. In this paper, we present the types of argumentation schemes of high school students (14-15 years) when they are working on the development of mathematical justifications from explorations. It is shown how students focus their attention on figural features that are irrelevant in the process of deductive proof. We also discuss the type of educational proposals to be designed and implemented to facilitate students in developing analytical reasoning schemes involving deductions.

Key words. Dynamic geometry, geometric justifications, learning of proof.

Schémas argumentatifs élèves du secondaire dans environnements de géométrie dynamique

Résumé

La validation des connaissances accumulées en mathématiques est une partie épistémologiquement importante dans le processus méthodologique et est connu comme la preuve mathématique. Son enseignement inclut des processus complexes et les obstacles qui apparaissent le long du développement cognitif de l'individu. Avec l'utilisation de Software pour Géométrie Dynamique (SGD), il est possible de concevoir visant à promouvoir la production de conjectures et de justifications dans les activités des environnements géométriques et qui facilitent leur apprentissage. Dans cet article, nous présentons les types de schèmes d'argumentation des élèves du secondaire (14-15 ans) lors du travail sur le développement des justifications mathématiques des analyses. Il montre comment les élèves se concentrent leur attention sur les caractéristiques figurées qui ne sont pas pertinents dans le processus de la preuve déductive. En outre, le type de propositions éducatives à être conçu et mis en œuvre pour faciliter les étudiants dans le développement de systèmes de raisonnement analytique impliquant des déductions est discutée.

Paroles clés. Géométrie dynamique, justifications géométriques, apprentissage du preuve.

1. Introducción

El uso de las computadoras en ambientes educativos es cada vez más amplio. Se hace necesario pensar en estrategias que permitan integrarlas en el proceso didáctico de una manera apropiada y eficaz. La integración en el aula no es trivial ni transparente ya que implica un trabajo del alumno por aprender a usar la herramienta y otorgarle un significado y uso adecuados en el proceso de internalización (Bartolini & Mariotti, 2008; Rabardel, 2002), y del profesor por estudiar los fenómenos asociados al uso de la herramienta (Hitt, Cortés, & Rinfret, 2012). Si bien estas herramientas pueden ayudar a resolver (o disminuir) algunos problemas, involucran otros problemas que tienen que ser tomados en cuenta. En particular, el Software para Geometría Dinámica (SGD) se ha mostrado como mediador semiótico entre conocimiento geométrico y pensamiento del alumno (Larios & González, 2010): influye en el aprendizaje de la Geometría y conlleva la emergencia de fenómenos cognitivos específicos (Larios, 2005). El SGD es un software diseñado para el estudio, el aprendizaje y la enseñanza de la Geometría en ambientes dinámicos que consideran tres rasgos (Finzer & Jackiw, 1998): 1) la manipulación es directa; 2) el movimiento es continuo; y 3) el ambiente es inmersivo. En ese trabajo se ha usado la versión de SGD denominada Cabri.

El SGD ha resultado ser una herramienta útil para la enseñanza y aprendizaje de la Geometría por medio del diseño de actividades que permitan la exploración y la observación de propiedades que pueden llevar a la producción de justificaciones deductivas que conduzcan a la construcción de la demostración geométrica (Fiallo, Camargo, & Gutiérrez, 2013, p. 194). Esto es necesario para el aprendizaje matemático de los alumnos por la importancia que tiene la demostración en la ciencia matemática y en su desarrollo cognitivo (Bloch, 2000; Rav, 1999). Sin embargo este mismo aprendizaje presenta obstáculos, tanto desde el punto de vista de la demostración en sí, como del estudio de los objetos geométricos, lo que lleva a ahondar en el estudio sobre su aprendizaje y la problemática relacionada, tal como señalan Fiallo et al. (2013).

En este artículo presentamos resultados de un estudio con alumnos de Secundaria (14 y 15 años) en México, en los que se muestran los tipos de justificaciones que proponen al involucrarse en actividades diseñadas para construir demostraciones en ambientes de Geometría Dinámica. Estos resultados evidencian cómo, tras más de una década en los ambientes escolares mexicanos, los alumnos proponen diversas maneras de justificar sus observaciones que no necesariamente se aproximan a la idea de demostración deductiva. Lo anterior proporciona información que puede ser aprovechada para orientar el diseño de propuestas didácticas para la enseñanza de la demostración matemática como medio de validación del conocimiento.

El artículo se ha estructurado en cinco partes. En la primera se presenta un contexto general del papel de la Geometría en la escuela Secundaria, considerando tres aspectos relacionados con visualización, razonamiento y realización de construcciones. En las dos secciones siguientes se describen las condiciones del experimento de enseñanza: en primer lugar se presenta el contenido y la estructuración de las actividades diseñadas para el experimento en el que participaron los alumnos; y en segundo lugar se describe el grupo de alumnos participantes. La penúltima sección exhibe los resultados más representativos del trabajo para llegar a las conclusiones.

2. Geometría en la escuela Secundaria

La necesidad de la enseñanza de la Geometría desde los primeros años escolares responde en buena medida al papel que esta rama de las matemáticas desempeña en la vida cotidiana. Un conocimiento geométrico básico permite ubicarnos en el espacio físico que nos rodea, calcular distancias, distinguir formas y tradicionalmente se ha aprovechado como el campo para el desarrollo del pensamiento lógico deductivo en el ambiente escolar (Duval, 2005). En México se plantea curricularmente en Secundaria con la finalidad de que el alumno observe propiedades geométricas, lleve a cabo construcciones geométricas, proponga argumentos y justificaciones de los hechos observados y de las construcciones realizadas, utilizando propiedades de una manera tendiente a la deducción (SEP, 2011, p. 23). Esta visión coincide en parte con los tipos de procesos cognitivos que Duval (1998, p. 38) considera que involucra la Geometría: visualización, procesos de construcción con herramientas y razonamiento. Tomaremos esto como base para desarrollar a continuación el marco de referencia teórico.

2.1. Visualización

Una parte importante del estudio de la Geometría y de las Matemáticas en general es lo que se percibe por medio de la vista y las imágenes mentales que se producen a partir de ello. Lo primero se relaciona con la visión y lo segundo con la visualización. Se trata de procesos diferentes (Duval, 2003) que conllevan diversas dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas (Gonzato, 2013). La confusión entre los dos procesos contribuye a que se crea que la representación (en papel o computadora) es el objeto geométrico que se está estudiando. No obstante, pareciera que esta confusión es "necesaria" para el aprendizaje, pues si separamos al objeto geométrico de sus representaciones, no tenemos manera de acceder a él, pero si no lo separamos corremos el riesgo de confundir ambas cosas (Duval, 2006). En términos semióticos la representación (*dibujo*) sirve al individuo para acceder al objeto (*geométrico*) a través del otorgamiento de *significados*, todo esto dentro de un contexto que le da sentido. Laborde y Capponi (1994) también hacen esta diferenciación pero al *significado* lo denominan figura:

> Consiste en el emparejamiento de un referente dado a todos sus dibujos, es entonces definida como el conjunto de parejas formadas por dos términos, el primer término es el referente, el segundo es uno de los dibujos que lo representan que es tomado del universo de todos los dibujos posibles del referente. (p. 168)

Establecer esta diferencia entre estos tres elementos permite aprovechar como soporte la *Teoría de los Conceptos Figurales* de Fischbein (1993), donde los objetos geométricos son una mezcla de aspectos *figurales* (en referencia a características ligadas con la representación y que corresponden al *dibujo*) y de aspectos *conceptuales* (en referencia a las restricciones lógico teóricas del *objeto geométrico*), por lo que son precisamente *conceptos figurales*: "Los objetos de investigación y manipulación en el razonamiento geométrico son entonces entidades mentales, llamadas por nosotros conceptos figurales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición y tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales tales como idealidad, abstracción, generalidad y perfección" (p. 143). Los *conceptos figurales* son el equivalente de las *figuras* en el sentido que proponen Laborde y Capponi (1994).

2.2. Procesos de construcción con Geometría Dinámica

En cuanto a los procesos de construcción, en este trabajo el enfoque está centrado en la Geometría Dinámica utilizando la computadora como herramienta. El software que se utiliza (SGD) se caracteriza por la posibilidad de manipulación directa y continua de representaciones geométricas. Ello permite el diseño de ambientes de exploración y observación de muchos casos que, de otra manera, quedan reservados a personas con elevada capacidad de visualización. Este tipo de software permite diseñar actividades y ambientes que ayuden a los alumnos a estudiar situaciones matemáticas sin tener que hacer mucho énfasis en procesos mecánicos y de graficación que se le pueden dejar a la herramienta computacional. Según Ursini (2006, p. 25): "las matemáticas escolares dejan así de ser una simple mecanización de procedimientos y se vuelven, más bien, un espacio para la reflexión y el desarrollo de conceptos".

La principal característica del SGD es el dinamismo que se refleja en la operación de *arrastre*, que permite los rasgos de una manipulación directa y continua de objetos matemáticos (Finzer & Jackiw, 1998). Esta operación, como elemento de una herramienta que funciona como mediador semiótico entre objetos geométricos e individuos, no siempre cumple con la función para la cual fue concebida en términos de un experto en Geometría, pero puede ser utilizado como medio para que el alumno siga un proceso no necesariamente lineal (avances y retrocesos), que le lleve a desarrollar habilidades de razonamiento y de observación al permitir diferenciar progresivamente entre *dibujo* (representación) y *figura* (relación conceptual entre dibujo y objeto geométrico). Todo esto debe ser considerado para diseñar actividades o ambientes utilizando SGD, pues su uso cambia las condiciones en el proceso de aprendizaje y, por tanto, de enseñanza. Problemas que vale la pena ser retomados en clase con la tecnología papel y lápiz se vuelven triviales utilizando software.

2.3. Razonamiento, argumentaciones y justificaciones

El tercer proceso mencionado por Duval (1998), el razonamiento, se manifiesta en el estudio de la Geometría, en el desarrollo de justificaciones que lleven a la construcción de demostraciones. Para el nivel Secundaria los alumnos podrían comenzar a desarrollar demostraciones deductivas en el sentido matemático, pero la formación previa no aporta un soporte firme. En este trabajo se considera el término ‘demostración’ en un sentido pragmático de realizar justificaciones que permitan validar el conocimiento matemático, haciendo referencia a un contexto escolar específico. Esto implica poner el acento en aspectos que no sólo están relacionados con el producto y su formalismo, sino en el proceso mismo de construcción. Así, conviene determinar las características de una justificación para que pueda ser considerada una demostración en la escuela. Se deben considerar los aspectos semánticos mencionados, pero también ampliar las características a aspectos sintácticos de escritura y expresión. Por ello, consideraremos que en el contexto escolar la demostración matemática es una serie de argumentos matemáticos que (González & Larios, 2012): hacen referencia a un hecho matemático; tienen como función primaria la de convencerse a sí mismo y a otros, para proporcionar una explicación del hecho matemático; se comunican mediante formas conocidas por los miembros de la comunidad escolar o, en su defecto, que pueden ser aprendidas; se basan en enunciados aceptados en la comunidad escolar explícita o implícitamente; y se organizan según formas de razonamiento válidas o correctas, en particular el razonamiento deductivo que provee argumentos deductivos.

Se podría esperar que las justificaciones que cuentan con estas características puedan ser producto de exploraciones u observaciones. Se ha visto que cuando los alumnos exploran situaciones, plantean conjeturas y luego construyen demostraciones, aparece una unidad cognitiva en el proceso. A esta noción Boero, Garuti y Mariotti (1996) la denominaron *unidad cognitiva de teoremas*. Con ella se propone que la construcción de la demostración involucra un proceso continuo, en términos cognitivos, en el que se pasa por varias etapas de una manera no necesariamente lineal. Estas etapas comienzan con una *exploración de una situación* dada, tras la observación se *produce una conjetura* o el planteamiento de una propiedad, en busca de una justificación al respecto se realiza *otra exploración* y se termina encadenando argumentos que permitan *demostrar* (validar o justificar) la propiedad observada. Según estos autores, el planteamiento de actividades basándose en esta noción permite a los alumnos construir demostraciones que bien pueden cumplir con la caracterización mencionada, pues “su razonamiento deductivo comparte muchos aspectos con la construcción de una prueba matemática. Además, la actividad completa ejecutada por los estudiantes comparte muchos aspectos con el trabajo de los matemáticos cuando producen conjeturas y pruebas en algunos campos matemáticos” (Boero et al., 1996, p. 126). Estas características resultaron adecuadas para diseñar actividades para trabajar con alumnos del nivel Secundaria, las cuales se describirán más adelante.

Harel y Sowder (1998) y Harel (2007) propusieron una categorización de los esquemas de prueba individuales al relacionar la demostración con la idea de justificación como un proceso que implica dos aspectos: *convencimiento* o *determinación* como proceso para eliminar la dudas propias acerca de la verdad de una afirmación, y *persuasión* como proceso para convencer a otros sobre la verdad de esa afirmación. Flores (2007) y Flores, Gómez y Flores (2010) adaptaron dicha propuesta al estudio de argumentos producidos por profesores de bachillerato cuando justificaron soluciones de problemas geométricos. Observaron similitudes en las maneras de argumentar de los profesores de bachillerato en México con respecto a los estudiantes del estudio de Harel y Sowder (1998), pero hablaron de *esquemas de argumentación*, en lugar de esquemas de prueba, por ser "el conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema" (Flores, 2007, p. 71). Considerando lo anterior, Flores et al. (2010, p. 28) han propuesto la siguiente categorización de esquemas de argumentación:

- Autoritarios. Las argumentaciones se apoyan en las afirmaciones hechas por alguna *autoridad*, e.g. libro de texto, instructor del curso, compañero.
- Simbólicos. El estudiante utiliza un lenguaje matemático y símbolos de una manera superflua y poco consistente, sin llegar a concluir. En este tipo de esquemas pueden mencionar conceptos poco claros o inventados.
- De recuento fáctico o simplemente fácticos. En los que estudiante o profesor hace un recuento de lo hecho a manera de explicación o justificación de algún resultado, y expone una serie de pasos a manera de algoritmo.
- Empíricos. El estudiante se apoya en hechos físicos o en un dibujo. El dibujo o hecho físico es un argumento por sí mismo y no un apoyo para el argumento.
- Analíticos. El estudiante sigue una cadena deductiva sin por ello llegar a una conclusión válida. Las proposiciones siguen estructuras del tipo *si-entonces*.

Estas categorías ayudaron a estudiar los argumentos que formularon los alumnos considerados en este trabajo en ambientes de Geometría Dinámica.

3. Actividades del experimento de enseñanza

Las tareas que se diseñaron están relacionadas con la geometría del triángulo, en particular las medianas, el baricentro, el triángulo medial y la relación entre estos elementos. Se aprovechó para explorar la circunferencia como lugar geométrico. Con las tareas se buscó el uso explícito de habilidades de observación de propiedades, de visualización de objetos geométricos y de razonamiento deductivo. Las dos primeras habilidades pueden permitir al alumno, llevar a cabo observaciones de propiedades o rasgos invariantes de una situación u objeto. En cuanto a la última, es posible que este tipo de razonamiento permita establecer relaciones causa efecto en los fenómenos de la vida diaria, de la ciencia y de la escuela. Así mismo, cada tarea buscaba la observación de propiedades y la justificación de éstas o de procedimientos, por lo que se tomó como base la noción de *unidad cognitiva de teoremas*. La secuencia fue la siguiente:

- Planteamiento de una situación. Se realiza por medio de una consigna textual y generalmente con un archivo nuevo, aunque puede iniciarse con un archivo construido. Se presentan preguntas que permiten iniciar el trabajo de exploración.

- Construcción de la situación. A partir de la situación planteada se realiza la construcción utilizando el software a fin de llevar a cabo exploraciones. Es posible que este paso, el anterior y el siguiente se fusionen si se realiza la construcción geométrica a la vez que el planteamiento y la exploración inicial.

- Exploración (dirigida) de la situación. Aprovechando la construcción y el software se inicia una exploración por parte de los alumnos, dirigida a través de preguntas escritas y la intervención del investigador que puede orientar a través de supuestos y preguntas.

- Explicitación de los alumnos de propiedades observadas. El propósito de la exploración es que los alumnos observen propiedades geométricas específicas a fin de proponer las justificaciones relacionadas, por ello es necesario que expliciten esas propiedades y no se queden como una suposición por parte del investigador. Por medio de preguntas y consignas en las hojas de trabajo se pide esto, mientras que el investigador puede preguntar, a modo de entrevista a fin de clarificar respuestas.

- Justificación de propiedades observadas. En algunas actividades se pide a los alumnos justificar propiedades que hayan observado. Se busca con el diseño de las actividades que las justificaciones avancen hacia una estructura deductiva. La interacción grupal se permite y el trabajo se realiza en parejas.

- Conclusión. Se proporciona en las hojas de trabajo una breve conclusión de las propiedades que se pretenden estudiar.

En ocasiones las etapas de *exploración*, *explicitación de propiedades* y *justificación*, se repiten en una sola actividad debido a la intencionalidad de cada una. Generalmente esto ocurre cuando se propone la exploración de varias propiedades relacionadas en una misma actividad, o la exploración de una propiedad que no resulta evidente y que necesita de un proceso progresivo de acercamiento. La Figura 1 indica la organización general y las relaciones mutuas de las seis actividades diseñadas.

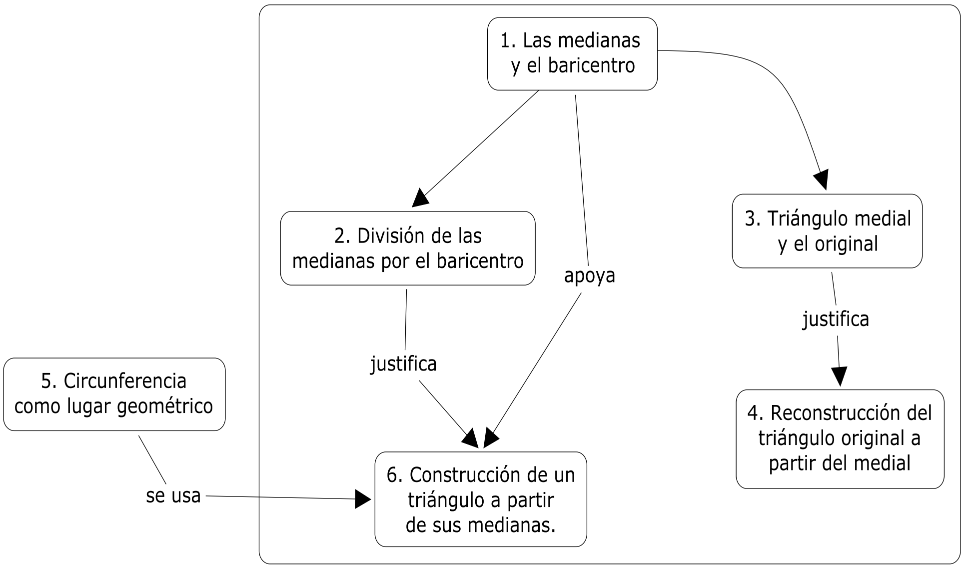


Figura 1. Relación entre las actividades propuestas

Actividad 1: Las medianas. En esta actividad orientada a la construcción de las medianas del triángulo y su concurrencia, así como la relación de éstas y el baricentro, los alumnos construyeron un triángulo y sus medianas, utilizando la opción *punto medio* para los lados del triángulo. Aprovechando el software se les pidió que modificaran el triángulo (arrastrar los vértices) y observaran lo que ocurre con las medianas, con el fin de que concluyeran la concurrencia de éstas. Con la opción para crear puntos de intersección crearon el baricentro, para lo cual debieron considerar el número de medianas necesarias. Se les preguntó si siempre hay concurrencia y que justificaran sus respuestas. Incluso que determinaran si dicha propiedad ocurre sin importar el tamaño o la forma del triángulo. Dado que el software sólo puede construir puntos de intersección de dos objetos lineales y no de tres, los alumnos determinaron cuántas medianas son suficientes para poder determinar el baricentro con el software.

Actividad 2: División de las medianas por el baricentro. Esta actividad se pensó para estudiar la propiedad en que el baricentro divide a las medianas en una razón constante 1:2, de manera que los alumnos formularan una justificación. Construyeron las medianas y el baricentro de un triángulo, tomaron medidas y modificaron las posiciones de los vértices para establecer la característica invariante que es la razón. Todo ello acompañado con el apoyo del profesor y la comunicación entre alumnos.

Actividad 3: El triángulo medial. En esta actividad se estudiaron las propiedades del triángulo medial y sus relaciones geométricas con el triángulo original a fin de establecer propiedades de paralelismo. Los alumnos construyeron un triángulo *ABC*, sus medianas (*AD*, *BE* y *CF*) y el baricentro (*G*). Después construyeron el triángulo *A*'*B*'*C*' con vértices en los puntos medios de *AG*, *BG* y *CG* (Figura 2). Midieron las longitudes de los lados y se buscó mediante orientación dirigida que aplicaran criterios de semejanza para establecer el paralelismo entre lados correspondientes de los diversos triángulos. Pudieron determinar la semejanza entre los triángulos construidos.

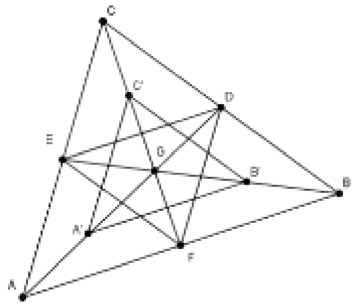


Figura 2. Construcción de la actividad 3

Actividad 4: El triángulo original y el medial. Con esta actividad se pretendió que los alumnos aprovecharan propiedades utilizadas en actividades previas, para que proporcionaran justificaciones fundadas en dichas propiedades para reconstruir un triángulo a partir de un triángulo medial dado. Comenzaron construyendo un triángulo *ABC* y luego un punto P_0 cualquiera. A partir de lo anterior se construyó P_1 como el punto reflejado con respecto a *A* y así P_0, *A* y P_1 están alineados y se crea el segmento que los contiene (Figura 3). Sigue el mismo procedimiento reflejando P_1 con respecto a *C* y obtener P_2, y finalmente P_3 reflejando el anterior con respecto a *B*. A los alumnos se pidió que exploraran las condiciones del triángulo original (*ABC*), los puntos construidos (P_0, P_1, P_2 y P_3) y los segmentos que los unen, con el fin de lograr que P_0 y P_3 coincidieran y se formara un triángulo. Observaron que los lados correspondientes de ambos triángulos son paralelos entre sí, además de que los vértices del triángulo original son los puntos medios del triángulo recién construido. Esta actividad implicó el uso de procesos de razonamiento que involucran la previsión en el resultado y las condiciones necesarias para que ocurra algo a partir de propiedades. También implicó el uso de procesos de visualización, porque se necesitó considerar construcciones auxiliares que, al no estar visibles, constituyeron una dificultad.

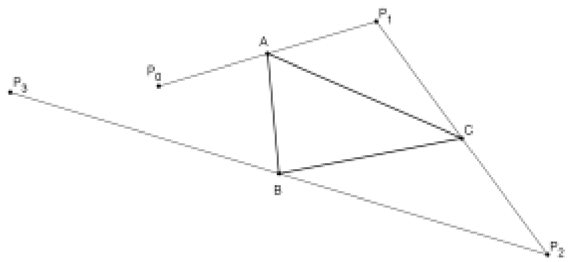


Figura 3. Construcción de la actividad 4

Actividad 5: La circunferencia como lugar geométrico. Esta actividad se dirigió a la aprehensión de la circunferencia como lugar geométrico de puntos equidistantes a uno fijo. Se consideró que esto permite el uso de la intersección de dos (o más) arcos como herramienta para obtener puntos que estén a una distancia dada de dos (o más) puntos fijos. Los alumnos construyeron un segmento con una longitud fija y anclado en un extremo a un punto fijo en el que se pudiera mover libremente el otro extremo. Aprovechando el arrastre, manipularon la construcción para determinar la curva resultante (circunferencia) y así por medio de preguntas explicitar las propiedades de esta con respecto a la equidistancia a un punto fijo.

Actividad 6: Construcción de un triángulo a partir de sus medianas. Esta actividad se orientó a la aplicación directa de observaciones de las actividades anteriores. Se pidió a los alumnos construir un triángulo a partir de tres medidas: la de un lado (*AB*) y las de las dos medianas que llegan a los extremos de esos lados. La construcción requirió obtener un punto (*G*, baricentro) ubicado en la intersección de dos circunferencias, luego obtener los puntos medios de los dos lados desconocidos y, por último, el tercer vértice del triángulo (Figura 4). Se les pidió que verificaran su construcción a través del "examen de arrastre" (Mariotti, 2006), el cual indica si una construcción es robusta. También justificaron sus procedimientos y construcciones, por lo que los alumnos debieron hacer referencia a las propiedades y construcciones de las actividades anteriores, particularmente la 2 y la 5. Así, esta actividad se convirtió en un espacio para conjuntar, explicitar y sistematizar las propiedades observadas.

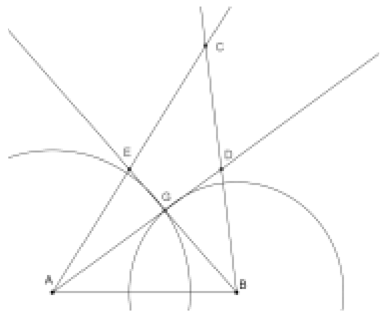


Figura 3. Construcción de la actividad 6

4. Alumnos, contexto y métodos

Los alumnos que participaron en las actividades son de una escuela pública de un medio suburbano en México. El grupo era de 48 alumnos del tercer grado de Secundaria (14 y 15 años de edad) del turno matutino. Eran estudiantes de un estrato socioeconómico medio y bajo con poco contacto con las computadoras excepto por el tiempo en la escuela. Las sesiones de trabajo se llevaron a cabo durante clases de matemáticas de 50 minutos. El grupo se organizó en equipos de dos o tres alumnos de acuerdo a sus afinidades personales. Esta organización se tomó considerando las sugerencias de proyectos llevados a cabo en instituciones públicas de México (Ursini, 2006; Ursini & Rojano, 2000), con lo cual "no se trata de que los alumnos trabajen de manera independiente, turnándose para usar la máquina; al contrario, esta organización pretende fomentar un ambiente de cooperación entre los alumnos y de intercambio de ideas" (Ursini & Rojano, 2000, p. 14). La escuela tiene una sala con una cantidad suficiente de computadoras para cada equipo de alumnos.

A fin de obtener la información para ser analizada, se recurrió a técnicas de observación participante y entrevistas semiestructuradas. Se recuperó la información para su análisis a través de las hojas de trabajo con las respuestas de los alumnos y sus archivos de Cabri. Así, mientras que las hojas de trabajo permitieron analizar procesos de solución, razonamiento y argumentación, los archivos de Cabri permitieron corroborar y clarificar respuestas y comentarios, mostrando un panorama de sus procesos de razonamiento, de visualización y del uso de la herramienta. Este análisis consideró una codificación de la información basada en el contenido de las justificaciones y los argumentos generados por los alumnos, la cual consideró como una referencia a los esquemas de argumentación (Flores et al., 2010) y a aspectos relativos con su construcción, contenido y estructura. Al ordenarse la información en categorías de los tipos de justificaciones y darle sentido (Álvarez-Gayou, 2005), se obtuvieron resultados que a continuación se exponen.

5. Resultados

Del análisis de la información obtenida con el trabajo de los alumnos, aparecieron aspectos que están relacionados con el trabajo en geometría, aunque no únicamente con la producción de justificaciones. Algunos de estos aspectos fueron el papel que jugó la intuición, el uso de la medición como medio de validación, la aparición de las llamadas *representaciones gráficas estereotipadas*, el uso del arrastre y la aparición de un discurso dinámico por parte de los alumnos. El interés en este trabajo es lo relacionado con la producción de justificaciones por parte de los alumnos en un ambiente de Geometría Dinámica. En este sentido, los alumnos desarrollaron los siguientes tipos de justificación: a) circulares; b) relativas al proceso de construcción; c) basadas en la experiencia; d) visuales; y e) con deducciones locales. Prácticamente no aparecieron esquemas de *argumentación autoritarios*. Esto se puede atribuir al hecho de que la actuación de la profesora y las actividades planteadas estuvieron orientadas a que los alumnos presentaran sus argumentos tras observar situaciones, buscando que ellos propusieran respuestas. Ahora bien, dado que el interés fue que los alumnos utilizaran propiedades geométricas, se esperaba que al finalizar los cursos de geometría utilizaran más las justificaciones basadas en deducciones, es decir, los esquemas de argumentación analíticos. Sin embargo, la mayoría de alumnos utilizaron justificaciones de los primeros tipos, los cuales están incluidos en los *esquemas de argumentación simbólicos*, *fácticos* y *empíricos*.

5.1. Justificaciones circulares

Resultaron muy comunes las justificaciones circulares que echan mano de argumentos que se utilizan a sí mismos para validarse. Un caso es el del equipo 07-23 (se mantienen los números que tenían asignados los integrantes de cada equipo en la lista de la profesora) cuando se justifica por qué el baricentro divide a cada mediana en dos segmentos con una razón fija:

> *La razón necesita ser la misma porque representa la proporción de cada mediana ya que si fueran diferentes el punto donde se cortan las medianas no sería el baricentro.*

Este tipo podría incluirse en los esquemas de argumentación simbólicos, pues se realiza un manejo de representaciones (gráficas o supuestas definiciones) que por sí mismas proporcionan el argumento pero no por hacer referencia al objeto matemático mencionado, es decir, “los símbolos o las manipulaciones no tienen un sistema potencial y coherente de referentes a los ojos del estudiante” (Harel, 2007, p. 67).

5.2. Justificaciones relativas al proceso de construcción

Una opción muy utilizada fue justificar los resultados obtenidos apoyándose en la descripción explícita del proceso de construcción, lo cual incluyó referencias a las opciones del software. Esto hace referencia a un *esquema de argumentación fáctico* desde el punto de vista de Flores et al (2010). Por ejemplo, en la actividad 3 se solicitó a los alumnos que relacionaran el triángulo medial de un triángulo (*DEF* en la Figura 2) y el triángulo *A*’*B*’*C*’. El equipo 03-44, cuando justificó dicha relación dijo:

> *Ambos están construidos por puntos medios pero el triangulo A’B’C’ está hecho por puntos medios de segmentos y el DEF está hecho por puntos medios del triángulo.”*

5.3. Justificaciones basadas en la experiencia

Algunos alumnos necesitan hacer referencias a casos concretos para justificar una observación general. Tal es el caso del equipo 19-33, que después de haber observado que el baricentro divide a las medianas en dos segmentos cuyas longitudes tienen una razón 2:1, en la actividad 2 lo justifican así (ver nombres de los puntos en la Figura 5):

> *Al unir un vértice con la mediana de su lado opuesto forma un segmento, al hacer lo mismo con los demás vértices, podemos obtener el punto de intersección y el segmento se divide, al observar las medidas, podemos ver que el segmento corto, es una tercera parte del segmento total ejem. AG=2/3 GD=1/3 1/3+2/3=1.*

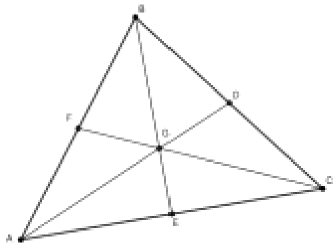


Figura 5. Construcción del ejemplo

La justificación es una descripción de lo realizado durante la construcción, pero a partir de "ejem.", los alumnos presentan una justificación basada en lo que tienen enfrente: el software les proporciona unas medidas que utilizan para mostrar que un segmento resultante de dividir *AD* por *G* representa dos terceras partes del segmento total, el otro es un tercio y, por tanto, los dos segmentos resultantes generan la unidad (segmento *AD*). Los mismos alumnos escribieron lo que aparece a continuación en la siguiente actividad y su archivo quedó como muestra la Figura 6:

> *¿Qué otro segmento en el triángulo medirá lo mismo que el segmento BB'? ¿Por qué?*
>
> *El segmento GB' y EG. Porque todo el segmento está dividido en 3 partes iguales. Lo sé porque lo hice en el ejercicio pasado.*

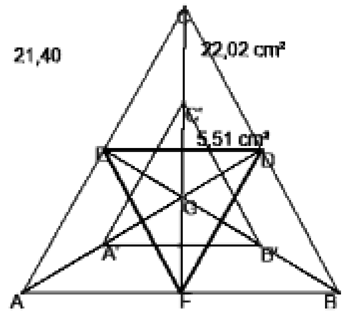


Figura 6. Construcción del ejemplo (tomada de González & Larios, 2012, p. 101)

Cuando usan la expresión "lo sé porque lo hice en el ejercicio pasado" y se revisa que en dicho ejercicio utilizan tercios para hacer la descripción del proceso, tenemos que dicho tratamiento tiene una influencia directa en su respuesta y la referencia explícita a la división en tres partes del segmento. Ello podría llevar a pensar que el uso o desuso del razonamiento deductivo tiene que ver con la percepción de los alumnos sobre la utilidad del mismo y con su capacidad de otorgarle una función operativa efectiva. Con todo, estas justificaciones se incluyen en las categorías de *esquemas de argumentación empíricos*. Esta categoría de esquemas según Harel y

Sowder (1998) incluye dos subcategorías porque los argumentos utilizados son de distinta naturaleza. En efecto, este tipo de justificaciones se pueden considerar en una subcategoría de *esquemas de argumentación inductivos*.

5.4. Justificaciones visuales

Las justificaciones visuales son un recurso utilizado por los alumnos, que se vincula a la representación gráfica de los objetos geométricos. La siguiente es una de las preguntas hechas al mismo equipo del ejemplo anterior en la misma actividad:

> *¿Cómo son sus lados del chico con respecto al grande?, por ejemplo, ¿cuál es la relación del lado B'C' y el lado BC? ¿En qué se parecen y cuáles son sus diferencias? ¿Por qué?*
>
> *Se parecen en que tienen la misma forma pero su única diferencia era que son de distintos tamaños.*

En esta actividad la intención era que los alumnos observaran el paralelismo entre los lados de los diferentes triángulos, pero ellos se percataron de la forma y el tamaño. Otro ejemplo es la respuesta del equipo 06-42 cuando comparan en la misma actividad el triángulo *ABC* y el medial:

> *¿Hay alguna similitud? ¿Alguna diferencia? ¿Tienen alguna característica o propiedad en común?*
>
> *Que ambos triángulos están divididos en seis triángulos más pequeños de igual medida, su diferencia es únicamente su medida. El triángulo DEF está hecho a escala del triángulo ABC y viceversa pero puestos en diferente posición.*

La justificación está basada en el tamaño y la posición de los triángulos, ni siquiera en la medición en sí. En la misma actividad el equipo 09-25-41 escribió:

> *Ahora bien, tienen tres triángulos construidos, el ABC, el A'B'C' y el DEF. ¿Los últimos dos, los dos chicos, tienen alguna relación o parecido entre sí? ¿Por qué?*
>
> *Sí, porque los vértices de los dos triángulos se encuentran en el punto medio de segmentos diferentes.*

La justificación visual no es explícita, pero el hecho de que los vértices de dos triángulos estén a la mitad de los segmentos parece que proporciona suficiente información visual para justificar lo que ocurre. Al igual que en la subsección anterior, este tipo se puede incluir en los *esquemas de argumentación empíricos*, pero tiene la diferencia de que existe una referencia fuerte a la información figural proporcionada por los objetos, por lo que se denominan del subtipo *perceptual* (Flores, 2007).

5.5. Justificaciones con deducciones locales

Como se sabe (Fiallo et al., 2013; Flores et al., 2010; Hiele, 1986; Kuzniak, 2006), el razonamiento deductivo se utiliza en los niveles más altos de razonamiento en geometría, por lo que no es esperable que los alumnos de secundaria lo utilicen de manera natural. Con los alumnos participantes se podrían esperar deducciones locales principalmente. Según esto, se observaron algunas justificaciones que involucran deducciones incompletas y completas a nivel local. Un ejemplo con el que los alumnos pudieron haber recurrido al razonamiento deductivo a partir de sus observaciones, fue cuando se les preguntó el mínimo de medianas necesarias para construir el baricentro. La pregunta no es trivial pues para considerar éste último punto de vista se requiere considerar la propiedad de concurrencia de las medianas, mientras que desde el software resulta que si tres rectas (o segmentos) concurren, éste presenta problemas (no insalvables) para construir el punto de intersección. Hubo cuatro respuestas:

- Se necesitan dos porque con una no existe un punto de intersección entre rectas. Equipo 02-29-45: “Con dos medianas porque al trazar 2 líneas se cruzan muestran el punto de intersección (baricentro)”. Si bien no hay una referencia explícita al software, tampoco lo hay al uso de la propiedad de concurrencia de las medianas. Esta fue la opción más considerada por los equipos de trabajo.
- Se necesitan dos porque así lo requiere el software para construir un punto de intersección. Equipo 20-22: “Se necesitan dos medianas, porque en un solo segmento no se puede trazar el baricentro necesitaríamos dos para que nos dé el punto de intersección entre los dos segmentos”. Esta situación es similar a la anterior, pero con referencia explícita al software.
- Se necesitan dos porque se sabe que la tercera pasará por ese punto. Equipo 07-23: “Dos, porque ya sabemos que en el lugar donde se cortaron las primeras dos pasará la tercera mediana”. Se retoma la propiedad geométrica de concurrencia de medianas.
- Se necesitan los tres. Equipo 05-24-47: “Son tres medianas porque donde se cruzan es donde se encuentra el punto *G*”. Se evidencia una falta de referencia al uso del software, pero también pareciera que hay una carencia en la comprensión de la situación pues se resuelve repitiendo lo que ya se ha visto.

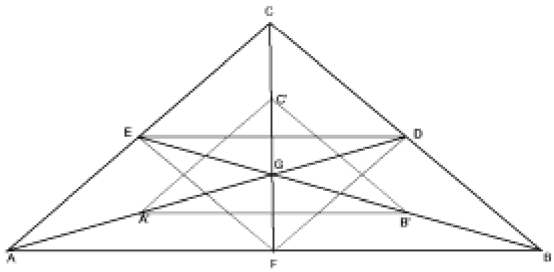


Figura 7. Construcción del ejemplo (en González & Larios, 2012, p. 95)

Otro ejemplo de razonamiento deductivo es el equipo 06-42 en la actividad 3, donde se realiza la construcción de la Figura 7. En este punto deben contestar:

¿Qué otro segmento en el triángulo medirá lo mismo que el segmento BB’? ¿Por qué?

GE. Porque del baricentro al punto medio de CA mide la mitad del segmento GB, por lo tanto el punto medio de GB equivale a la medida de GE.

Para ese momento, los alumnos previamente habían identificado por medio de mediciones que “del baricentro al punto medio de *CA* [que es *E*] mide la mitad del segmento *GB*”. Saben que el punto medio de un segmento (*B*’) lo divide en dos que miden la mitad que el original, aunque esto lo mantienen implícito. No obstante, no recurrieron a medir los segmentos; aprovecharon lo ya observado y lo aplicaron directamente. Este tipo de justificación corresponde a un *esquema de argumentación analítico*, pues aparecen cadenas de deducciones aunque sea a nivel local. Se obtienen conclusiones a partir de propiedades consideradas de manera casi inmediata. Con los alumnos del estudio se percibió el desarrollo de esquemas axiomáticos.

6. Reflexiones finales

Al estudiar geometría en un ambiente dinámico, los alumnos de tercer año de secundaria hacen más referencias a los aspectos figurales que a los conceptuales de los objetos geométricos (Larios & González, 2010). Esto es de esperar pues el proceso de aprendizaje es progresivo y no lineal, y requiere manipulación de representaciones –que hacen más referencia a los aspectos figurales y que requieren de representaciones gráficas estereotipadas– para otorgar significados adecuados a los objetos geométricos al hacer referencia a los aspectos conceptuales. Así, los alumnos ponen más atención a características (propiedades) de objetos geométricos –o más bien de representaciones–, que resultan irrelevantes para el proceso de justificación deductiva al proporcionar información que "estorba" (Larios, 2005):

- No se observan propiedades invariantes porque la representación (dibujo) está mal y no se perciben las propiedades (a diferencia del experto que hace dibujos pero se enfoca en el aspecto conceptual).
- Se observan propiedades que podrían provenir de fuentes externas, pero que "desaparecen" cuando se aplica el arrastre por los errores en la construcción (no es robusta). Los alumnos no se percatan de que la complicación está en su construcción y no en las propiedades geométricas.

Se hace necesario un tratamiento didáctico dirigido a la observación de propiedades geométricas (aspecto conceptual) y a la producción de justificaciones con deducciones locales inicialmente, para avanzar en los procesos de razonamiento. Esto requiere que el diseño de las actividades considere la producción de conjeturas y de argumentos que se hagan explícitos y se puedan comunicar. Valdría la pena desarrollar herramientas que permitieran al profesor sistematizar la observación del desarrollo de los alumnos para detectar el tipo de justificación que utilizan en un contexto en particular y así mejorar los procesos didácticos. Los esquemas de argumentación pueden ser parte de dicha herramienta, aunque hemos visto que requieren un análisis mayor y quizá con una mayor adaptación con respecto a la propuesta original de Harel y Sowder (1998). Por otro lado, durante este trabajo se percibió la necesidad de que los alumnos expliciten más sus observaciones y conclusiones cuando trabajan en el desarrollo de justificaciones y explicaciones a fin de que puedan intercambiar ideas, sostener y rebatir argumentos mediante razonamientos cercanos a la deducción.

Otros factores que se vieron involucrados en el trabajo de los alumnos que deben ser tomados en cuenta son el uso frecuente de la opción en el software para medir distancias o áreas. Se detectó que en ocasiones las actividades planteadas promueven esto, por lo que conviene buscar la manera en que la medición progresivamente pase de ser un medio que sirve como verificación y validación a uno que se utilice como herramienta heurística. De acuerdo con Duval (1999), este cuidado con la medición es necesario, pues "cuando la hipótesis incluye números como medidas de lados o segmentos, la aprehensión operativa es neutralizada y la figura cumple sólo una función ilustrativa o de apoyo. Incluso podemos tener un conflicto entre la figura y las medidas que lleve a una paradoja" (p. 99). Los alumnos en varias ocasiones aceptaron la igualdad de longitud de segmentos utilizando más la medición (con la herramienta del software) que las propiedades geométricas (e incluso ignorando éstas). Además, algunas metáforas como las de movimiento son introducidas. Los objetos geométricos en la computadora al ser arrastrados por el usuario pareciera que se desplazan por la pantalla. En la realidad geométrica no ocurre esto ya que un punto cualquiera en el plano (P) no cambia de lugar, sino que en todo caso se le aplica una operación (isometría) y se obtiene otro como imagen. En el software pareciera que es el mismo (incluso conserva el mismo nombre) y tanto profesor como alumno lo llaman igual.

Nuestro estudio, lejos de hacer desistir a los profesores de utilizar el software para Geometría Dinámica, muestra la necesidad de seguir realizando exploraciones al respecto para conseguir proponer estrategias a desarrollar en el aula. Las posibilidades son muchas y requieren que el profesor esté dispuesto a afrontar el reto de utilizar la herramienta computacional (en términos ventajosos y desventajosos), consciente de los fenómenos cognitivos que emergen y los obstáculos que aparecen (Larios, 2005).

Referencias

Álvarez-Gayou, J. L. (2005). *Cómo hacer investigación cualitativa*. México: Paidós.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 746-783). Nueva York: Routledge.

Bloch, E. D. (2000). *Proof and fundamentals*. Boston: Birkhäuser.

Boero, P., Garuti, R., & Mariotti, M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. En Á. Gutiérrez, & L. Puig (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 121-128). Valencia: PME.

Duval, R. (2003). «Voir» en mathématiques. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México: FCE.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Pitagora Editrice Bologna y Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in schools. From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 137-161). Rotterdam: Sense Publishers.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana, & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géomètrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, *10*(2), 5-53.

Fiallo, J., Camargo, L., & Gutiérrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista Integración*, *31*(2), 181-205.

Finzer, W. F., & Jackiw, N. (1998). *Dynamic manipulation of mathematical objects*. Disponible en: http://www.dynamicgeometry.com/General_Resources/Recent_Talks/Sketchpad_4.0_Talks/Dynamic_Manipulation.html.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 139-162.

Flores E., C., Gómez R., A., & Flores S., Á. H. (2010). Esquemas de argumentación en actividades de geometría dinámica. *Acta Scientiae*, *12*(2), 22-42.

Flores S., Á. H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, *19*(1), 63-98.

González G. N., & Larios O., V. (2012). *Justificaciones en la geometría dinámica de secundaria*. Saarbrücken: Editorial Académica Española.

Gonzato, M. (2013). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores de educación primaria para la enseñanza de la visualización espacial*. Trabajo de Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Harel, G. (2007). Students' proof schemes revisited. En P. Boero (Ed.), *Theorems in schools. From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 65-78). Rotterdam: Sense Publishers.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-282). Washington DC: AMS.

Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight*. Boston: Academic Press.

Hitt E., F., Cortés Z., C., & Rinfret, M. (2012). Utilisation des technologies dans la classe de mathématique au secondaire: des outils sous-exploités. En J.-L. Dorier, & S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social. Actes du colloque EMF2012* (pp. 849-862). Ginebra: Université de Genève.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science and Mathematics Education*, *6*(2), 167-188.

Laborde, C., & Capponi, B. (1994). Cabri Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(1-2), 165-210.

Larios O., V. (2005). *Fenómenos cognitivos presentes en la construcción de argumentos en un ambiente de Geometría Dinámica*. Trabajo de Tesis Doctoral. Cinvestav-DME México.

Larios O., V., & González G., N. (2010). Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de Geometría Dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)*, *13*(4), 147-160.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En Á. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education. Past, present and future* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense Publishers.

Rabardel, P. (2002). *People and technology. A cognitive approach to contemporary instruments*. Disponible en: http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/Groupes/Modele/Articles/Public/ART372105503765426783.PDF

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, *7*(3), 5-41.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*. México: Secretaría de Educación Pública.

Ursini L., S. (2006). Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (EMAT). En M. T. Rojano (Ed.), *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con tecnología* (pp. 25-41). México: Secretaría de Educación Pública.

Ursini L., S., & Rojano C., T. (2000). *Guía para integrar los talleres de capacitación EMAT*. México: Secretaría de Educación Pública e Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa.

Agradecimientos

Proyecto de Investigación Fondecyt de iniciación Nº 11150014, CONICYT, Chile. Proyecto EDU2015-64646-P, MEC, España.

Referencias de los autores

Víctor Larios Osorio, Universidad Autónoma de Querétaro, Maestría en Didáctica de las Matemáticas (México). vil@uaq.mx

Luis Roberto Pino-Fan, Universidad de Los Lagos, Departamento de Ciencias Exactas (Chile). luis.pino@ulagos.cl

Noraísa González González, Escuela Secundaria General "Mariano Matamoros", USEBEQ (México). norai11@yahoo.com

Argumentative schemes of middle school students on dynamic geometry environments

Víctor Larios Osorio, Universidad Autónoma de Querétaro (México)

Luis Roberto Pino-Fan, Universidad de Los Lagos (Chile)

Noraísa González González, Escuela Secundaria General Mariano Matamoros (México)

Knowledge validation in Mathematics is an epistemological main issue in the mathematics methodological process known as mathematical proof. Its learning includes complex processes and obstacles which appear throughout individual cognitive development. This learning process may be studied taking into count aspects like activities, technology used for explorations, arguments structure and content and types of justification. In this paper we present the types of justification produced by middle school Mexican students (14-15 year-olds) during their work within a Dynamic Geometry Software (DGS) environment. The teaching and learning of Geometry in the teaching experiment is accomplished with activities that allow explorations and observations of properties in order to promote deductive reasoning. We considered a pragmatic approach to the notion of proof as mathematical knowledge validation and an analysis of argumentation schemes produced by students. We observed more references to figural than to conceptual aspects in relation to the common manipulation of representations. This finding points to complexity of the learning of proof inasmuch as students often paid exclusive attention to features of drawings (objects' representations) which are irrelevant for deductive justification. It became clear that students should be encouraged to make explicit their observations and conclusions when they are working on the development of justifications and explanations, so that they can exchange ideas, support their own arguments and refute others' arguments through deduction-based reasoning. It would be worth developing tools which allow teachers to systematize the observation of students' development in order to detect the type of justification that they use in particular contexts. This would allow the teachers to be able to implement more adequate didactic processes.

Caracterización de un modelo para fomentar la alfabetización matemática en la infancia: vinculando investigación con buenas prácticas

Ángel Alsina, Universidad de Girona (España)

Recibido el 10 de octubre de 2016; aceptado el 27 de enero de 2017

Caracterización de un modelo para fomentar la alfabetización matemática en la infancia: vinculando investigación con buenas prácticas

Resumen

Se presenta un modelo para fomentar la alfabetización matemática en Educación Infantil. El Modelo de Alfabetización Matemática en la Infancia incluye seis fases: matematización del contexto de enseñanza-aprendizaje; conocimientos matemáticos previos de alumnos; aprendizaje de conocimientos matemáticos y documentación en contexto; co-construcción y reconstrucción de conocimiento matemático en el aula; formalización de conocimientos matemáticos adquiridos; y reflexión sistemática sobre la práctica matemática realizada. La caracterización del modelo se fundamenta en los avances de los últimos años en diferentes ámbitos temáticos y agendas de investigación en educación matemática en general y educación matemática infantil en particular. Se consideran contribuciones sobre métodos de enseñanza de las matemáticas y sobre buenas prácticas que provienen principalmente de la Educación Matemática Realista y del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos.

Palabras clave. Educación matemática infantil, alfabetización matemática, investigación en educación matemática, buenas prácticas, Educación Matemática Realista.

Caracterização de um modelo para promover a literacia matemática na infância: ligação da investigação com as melhores práticas

Resumo

Este artigo apresenta um modelo para melhorar literacia matemática na educação infantil. Modelo Literacia Matemática na Infância inclui seis fases: matematização contexto de ensino e aprendizagem; conhecimento matemático anterior de estudantes; aprendizagem conhecimento matemático e documentação no contexto; co-construção e reconstrução do conhecimento matemático na sala de aula; formalização do conhecimento matemático adquirido; e reflexão sistemática sobre a prática matemática. O caracterização é baseada em avanços nos últimos anos em diferentes áreas temáticas e agendas de pesquisa em educação matemática e matemática educação infantil. Especificamente, eles consideram várias contribuições sobre os métodos de ensino de matemática e de boas práticas, principalmente, da Educação Matemática Realista e do Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos.

Palavras chave. Educação matemática na infância, literacia matemática, pesquisa em educação matemática, boas práticas, Educação Matemática Realista.

Para citar: Alsina, A. (2017). Caracterización de un modelo para fomentar la alfabetización matemática en la infancia: vinculando investigación con buenas prácticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 12*, 59-78.

Characterization of a model to empower mathematical literacy in children: linking research with good practices

Abstract

This article presents a model to empower mathematical literacy in Childhood Education. Model of Mathematical Literacy in Childhood includes six phases: mathematisation of the context of teaching and learning; prior mathematical knowledge of students; learning mathematical knowledge and documentation in context; co-construction and reconstruction of mathematical knowledge in the classroom; "Formalization" of mathematical knowledge; and systematic reflection on the mathematical practice done. The characterization of the model draws on advances in recent years in different thematic areas and research agendas in mathematics education in general and Childhood mathematics education in particular. This model considers contributions on methods of teaching mathematics and good practice mainly from the Realistic Mathematics Education and the National Council of Teachers of Mathematics.

Key words. Childhood mathematics education, mathematical literacy, mathematics education research, good practices, Realistic Mathematics Education.

Caractérisation d'un modèle pour promouvoir l'alphabétisation mathématique chez les enfants: liant recherche avec bonnes pratiques

Résumé

Cet article présente un modèle pour améliorer l'alphabétisation des mathématiques dans l'éducation de la petite enfance. Modèle de l'Alphabétisation Mathématique de la Petite Enfance comprend six phases: mathématisation de le contexte de l'enseignement et l'apprentissage; connaissance mathématique précédente des élèves; apprentissage des connaissances mathématiques et de la documentation dans le contexte; co-construction et reconstruction des connaissances mathématiques dans la salle de classe; "Formalisation" des connaissances mathématiques; et réflexion systématique sur la pratique mathématique. Le caractérisation de modèle est basée sur les progrès de ces dernières années dans différents domaines thématiques et des programmes de recherche dans l'éducation en mathématiques en général et dans l'éducation en mathématiques de l'enfance en particulier. Plus précisément, nous considérons diverses contributions sur les méthodes de l'enseignement des mathématiques et des bonnes pratiques, principalement de l'Education Mathématique Réaliste et le Conseil National des Professeurs de Mathématiques des États-Unis.

Paroles clés. Éducation de la petite enfance, alphabétisation des mathématiques, recherche dans l'éducation en mathématiques, bonnes pratiques, l'Education Mathématique Réaliste.

1. Introducción

Durante las últimas décadas la educación matemática infantil ha ido adquiriendo mayor consideración, en gran medida debido a que diversos organismos han expresado sus beneficios para los niños y para la sociedad en general. El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, 2003, p. 80) señala que:

> Desarrollar una sólida base matemática en los primeros años es especialmente importante para todos los niños. Deben apoyarse sus esfuerzos y su confianza en que aprender matemáticas está a su alcance. Los niños construyen creencias sobre lo que son las matemáticas, sobre lo que significa saber y utilizar matemáticas y sobre sí mismos como aprendices de matemáticas (...). Por consiguiente, es imperativo proporcionarles programas de gran calidad que incluyan matemáticas significativas, y presentarlas de una manera que respete tanto las matemáticas como la naturaleza de los niños.

La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico señala que está demostrado que los niños que tienen acceso a servicios de educación y cuidados de calidad durante la primera infancia obtienen resultados mucho mejores, equivalentes a un avance de uno o dos años escolares, en pruebas internacionales sobre competencias básicas, como PISA y PIRLS (OECD, 2007). La Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas y Primera Infancia (2012, p. 2) explica que “todos los niños, en sus primeros años, son capaces de acceder a grandes ideas matemáticas, relevantes para su vida actual y, a su vez, fundamentales para su futuro aprendizaje de las matemáticas y para otros aprendizajes”. De Castro, Flecha y Ramírez (2015) y de Castro (2016) indican que estas conclusiones han dado lugar a que varios autores (Clements, 2004; Clements & Sarama, 2009) e instituciones de referencia internacional, como la Asociación Nacional para la Educación de la Primera Infancia (NAEYC) y el Consejo Nacional de Investigación (NRC), además del NCTM, hayan ido extendiendo su reflexión sobre la educación matemática infantil a edades cada vez menores, llegando a incluir el periodo de 0 a 3 años (Fuson, Clements, & Beckman, 2009; NAEYC & NCTM, 2013; NRC, 2014). Otra consecuencia del nuevo panorama es el aumento de las investigaciones sobre educación matemática infantil. En España, estudios bibliométricos de análisis temático de los Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), señalan esta dirección. Mientras que los estudios de Gómez, Cañadas, Bracho, Restrepo y Aristizábal (2011) y de Sierra y Gascón (2001) ponen de manifiesto una escasa productividad de investigaciones sobre educación matemática infantil durante los periodos 1997-2008 y 1997-2010, Alsina (2013) indica que la creación del Grupo de Investigación en Educación Matemática Infantil (IEMI) supone un punto de inflexión que da lugar a un cuerpo de investigaciones más cohesionado. A partir del análisis del contenido matemático, en ese trabajo establezco tres grupos de estudios sobre: 1) la formación inicial de maestros de Educación Infantil, con trabajos desde distintos enfoques como la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) o la Educación Matemática Realista (EMR); trabajos basados en métodos de formación activa, como el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) o el Aprendizaje Colaborativo; y trabajos sobre experiencias interdisciplinarias de formación, prácticas externas y trabajos finales de Grado; 2) la adquisición y el desarrollo del pensamiento matemático infantil, con trabajos de análisis de referentes internacionales a nivel curricular (NCTM, 2003) y trabajos que desde un enfoque didáctico se centran en el aprendizaje de contenidos (sobre todo, numeración y cálculo); 3) los recursos y contextos de aprendizaje para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático, como contextos de vida cotidiana, juegos, cuentos, etc.

En el contexto europeo también se ha producido una tendencia similar. Edo (2016) analiza la emergencia de la investigación en educación matemática infantil en el grupo *Early Years Mathematics* (EYM) del *Congress of European Research in Mathematics Education* (CERME), y constata como desde la creación del grupo en 2009 hasta 2015 ha ido aumentando el número de contribuciones y de investigadores participantes. Esta autora señala que entre los temas que se han tratado en las diferentes ediciones aparece el análisis de las oportunidades de aprendizaje matemático en contextos informales, el papel de los materiales, las diferentes formas de comunicación y representación matemática de los niños pequeños o las evidencias de aprendizaje sobre contenidos específicos, entre otros. El eje común de todos estos trabajos es “el deseo de mejorar el aprendizaje de las matemáticas para los niños pequeños” (Edo, 2016, p. 57).

La finalidad de este artículo es empezar a caracterizar un modelo para empoderar la alfabetización matemática en la infancia, considerando avances en ámbitos temáticos y agendas de investigación en educación matemática infantil durante los últimos años. Para fundamentar dicho modelo se consideran diversas contribuciones sobre los métodos de enseñanza de las matemáticas y sobre buenas prácticas.

2. Métodos de enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil

En las aulas de Educación Infantil coexisten diversos métodos para enseñar matemáticas. Baroody y Coslick (1998) distinguen cuatro métodos de enseñanza centrados en la actividad matemática del aula, sintetizados por de Castro (2007):

- *Enfoque de destrezas:* contempla el aprendizaje matemático como la memorización de destrezas básicas a través de la repetición. El objetivo principal es adquirir un conjunto de reglas, fórmulas y procedimientos. Los alumnos son considerados vacíos de contenido e incapaces de comprender por sí mismos la mayor parte de conocimientos matemáticos. Las tareas no acostumbran a estar relacionadas con el entorno cercano y se encuentran alejadas de sus intereses. El énfasis en la repetición hace que los alumnos adquieran destrezas de ejecución aun careciendo de sentido.
- *Enfoque conceptual:* se empieza a contemplar la necesidad de comprender y adquirir el aprendizaje de procedimientos. Su objetivo principal es conseguir esta adquisición desde la significatividad y la comprensión de los alumnos. Se entiende la enseñanza como un proceso donde es necesario, en ocasiones, hacer uso de dibujos o materiales manipulativos.
- *Enfoque de resolución de problemas:* se conciben las matemáticas como un espacio en el que los alumnos pueden reflexionar y razonar aquello que les despierta curiosidad. A su vez considera a los niños poseedores de la capacidad de construir sus propios conocimientos. El objetivo principal de este enfoque es introducir a los alumnos en la actividad matemática mediante la resolución de problemas reales y cercanos. El papel del maestro es el de acompañante en el proceso, entendiendo al alumno como protagonista de su aprendizaje.
- *Enfoque investigativo:* es una combinación entre el enfoque conceptual y el de resolución de problemas. Entiende las matemáticas no solo como adquisición de conceptos y procedimientos sino también como proceso de investigación. Los alumnos deciden el camino que deben recorrer en su aprendizaje matemático y el maestro es su orientador, que actúa solo cuando los alumnos se bloquean ante la tarea. El principal objetivo es conseguir que los alumnos, por sí mismo, lleguen a sus propias conclusiones mediante reflexión, razonamiento, representación, resolución de problemas e investigación.

Considerando los métodos anteriores, López y Alsina (2015) presentan los resultados de una tesis doctoral cuya finalidad es comparar el rendimiento matemático de alumnos de 3 a 6 años y los tipos de andamios que ofrece el profesorado en función del método. Con datos de 149 alumnos y 9 maestras de Educación Infantil, se observan diferencias estadísticamente significativas en el rendimiento matemático de los alumnos que aprenden a través de la metodología de los rincones de trabajo (combinación de los enfoques de resolución de problemas e investigativo), respecto a los que aprenden a través de fichas (enfoque de destrezas) y materiales manipulativos (enfoque conceptual). El análisis cualitativo revela que las ayudas más habituales del profesorado que trabaja a partir de fichas son "suscitar", "instruir" e "informar", en el caso de materiales manipulativos las principales ayudas consisten en "suscitar", "razonar" y "reflexionar" y, en el trabajo a partir de rincones, "razonar", "suscitar" y "orientar". Los resultados, además de poner de manifiesto la heterogeneidad de métodos para enseñar matemáticas en las aulas de Educación Infantil, evidencian que estas diferentes maneras de enseñar tienen efectos diferentes en el rendimiento matemático de los alumnos. Se sugiere que el diseño y la gestión de las prácticas matemáticas acaba determinando el aprendizaje matemático de los alumnos. En el siguiente apartado se revisan aportaciones en relación al diseño y la gestión de buenas prácticas matemáticas en las primeras edades.

3. Buenas prácticas matemáticas en Educación Infantil

El término “buena práctica” ha sido objeto de debate en la investigación en educación matemática y en el contexto de la educación infantil. En este apartado, se presentan aportaciones, principios o descripciones de buena práctica matemática que se centran en diversos aspectos como el tipo de contenidos, el diseño de actividades, los medios a emplear, la gestión que debería realizarse en el aula o bien la evaluación. Primero se exponen contribuciones genéricas de organismos y autores del ámbito de la educación matemática (NCTM, 2003, 2015; Planas & Alsina, 2014). Luego se describen aportaciones específicas en el marco de la educación matemática infantil (Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas e Infancia, 2012; NAEYC & NCTM, 2013).

Desde una perspectiva genérica, en el contexto de la definición de los principios y estándares para la educación matemática, NCTM (2003, p. 17) señala que “una enseñanza eficaz requiere conocer lo que los alumnos saben y lo que necesitan aprender; y luego estimularlos y ayudarlos para que lo aprendan bien”. Se consideran tres elementos en el marco del “Principio de Enseñanza” de las matemáticas:

- La eficacia docente exige saber matemáticas, tener en cuenta que los alumnos son aprendices y disponer de estrategias pedagógicas. De ahí, el profesorado debería tener diferentes conocimientos (disciplinares, didácticos, etc.)
- Una enseñanza eficaz requiere un entorno en aprendizaje que apoye y estimule. Se trata de plantear propuestas educativas o tareas matemáticas útiles para introducir nociones matemáticas importantes y para retar e implicar intelectualmente a los alumnos. La toma de decisiones respecto al tipo de propuestas debe acompañarse con decisiones sobre la gestión.
- Una enseñanza eficaz requiere tratar continuamente de mejorar. Las buenas prácticas surgen de la observación y reflexión sistemática de la propia práctica.

Los elementos anteriores forman parte de los principios que en la publicación del NCTM de 2003 pretendían describir las características de la educación matemática de calidad. Como puede apreciarse, las principales ideas asociadas al principio de enseñanza se referían a los conocimientos disciplinares y didácticos del profesorado para poder llevar a cabo una buena planificación y gestión de prácticas matemáticas.

Años después se actualizan los principios en el manual *De los Principios a la Acción* (NCTM, 2015). A diferencia de los principios publicados en 2003, ahora se pretende guiar la educación matemática de los próximos años, los principios se vinculan con prácticas eficaces y se ilustran con ejemplos. En concreto, se describen condiciones, estructuras y políticas que han de darse para que los alumnos aprendan matemáticas, además de abordarse elementos esenciales de la enseñanza y el aprendizaje, del acceso y la equidad, del currículo, o bien otros aspectos como herramientas y tecnología, evaluación y profesionalización. Sugieren acciones que el profesorado debe llevar a cabo para garantizar el éxito de todos en las matemáticas. En concreto, mencionan ocho prácticas basadas en investigaciones que representan un conjunto esencial de habilidades esenciales de enseñanza que se requieren para desarrollar un profundo aprendizaje de las matemáticas: 1) Establecer metas matemáticas basadas en el aprendizaje, 2) Implementar tareas de razonamiento y de resolución de problemas, 3) Usar y vincular las representaciones matemáticas, 4) Favorecer el discurso matemático significativo, 5)

Plantear preguntas deliberadas, 6) Elaborar la fluidez procedimental a partir de la comprensión conceptual, 7) Favorecer el esfuerzo productivo en el aprendizaje de las matemáticas, 8) Obtener y utilizar evidencias del pensamiento de los estudiantes.

Estas ocho prácticas de enseñanza de las matemáticas son "un conjunto de acciones muy recomendables para todos los docentes, asesores pedagógicos y especialistas en matemáticas, así como para todo el personal administrativo de escuelas y distritos y cada uno de los líderes políticos y responsables de políticas" (NCTM, 2015, p. 4).

Para concretar las características de una buena práctica matemática, Planas y Alsina (2014) retoman los siete principios clásicos de la enseñanza de las matemáticas elaborados por el matemático inglés John Perry y sintetizados en Price (1986, p. 114). A modo de decálogo los completan con tres principios más al final de la lista:

- Tener en cuenta la motivación y los intereses del alumnado.
- Basar lo abstracto en la experiencia concreta para promover la comprensión.
- Emplear actividades que supongan el uso de la mano y el ojo, y no solo de la oreja, en conjunción con el cerebro, así como de los métodos gráficos.
- Adoptar métodos experimentales y heurísticos: experimento, estimación, aproximación, observación, inducción, intuición, sentido común, etc.
- Retrasar el rigor lógico y la preocupación inicial por los fundamentos, y restringir los elementos deductivos formales, admitiendo diversas formas de demostración.
- Simplificar, ensanchar y unificar la materia-disciplina de las matemáticas, e ignorar las divisiones artificiales tradicionales.
- Correlacionar las matemáticas con la ciencia y el trabajo de laboratorio, y relacionar las matemáticas con la vida y sus aplicaciones.
- Recordar la necesidad de incorporar el rigor lógico y la preocupación por los fundamentos en los momentos posteriores a la experiencia concreta.
- Introducir formas de validación de la práctica matemática que no hayan surgido de la implicación del alumnado en las actividades propuestas.
- Generar motivación e interés en el alumnado por problemas matemáticos.

Añaden los tres últimos principios con la intención de cerrar "mejor" el círculo, retomando cuestiones y prácticas matemáticas de importancia que podrían no ser incorporadas en el desarrollo del currículo si solo se tuvieran en cuenta la motivación y los intereses del alumnado o si se retrasara tanto el rigor lógico y la preocupación por los fundamentos que, finalmente, no se volviera a ellos.

Desde la perspectiva de la educación matemática infantil también hay intentos de concreción de lo que se entiende por buena práctica matemática. Se presentan diversas recomendaciones que describen las características que deben tener las prácticas matemáticas en Educación Infantil, tales como el uso de materiales manipulativos, juegos y otros recursos, o bien la incorporación progresiva de lenguaje matemático durante las primeras edades. En este sentido, sigue una síntesis de recomendaciones de la Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas e Infancia (2012):

- Atraer la curiosidad natural de los niños para favorecer el desarrollo de las ideas y de la comprensión de las matemáticas infantiles, usando enfoques como el juego, el currículo emergente, el currículo centrado en los niños o el currículo iniciado por los niños.

- Asegurar que las ideas matemáticas con las que interactúan los pequeños sean relevantes, usando métodos infantiles de resolución de problemas matemáticos como base para su desarrollo posterior.
- Reconocer que el aprendizaje de las matemáticas es una actividad social que debe ser apoyada y en la que se debe profundizar, tanto a través de la interacción con otros niños, como con los adultos.
- Proporcionar materiales apropiados, espacio, tiempo y otros recursos para animar a todos los niños a implicarse en su aprendizaje matemático. Y reconocer que, aunque los materiales pueden ser importantes en el desarrollo infantil de ideas matemáticas, éstas se desarrollan a través del pensamiento sobre la acción.
- Fijarse en el uso del lenguaje para describir, explicar y justificar ideas matemáticas, reconociendo el importante papel que juega el lenguaje en el desarrollo de todo aprendizaje.
- Evaluar el desarrollo matemático de los niños a través de medios tales como la observación, historias de aprendizaje o debates. Y reconocer que el propósito de dichas evaluación es hacer un seguimiento del desarrollo y facilitar la planificación de las siguientes interacciones, tareas, actividades e intervenciones.

Para la Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas e Infancia (2012, p. 1), estas recomendaciones deberían “garantizar que todos los niños tengan acceso a las ideas matemáticas fundamentales y a su aprendizaje durante los primeros años, y al aprendizaje que les prepare para el futuro y favorezca en ellos actitudes positivas”. Otra aportación es la declaración conjunta sobre las matemáticas en la Educación Infantil de la Asociación Nacional para la Educación Infantil y el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NAEYC & NCTM, 2013). A diferencia de los principios genéricos para la educación matemática del NCTM (2003), en esta declaración se indican algunos aspectos específicos que se deberían considerar en las prácticas matemáticas infantiles. Son recomendaciones que se centran en algunas de las principales necesidades de los niños de las primeras edades para aprender matemáticas:

- Potenciar el interés natural de los niños en las matemáticas y su disposición a utilizarlas para dar sentido a su mundo físico y social.
- Aprovechar las experiencias y conocimientos previos de los niños, incluidos los familiares, lingüísticos, culturales y los de su comunidad, sus aproximaciones individuales al aprendizaje; y sus conocimientos informales.
- Basar los currículos de matemáticas y prácticas docentes en el conocimiento del desarrollo cognitivo, lingüístico, físico, social y emocional de los niños.
- Utilizar currículos y prácticas docentes que fortalezcan los procesos infantiles de resolución de problemas y razonamiento, así como los de representación, comunicación y conexión de ideas matemáticas.
- Asegurar que el currículo sea coherente y compatible con las relaciones y secuencias conocidas de las ideas matemáticas fundamentales.
- Facilitar que los niños interactúen de forma continuada y profunda con las ideas matemáticas clave.

- Integrar las matemáticas con otras actividades y viceversa.
- Proporcionar tiempo, materiales y apoyo del profesor para que los niños se impliquen en contextos de juego para explorar y manipular ideas matemáticas.
- Introducir activamente conceptos matemáticos, métodos y lenguaje a través de una variedad de experiencias y estrategias de enseñanza apropiadas.
- Apoyar el aprendizaje mediante la evaluación continua y reflexiva del conocimiento, destrezas y estrategias de todos los niños.

Considerando el conjunto de aportaciones genéricas y específicas de la educación matemática infantil, en el apartado siguiente se caracteriza un modelo para el diseño y la gestión de buenas prácticas matemáticas en esta etapa. La finalidad es impulsar la alfabetización matemática de los alumnos de las primeras edades, entendida como "capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo" (OECD, 2004, p. 3).

4. Hacia un modelo para fomentar la alfabetización matemática en la infancia

El punto de partida para la caracterización del Modelo de Alfabetización Matemática en la Infancia son las cinco fases planteadas por Alsina (2016) para el diseño y la gestión de actividades matemáticas competenciales. La Figura 1 señala que se trata de una secuencia continua de fases en un flujo circular, cuya finalidad es impulsar la capacidad de los alumnos para usar de forma comprensiva y eficaz las matemáticas que aprenden en la escuela en una variedad de contextos.

> Una vez finalizada la actividad competencial, el alumno dispondrá de un nuevo aprendizaje que va a servirle de base para emprender un nuevo ciclo. En esta nueva secuencia se planificarán otros aprendizajes para que, desde lo concreto, el alumno pueda conectar con lo formal interiorizado en una actividad competencial anterior, aumentando de esta forma la comprensión del conocimiento matemático" (Alsina, 2016, p. 16).

Figura 1. Fases de una actividad matemática competencial (Alsina, 2016)

El modelo de alfabetización matemática en la infancia contempla seis fases.

Fase 1: Matematización del contexto de enseñanza-aprendizaje

El planteamiento de la primera fase se fundamenta en contribuciones de la Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1973, 1991), del NCTM (2003) y de Alsina (2010a, 2014) en relación tanto a la práctica del profesor como al diseño de la enseñanza y su influencia en el desarrollo de la comprensión. Se consideran también rasgos de las buenas prácticas matemáticas en Educación Infantil que hacen alusión explícita a la importancia de considerar el entorno o bien a la necesidad de tener en cuenta los procesos matemáticos para empoderar el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades. En la declaración conjunta de posición sobre las matemáticas en la Educación Infantil, por ejemplo, se recomienda partir de las experiencias y conocimientos previos de los niños sobre su entorno o bien fomentar los procesos infantiles de resolución de problemas y razonamiento, así como los de representación, comunicación y conexión de ideas matemáticas (NAEYC & NCTM, 2013). Desde este prisma, se ha caracterizado esta fase con el término "matematización del contexto" para reforzar la idea de que el punto de partida es la selección de un contexto real o realista, con el objeto de poder partir del nivel situacional (Freudenthal, 1991).

Una vez planificado el contexto se deberían analizar los conocimientos matemáticos que se pueden trabajar en dicho contexto. Se toman como base los estándares de contenido del NCTM (2003) y se aboga que, junto con analizar los contenidos matemáticos, es recomendable que el profesorado planifique también a través de qué estándares de procesos matemáticos van a trabajarse dichos contenidos. Alsina (2010a) recomienda partir de estas conexiones entre los conocimientos matemáticos ya desde las primeras edades (Figura 2), dado que cuando los alumnos usan las relaciones existentes entre los contenidos matemáticos, entre los procesos matemáticos y las existentes entre ambos, progresa su conocimiento de la disciplina y crece la habilidad para aplicar conceptos y destrezas con más eficacia en diferentes ámbitos de su vida cotidiana.

	Resolución de problemas	Razonamiento y prueba	Comunicación	Conexiones	Representación
Números y operaciones					
Álgebra					
Geometría					
Medida					
Análisis de datos y probabilidad					

Figura 2. Relación cartesiana entre contenidos y procesos matemáticos

Alsina (2014) plantea ideas clave para el profesorado de Educación Infantil en el diseño y gestión de buenas prácticas que consideren los procesos matemáticos.

Fase 2. Conocimientos matemáticos previos de los alumnos

Esta fase tiene una inspiración sociocultural ya que se asume que toda actividad formativa debería partir de los conocimientos de los alumnos. Como señaló Vigotsky (1978), si la distancia entre lo que el alumno sabe y lo que se planifica que aprenda es demasiado grande, el aprendizaje difícilmente se produce. En el caso que se produzca, será un aprendizaje desconectado del resto, puesto que no será posible realizar ningún tipo de vínculo. Este planteamiento lo recogen también las principales recomendaciones acerca de las buenas prácticas matemáticas en Educación Infantil, al mencionar la necesidad de aprovechar las experiencias y conocimientos de los niños, como ya se ha mencionado en la fase anterior (NAEYC & NCTM, 2013).

Como se aprecia, se hace alusión implícita a la necesidad de considerar la zona de desarrollo próximo de los alumnos. La principal herramienta de esta segunda fase tiene también un origen sociocultural: se considera que una vez determinado el contexto de enseñanza-aprendizaje es necesario iniciar un diálogo, es decir, fomentar la interacción con los alumnos para poder identificar sus conocimientos y experiencias previas. La comunicación en el aula de matemáticas en Educación Infantil es, pues, un aspecto relevante que se recoge en la declaración de posición sobre las matemáticas en la primera infancia de la Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas e Infancia (2012), al recomendar que el profesorado de las primeras edades reconozca el importante papel que juega el lenguaje en el desarrollo de todo aprendizaje.

Existen diversos recursos posibles para hacer emerger conocimientos en un contexto de comunicación en el aula de matemáticas, aunque uno de los más adecuados son las buenas preguntas. Como señala Mercer (2001), en los procesos de interacción, negociación y diálogo, las buenas preguntas se erigen como un instrumento de mediación idóneo ya que permiten avanzar desde unos primeros niveles de concienciación sobre lo que uno ya sabe o es capaz de hacer hacia niveles superiores. Sullivan y Lilburn (2002) exponen que las buenas preguntas para enseñar matemáticas tienen tres características: i) Requieren comprensión de la tarea, aplicación de conceptos y apropiación de estrategias, así como análisis y síntesis de conceptos implicados, ii) Favorecen que los alumnos sean conscientes de lo que saben y lo que no saben, y muestran al maestro si se entienden bien los conceptos o bien se necesitan ayudas complementarias, iii) Permiten varias respuestas aceptables.

Además de identificar los conocimientos previos a través de buenas preguntas, en el diálogo que se establece durante esta fase se debería pactar el material para realizar la práctica (cinta métrica, libreta para anotar descubrimientos y representar ideas matemáticas) y el material para realizar la documentación (cámara digital).

Fase 3: Aprendizaje de conocimientos matemáticos y documentación en contexto

Durante esta fase es cuando propiamente se desarrolla la actividad matemática en el contexto real o realista elegido. En el Modelo de Alfabetización Matemática en la Infancia se asume que el acceso a las ideas matemáticas debería producirse en el nivel situacional, es decir, en el contexto de la situación. A medida que los alumnos avanzan en su escolaridad, deben impulsarse otros niveles de comprensión: nivel referencial, mediante esquematización y modelos, descripciones, etc.; nivel general, mediante exploración, reflexión y generalización; y, finalmente, nivel formal, mediante procedimientos estándares y notación convencional (Freudenthal, 1991).

La práctica docente del profesorado durante el trabajo en contexto debería favorecer que los alumnos comprendan y usen las ideas matemáticas más importantes. Esta idea aparece también en las principales recomendaciones para llevar a cabo buenas prácticas matemáticas en Educación Infantil: en la declaración de posición sobre las matemáticas en la primera infancia de la Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas e Infancia (2012), por ejemplo, se insiste en la necesidad de asegurar que las ideas matemáticas con las que interactúan los pequeños sean relevantes, y en la declaración conjunta de posición sobre las matemáticas en la Educación Infantil (NAEYC & NCTM, 2013) se indica que es importante que el currículo de matemáticas tenga en cuenta las ideas matemáticas fundamentales, entre las que destacan los procesos matemáticos.

Para ello, el maestro debería provocar situaciones que inviten a los alumnos a pensar, argumentar, razonar, descubrir, comprobar, comunicar, conectar, modelar o bien representar ideas matemáticas, considerando de forma explícita los procesos matemáticos expuestos por el NCTM (2003) junto con las subcompetencias matemáticas planteadas por Niss (2002) y la OECD (2004). De este modo, es recomendable que la intervención del profesorado en esta fase sea sobre todo a través de la formulación de buenas preguntas que inviten a los alumnos a interactuar entre ellos e indagar. Fortuny y Rodríguez (2012) añaden que es necesario aprender a mirar con sentido para facilitar la interpretación de las interacciones que se producen.

Otro elemento interesante a considerar durante esta fase es la documentación de las acciones de los alumnos. Esta es, de hecho, una de las principales obsesiones de Malaguzzi (2001) que aquí se asume en su totalidad. Para este autor, la manera más idónea para conocer las capacidades infantiles y desvelar una imagen menos retórica de la infancia es realizar una observación desinteresada de la forma original de aprendizaje de los niños, basada en la escucha y el respeto. Rinaldi (2001, p. 5) indica que una variada y amplia documentación (fotografías, videos, transcripciones) hace visible los procesos de aprendizaje y las estrategias utilizadas por cada niño:

> Es imposible documentar sin observar e interpretar. Por medio de la documentación, el pensamiento o la interpretación, lo documentado llega a ser tangible y capaz de ser interpretado. Las notas, grabaciones y fotografías representan fragmentos de la memoria. Mientras cada fragmento está saturado con la subjetividad de quien documenta, al mismo tiempo es sujeto a la interpretación de otros, como parte de un proceso colectivo de construcción del aprendizaje. En estos fragmentos se encuentra el pasado y también el futuro (por ejemplo: "¿Qué hubiera pasado si...?"). El resultado es un conocimiento abundante, co-construido y enriquecido por las contribuciones de muchos

En síntesis, la documentación tiene un papel relevante porque sirve al profesorado para llevar a cabo procesos de reflexión acerca de la propia práctica, ayuda a los alumnos a ser conscientes de sus aprendizajes y permite comunicar el trabajo realizado a toda la comunidad educativa y a las familias.

Fase 4. Co-construcción y reconstrucción de conocimiento matemático en el aula

Esta fase es fundamental para que los alumnos compartan los conocimientos adquiridos en contexto, consiguiendo de esta forma fomentar la co-construcción de nuevo conocimiento matemático a través del andamiaje colectivo, así como la consolidación o reconstrucción de ideas matemáticas adquiridas previamente. De este modo, se considera que el aprendizaje de las matemáticas es una actividad social, tal como se señala en la declaración de posición sobre las matemáticas en la primera infancia de la Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas e Infancia (2012).

Los procesos de co-construcción y reconstrucción en un contexto de interacción, negociación y diálogo se han planteado desde el modelo de formación del profesorado realista y reflexivo (Korthagen, 2001; Melief, Tigchelaar, & Korthagen, 2010; Tigchelaar, Meleif, van Rijswijk, & Korthagen, 2010). En el ámbito de la educación matemática, Alsina (2007, 2010b) y Flores (2007) han realizado trabajos que, desde esta perspectiva, se han focalizado en la formación del profesorado. Algunos estudios también han analizado cómo los alumnos de las primeras edades co-construyen y reconstruyen sus conocimientos matemáticos (Alsina, 2011).

El punto de anclaje de estos trabajos es la interacción, que a su vez es el elemento fundamental de esta fase. Se trata de promover que los alumnos comuniquen lo que han aprendido en contexto, procurando en todo momento que utilicen un lenguaje matemático adecuado, en sintonía también con algunas de las principales recomendaciones sobre buenas prácticas matemáticas en Educación Infantil, que preconizan la importancia del lenguaje para describir, explicar y justificar ideas matemáticas (Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas e Infancia, 2012).

Desde los auspicios del modelo sociocultural, Planas (2005) analiza la diversidad de significados surgidos en las interacciones sociales en el aula de matemáticas, los elementos que dificultan la construcción de significados compartidos o bien la carencia de negociación. Los trabajos de esta autora señalan que la enseñanza de las matemáticas en cualquier nivel educativo, incluida la Educación Infantil, requiere integrar procesos de interacción, diálogo y negociación alrededor de los contenidos matemáticos y su gestión, puesto que los alumnos a menudo interpretan las normas establecidas de maneras diferentes y de modo distinto a lo que el profesorado espera. Puig Adam (1955, p. 5), en su decálogo de la educación matemática, escribe:

> Es muy difícil definir bien cuando no se domina aún el lenguaje, tanto más difícil cuanto más primario es el concepto definido, como ocurre con gran parte de los conceptos matemáticos. No juzguemos como ignorancia de un concepto o de una propiedad la dificultad de su enunciación. Pese a esta dificultad el niño puede tener clara consciencia de uno y de otra y saberlos aplicar impecablemente. En tales casos, antes de exigir prematuramente repeticiones memorísticas, es preferible esperar a que la perfección expresiva se alcance como consecuencia natural de la fidelidad al pensamiento y del progresivo dominio del lenguaje.

Esta es una de las principales funciones de la comunicación y, en consecuencia, uno de los principales propósitos de esta fase del modelo.

Fase 5. Formalización de los conocimientos matemáticos adquiridos

Desde los auspicios de la EMR se preconiza que los aprendices pasan por distintos niveles de comprensión del conocimiento matemático, que van desde el nivel situacional (en el contexto de la situación) al nivel formal (conocimientos y notaciones convencionales). Estos niveles implican estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva y no constituyen una jerarquía ordenada (Gravemeijer, 1994), pero en definitiva persiguen que progresivamente los alumnos sean capaces de representar la realidad -que es concreta- de forma abstracta (simbólica, formal).

Treffers (1987) indica que se accede al nivel formal a través de la matematización progresiva, bajo dos formas: a) matematización horizontal, que consiste en convertir una situación problemática contextualizada en un problema matemático, basándose en intuición, sentido común, aproximación empírica, observación y experimentación inductiva; b) matematización vertical, que conlleva estrategias de reflexión, generalización, prueba, rigor (limitando interpretaciones y validez), simbolización y esquematización con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática.

En la etapa de Educación Infantil es necesario, pues, promover que los alumnos empiecen a representar de manera simbólica las situaciones concretas de la realidad

(Alsina, 2006). Por esta razón, una buena práctica debería finalizar, a medida que avanzan las posibilidades de representación de los alumnos, con la formalización de los aprendizajes matemáticos adquiridos. Los alumnos deberían ir adquiriendo progresivamente herramientas que les permitan formalizar los aprendizajes a través del lenguaje escrito en general y del lenguaje algebraico en particular. La Figura 3 muestra un ejemplo de abstracción progresiva de la idea matemática "dos".

	**X X** / / **O O**	2
Representación concreta de "dos" en contexto (dibujo de dos huevos rotos y asociación término a término)	Representaciones pictóricas de "dos" (signos y asociación término a término)	Representación abstracta de "dos" (símbolo propio del lenguaje matemático)

Figura 3. Abstracción progresiva de la idea matemática "dos"

En las primeras edades no es aconsejable asociar el aprendizaje de las matemáticas exclusivamente a lo formal. Se insiste en esta idea puesto que, tradicionalmente, se ha considerado la adquisición de conocimiento formal de forma prematura. Así, en la enseñanza de los primeros números naturales, una práctica muy habitual ha consistido en vincular su aprendizaje exclusivamente a la adquisición de la notación convencional. La Figura 4 muestra un ejemplo de práctica descontextualizada de la idea matemática "dos" propia del enfoque de destrezas (Baroody & Coslick, 1998):

Figura 4. Práctica descontextualizada de la idea matemática "dos"

En el Modelo de Alfabetización Matemática en la Infancia, la práctica anterior tiene sentido sólo si previamente se ha accedido al conocimiento en situaciones contextualizadas. Por esta razón, la fase de formalización se sitúa en las fases finales de la secuencia o itinerario didáctico.

Fase 6: *Reflexión sistemática sobre la práctica matemática realizada*

Para cerrar la secuencia de fases es imprescindible contemplar la reflexión sistemática a partir de la propia acción, con el objeto de mejorarla, tal como sugieren las principales recomendaciones sobre buenas prácticas matemáticas en Educación Infantil. En la declaración de posición sobre las matemáticas en la primera infancia de la Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas e Infancia (2012), por ejemplo, se indica que la evaluación debería usarse para planificar nuevas actividades e intervenciones, y en la declaración conjunta de posición sobre las matemáticas en la Educación Infantil (NAEYC & NCTM, 2013) se hace alusión explícita a la relevancia de apoyar el aprendizaje mediante la evaluación continua y reflexiva.

En el contexto de la formación del profesorado inicial y permanente, la reflexión sistemática sobre la propia práctica ha generado mucha literatura. Schön (1983) planteó que un profesional debe saber, saber hacer, saber moralmente bien y reflexionar sobre su acción. Para este autor, pues, el maestro necesita de la reflexión planificadora antes de emprender una acción formativa; de la reflexión activa o aquella que se ejecuta en la práctica real y de la post-activa que evalúa la práctica finalizada. En todos los casos, la reflexión tiene que ser una reflexión documentada, contrastada y que permita poner en marcha procesos de reajuste y mejora. Posteriormente, otros autores han trabajado alrededor de la competencia reflexiva del profesorado para mejorar su práctica (Korthagen, 2001; Melief, Ticgchelaar & Korthagen, 2010; Perrenaud, 2004; Tigchelaar, Melief, van Rijswijk & Korthagen, 2010).

Arcavi (2016) desarrolla el proyecto VIDEO-LM para indagar cómo apoyar a los profesores hacia la toma de conciencia acerca de su propia práctica profesional y la consecuente toma idónea de decisiones en el aula. VIDEO-LM se inspira en el estudio de clases japonés (*Lesson Study*) y los principios esenciales del marco de Schoenfeld (2010), que sostiene y demuestra que es posible describir, explicar y hasta predecir la toma de decisiones del profesor y sus acciones subsiguientes en términos de sus conocimientos, sus objetivos y sus creencias/predisposiciones. Con este proyecto, pues, se pretende desarrollar la capacidad de reflexión acerca de las prácticas de aula en base a observaciones y análisis de videos de clase. Para lograr este propósito, se contemplan seis componentes de reflexión para mejorar la propia práctica: 1) ideas matemáticas y meta-matemáticas de la lección; 2) objetivos explícitos e implícitos atribuibles al docente; 3) tareas asignadas y su desarrollo en la clase; 4) interacciones profesor-alumno; 5) dilemas docentes durante la clase y su resolución; 6) creencias del profesor acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje inferidos de la lección.

Llevar a cabo una reflexión sistemática con el objeto de mejorar la propia práctica implica preguntarse acerca de los conocimientos matemáticos, que hacen referencia al listado de contenidos y procesos que deberían explicitarse en la fase 1 de nuestro modelo (¿qué se enseña); los conocimientos didácticos, que hacen referencia a la planificación y la gestión de la práctica docente descritos en las fases 2 a 5 de nuestro modelo (¿cómo se enseña?); y lo que piensa el profesor acerca de lo que enseña y cómo lo enseña, que se incluye en esta fase final del modelo (¿qué se puede mejorar?).

Algunos autores han elaborado instrumentos que pueden ayudar al profesorado de las primeras edades a analizar y reflexionar acerca de sus prácticas matemáticas. Coronata (2014) y Alsina y Coronata (2014) elaboran un instrumento para analizar la presencia de procesos matemáticos en la práctica docente. El diseño, construcción y validación del instrumento sigue seis fases: 1) análisis histórico-epistemológico de procesos matemáticos y sus significados; 2) estudio de investigaciones sobre procesos matemáticos en las prácticas docentes del profesorado de Educación Infantil; 3) análisis del tratamiento otorgado a los procesos matemáticos en el currículo; 4) construcción de la versión piloto del instrumento; 5) revisión mediante juicio de expertos; y 6) construcción de la versión final del instrumento. Maurandi, Alsina y Coronata (en prensa) han analizado la fiabilidad del instrumento a partir de 95 entrevistas a maestros. Los datos se han analizado con el paquete estadístico *R Core Team* (R versión 3.1.0) sobre una plataforma i686-pc-linux-gnu (32-bit). Con el paquete *Psych* se ha calculado el coeficiente alfa de Cronbach: resolución de problemas (0.86); razonamiento y prueba (0.88); conexiones (0.82); comunicación (0.81) y representación (0.79). Esto permiten afirmar que todos los ítems están relacionados significativamente con aquellos construidos para evaluar la misma faceta del factor, por lo que forman parte del mismo constructo (Revelle, 2015). Este instrumento constituye una herramienta base para medir la presencia o ausencia de procesos matemáticos en la práctica docente, por lo que puede ser útil para apoyar y guiar la reflexión sistemática sobre la práctica matemática.

Consideraciones finales

Se ha presentado la caracterización de un modelo para fomentar la alfabetización matemática en la infancia que, por sus características, puede ser aplicado en los distintos niveles escolares de Educación Infantil, y que podría ser extrapolable a la etapa de Educación Primaria. Para el diseño del modelo se han considerado contribuciones que provienen tanto de la investigación en educación matemática como de la investigación en educación matemática infantil en particular. En concreto, el modelo se fundamenta principalmente en las aportaciones del NCTM (2003, 2015), las declaraciones de posición sobre la educación matemática infantil de varios organismos internacionales (Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas e Infancia, 2012; NAEYC & NCTM, 2013), así como los principios de la EMR (Freudenthal, 1973, 1991). El diagrama siguiente esquematiza las seis fases que de momento tiene el modelo descrito para fomentar la alfabetización matemática en la infancia:

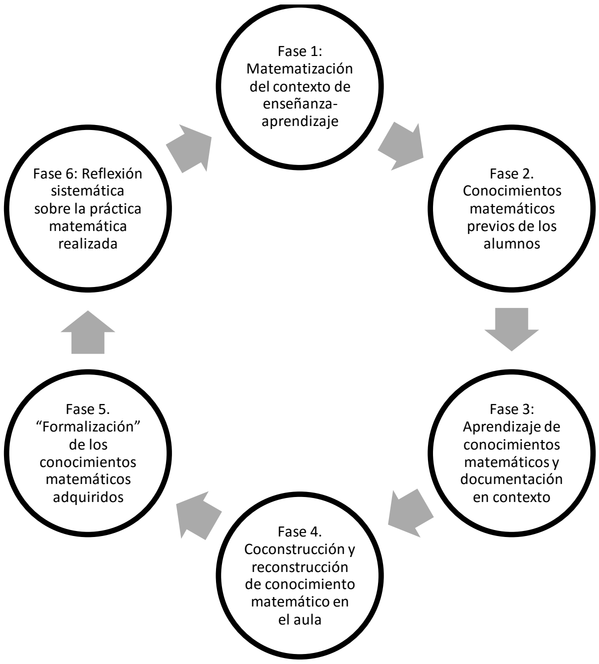


Figura 5. Modelo de Alfabetización Matemática en la Infancia

Como en la secuencia planteada en Alsina (2016) para el diseño y gestión de actividades matemáticas competenciales, el modelo aquí presentado parte de que, una vez finalizada la práctica docente en el aula, el alumno debería haber aprendido un nuevo conocimiento matemático importante con profundidad y comprensión que, a su vez, ha de ser punto de partida de un nuevo aprendizaje. El maestro, a partir de la reflexión sistemática de su práctica, planificará nuevas prácticas para que, desde lo concreto, el alumno pueda conectar nuevos aprendizajes con el conocimiento (formal) interiorizado en una práctica matemática anterior. Todo ello, para fomentar el uso comprensivo y eficaz del conocimiento matemático, es decir, la alfabetización matemática del alumno.

Uno de los principales desafíos al presentar un modelo de este tipo consiste en producir "indicadores de éxito", que a su vez implica definir "éxito" en un modelo de este tipo (Arcavi, 2016). Consideramos que los indicadores del instrumento para analizar la presencia de procesos matemáticos en la práctica docente (Coronata, 2014; Alsina &

Coronata, 2014) pueden ser el punto de partida para obtener datos en el sentido planteado por Arcavi. En el futuro será necesario diseñar nuevos estudios orientados, por lo menos, en una triple dirección: 1) establecer nuevos indicadores para analizar la eficacia del Modelo de Alfabetización Matemática en la Infancia; 2) determinar los principales beneficios y las dificultades que plantea el modelo descrito; 3) replantear, suprimir o incorporar nuevas fases con el propósito de que finalmente sea un modelo útil para diseñar, gestionar y evaluar buenas prácticas matemáticas en el aula de Educación Infantil que fomenten la alfabetización matemática de los alumnos.

Referencias

Alsina, Á. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años.* Barcelona: Editorial Octaedro-Eumo.

Alsina, Á. (2007). El aprendizaje reflexivo en la formación permanente del profesorado: un análisis desde la didáctica de la matemática. *Educación Matemática, 19*(1), 99-126.

Alsina, Á. (2010a). La “pirámide de la educación matemática”, una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa, 189,* 12-16.

Alsina, Á. (2010b). El aprendizaje reflexivo en la formación inicial del profesorado: un modelo para aprender a enseñar matemáticas. *Educación Matemática, 22*(1), 149-166.

Alsina, Á. (2011). *Educación matemática en contexto de 3 a 6 años.* Barcelona: ICE-Horsori.

Alsina, Á. (2013). Educación Matemática en Infantil: Investigación, Currículum, y Práctica Educativa. *REDIMAT, 2*(1), 100-153.

Alsina, Á. (2014). Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave. *Números 86,* 5-28.

Alsina, Á. (2016). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. *Épsilon, 33*(1), 7-29.

Alsina, Á., & Coronota, C. (2014). Los procesos matemáticos en las prácticas docentes: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 3*(2), 21-34.

Arcavi, A. (2016). Promoviendo conversaciones entre docentes acerca de clases filmadas de Matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 15,* 385-396.

Asociación Australiana de Profesores de Matemáticas e Infancia (2012). Declaración de posición sobre las matemáticas en la primera infancia. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(2), 1-4.

Baroody, A. J., & Coslick, R.T. (1998). *Fostering Children's Mathematical Power: An Investigative Approach to K-8 Mathematics Instruction*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, D. H. (2004). Major themes and recommendations. En D.H. Clements, J. Sarama, & A.M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 7-72). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2009*). Learning and teaching early math: The learning trajectories approach.* Nueva York: Routledge.

Coronata, C. (2014). *Presencia de los procesos matemáticos en la enseñanza del número de 4 a 8 años. Transición entre la Educación Infantil y Primaria.* Trabajo de Tesis Doctoral. Universidad de Girona.

de Castro, C. (2007). La evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil. *UNION*, *11*, 59-77.

de Castro, C. (2016). El estudio de documentos curriculares como organizador de la investigación en educación matemática infantil. En J. A. Macías y otros (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 39-52). Málaga: SEIEM.

de Castro, C., Flecha, G., & Ramírez, M. (2015). Matemáticas con dos años: buscando teorías para interpretar la actividad infantil y las prácticas docentes. *Tendencias Pedagógicas, 26,* 89-108.

Edo, M. (2016). Emergencia de la Investigación en Educación Matemática Infantil. Juego y Matemáticas. En J. A. Macías y otros (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 53-66). Málaga: SEIEM.

Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. *PNA*, *4*(1), 139-159.

Fortuny, J. M., & Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1,* 23-37.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

Fuson, K. C., Clements, D. H., & Beckman, S. (2009). *Focus in prekindergarten: Teaching with curriculum focal points.* Reston: NCTM& NAEYC.

Gómez, P., Cañadas, M. C., Bracho, R., Restrepo, A. M., & Aristizábal, G. (2011). Análisis temático de la investigación en Educación Matemática en España a través de los Simposios de la SEIEM. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco & M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 371-382). Ciudad Real: SEIEM.

Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CD-ß Press Freudenthal Institute.

Korthagen, F. A. J. (2001), *Linking practice and theory. The pedagogy of realistic teacher education.* Londres: Lawrence Erlbaum Associates.

López, M. & Alsina, Á. (2015). La influencia del método de enseñanza en la adquisición de conocimientos matemáticos en educación infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 4*(1), 25-34.

Malaguzzi, M. (2001). *La educación infantil en Reggio Emilia.* Barcelona: Rosa Sensat-Octaedro.

Maurandi, A., Alsina, Á., & Coronata, C. (en prensa). Los procesos matemáticos en la práctica docente: análisis de la fiabilidad de un cuestionario de evaluación. *Educatio S. XX1.*

Melief, K., Tigchelaar, A., & Korthagen, F. (2010). Aprender de la práctica. En O. Esteve, K. Melief & Á. Alsina (Eds.), *Creando mi profesión. Una propuesta para el desarrollo profesional del profesorado* (pp. 19-38). Barcelona: Editorial Octaedro.

Mercer, N. (2001). *Palabras y mentes.* Barcelona: Paidós.

NAEYC & NCTM (2013). Matemáticas en la Educación Infantil: Facilitando un buen inicio. Declaración conjunta de posición. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 1-23.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Sevilla: Thales.

NCTM (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático de todos.* Reston: NCTM.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom Project.* Roskilde: Roskilde University.

NRC (2014). Fundamentos cognitivos para la iniciación en el aprendizaje de las matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 3*(1), 21-48.

OECD (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003.* París: OECD.

OECD (2007). *PISA 2006 Science competence for tomorrow's world.* París: OECD.

Perrenoud, P. (2004). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar. Profesionalización y razón pedagógica.* Barcelona: Graó.

Planas, N. (2005). El papel del discurso en la construcción del Discurso de la práctica matemática. *Cultura y Educación, 17*(1), 19-34.

Planas, N. & Alsina, A. (2014). Epílogo. En N. Planas y A. Alsina (Eds.), *Educación matemática y buenas prácticas* (pp. 265-272). Barcelona: Graó (2ª edición).

Price, M. H. (1986). The Perry Movement in school mathematics. En M. H. Price (Ed.), *The development of the secondary curriculum* (pp. 7-27). Londres: Croom Helm.

Puig Adam, P. (1955). Decálogo de la didáctica de la matemática media. *La Gaceta Matemática, 1ª Serie, Tomo VII, 5 y 6*, 2-6.

Revelle, W. (2015). *Psych: procedures for personality and psychological research.* Evanston: Northwestern University.

Rinaldi, C. (2001) The pedagogy of listening: The listening perspective from Reggio Emilia. *Children in Europe, 1,* 1-5.

Schoenfeld, A.H. (2010). *How we think: a theory of goal-oriented decision making and its educational applications.* Nueva York: Routledge.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner. How professionals think in action.* Londres: Temple Smith.

Sierra, T. A., & Gascón, J. (2011). Investigación en Didáctica de las Matemáticas en la Educación Infantil y Primaria. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco & M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 125-163). Ciudad Real: SEIEM.

Sullivan, P., & Lilburn, P. (2002). *Good questions for math teaching.* Sydney: Oxford University Press.

Tigchelaar, A., Melief, K., van Rijswijk, M., & Korthagen, F. (2010). Elementos de una posible estructura del aprendizaje realista en la formación inicial y permanente delprofesorado. En O. Esteve, K. Melief & A. Alsina (Eds.), *Creando mi profesión. Una propuesta para el desarrollo profesional del profesorado* (pp. 39-64). Barcelona: Editorial Octaedro.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction. The Wiskobas Project.* Dordrecht: Reidel Publishing Co.

Vigotsky, L.S. (1978) *Mind in society. The development of higher psychological processes.* Cambridge: Harvard University Press.

Referencia del autor

Ángel Alsina, Universidad de Girona (España). angel.alsina@udg.edu

Characterization of a mathematical model to empower mathematical literacy in children: linking research with good practices

In recent decades, various international organizations have indicated the benefits of mathematics childhood education for both children and society (NCTM, 2003; OECD, 2007). Greater consideration of children's mathematics education has led to: a) the extension of the age range, including children from 0 to 3 years (e.g. Clements & Sarama, 2009; NRC, 2014); b) the gradual increase of research on childhood mathematics education in the Spanish and European contexts (e.g. Alsina, 2013, Edo, 2016). The purpose of this article is to begin to characterize a model to empower mathematical literacy in childhood, considering the progress in areas and research agendas of childhood mathematics education. The Mathematical Model Childhood Literacy draws on findings about mathematics teaching and good practice. These findings come from research in mathematics education in general and in early childhood mathematics education. Specifically, the model is based on the contributions of NCTM (2003, 2015), position statements on mathematics education child of international organizations (e.g. NAEYC & NCTM, 2013), and the EMR principles (Freudenthal, 1973, 1991). It is a model of six phases: mathematisation of the teaching and learning context; prior mathematical knowledge of students; learning mathematical knowledge and documentation in context; co-construction and reconstruction of mathematical knowledge in the classroom; formalization of mathematical knowledge; and systematic reflection on the mathematical practice done. It is a continuous sequence of phases in a circular flow: contents and processes for teaching in a real or realistic context (what is taught); teaching knowledge, about planning and management of teaching practice (how do you teach?); and what the teacher thinks about what to teach and how (what can be better?). In short, the model assumes that teaching must lead the student to learn important new mathematical knowledge with depth and understanding. This new knowledge will be the starting point for further learning. It will promote understanding and effective use of mathematical knowledge from the early years.

Análisis de un dispositivo didáctico propuesto por estudiantes para profesor de matemáticas

Ana Rosa Corica, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas; Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología, Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. (Argentina)

María Rita Otero, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas; Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología, Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. (Argentina)

Recibido el 23 de octubre de 2015; Aceptado el 29 de diciembre de 2016

Análisis de un dispositivo didáctico propuesto por estudiantes para profesor de matemáticas

En este trabajo discutimos resultados del análisis de un dispositivo didáctico, propuesto por estudiantes para profesor de matemáticas, que vivieron parte de su formación didáctica en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. El dispositivo fue diseñado a fin de conservar características de la pedagogía que involucra una enseñanza por Recorrido de Estudio e Investigación. Los estudiantes formulan una cuestión generatriz adecuada para realizar una enseñanza basada en el paradigma de la investigación, sin embargo, tienen dificultades para explorar y ampliar la pregunta, y la reducen en sus alcances y generatividad. Inferimos que las condiciones y restricciones que afectan la gestión de la enseñanza de matemáticas en la escuela secundaria hacen que la atención de estudiantes para profesor se ubique en determinar las praxeologías matemáticas y tareas a estudiar del diseño curricular.

Palabras clave. Formación de profesores de matemática, Teoría Antropológica de lo Didáctico, dispositivo didáctico, Recorrido de Estudio e Investigación.

Análise de um dispositivo didático proposto por professores-alunos em matemáticas

Resumo

Neste trabalho discutimos resultados da análise de um dispositivo didático, pedidos em casamento por estudantes para professor em matemáticas que ele foi formado na Teoria Antropológica da coisa Didática. O dispositivo foi projetado com o propósito que conserva característica da pedagogia que envolve um ensino para Viagem de Estudo e Investigação. Os estudantes formulam uma pergunta generatriz apropriado levar a cabo um ensino baseado no paradigma da investigação, porém, eles têm dificuldades para explorar e aumentar a pergunta e eles reduzem isto nos alcances e generatividad. Nós deduzimos que as condições e restrições que afetam a administração das matemáticas que ensinam na escola secundária fazem que a atenção dos estudantes para professor fica situada determinando que praxeologías matemáticas e o que atarefa para estudar do desígnio curricular.

Palavras chave. Formação de professores em matemática, Teoria Antropológica do Didático, dispositivo didático, Percurso de Estudo e Investigação.

Para citar: Corica, A. R. y Otero, M. R. (2017). Análisis de un dispositivo didáctico propuesto por estudiantes para profesor de matemáticas. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *12*, 79-95.

Analysis of a didactic device proposed by pre-service mathematics teachers

Abstract

In this paper, we discuss results of a didactic device proposed by pre-service mathematics teachers who were trained in the Anthropological Theory of Didactics. The device was designed in order to keep features of the pedagogy involving Research and Study Paths. Students formulate an appropriate question for generating teaching based on the research paradigm. However, they have difficulties to explore and expand the question, reducing its scope and generativity. We infer that the conditions and restrictions on the management of mathematics teaching in high school recommend locating the attention of pre-service teachers into the study of praxeologies and tasks in the curriculum design.

Key words. Mathematics teacher education, Anthropological Theory of Didactics, didactic device, Research and Study Path.

Analyse d'un dispositif didactique proposé par les futures enseignantes des mathématiques

Résumé

À ce travail nous discutons des résultats de l'analyse d'un dispositif didactique, proposé par des étudiants pour le professeur des mathématiques qu'ils ont été formés dans la Théorie Anthropologique du Didactique. Le dispositif a été dessiné par le propos qui conserve les propres caractéristiques de la pédagogie qui implique un enseignement par le Parcours d'Étude et de Recherche. Les étudiants formulent une question une génératrice appropriée pour réaliser un enseignement basé sur le paradigme de la recherche, cependant, ont les difficultés d'explorer et d'agrandir la question, et la réduisent de ses portées et generatividad. Nous déduisons que les conditions et les restrictions qui affectent la gestion de l'enseignement des mathématiques dans l'école secondaire actuelle font que l'attention des étudiants pour professeur se trouve dans décider quels praxeologías mathématiques et quelles tâches d'étudier du dessin curricular.

Paroles clés. Formation de professeurs des mathématiques, Théorie Anthropologique du Didactique, dispositif didactique, Parcours d'Étude et de Recherche.

1. Introducción

La formación de profesores de matemática constituye una de las líneas actuales de investigación en didáctica de la matemática. A partir de la adopción de diversos marcos teóricos, los investigadores han procurado abordar la problemática de la formación de profesores de matemática, estudiando sus concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la materia, la formación de la profesión docente y las prácticas de estos profesores (Artaud, Cirade & Jullien, 2011; Azcárate, 2004; Ball, Thames & Phelps, 2008; Climent, Romero, Carrillo, Muñóz-Catalán & Contreras, 2013; Da Ponte, Quaresma & Branco, 2012; Llinares, Valls & Roig, 2008; Oliveira & Batista, 2013; Parada & Pluvinage, 2014; Ruiz, Sierra, Bosch & Gascón, 2014).

Según Llinares (2008) en la formación del profesor de matemática es central el desarrollo de conocimiento en los estudiantes para profesor, con el propósito de enseñar matemáticas, y aprender a utilizar y construir conocimiento a partir de la reflexión sobre la enseñanza. Chevallard y Cirade (2009) indican que la formación del profesor de matemática requiere de un equipamiento praxeológico, cuya construcción y desarrollo es responsabilidad de la comunidad de investigadores en didáctica de la matemática en colaboración con la profesión docente. En este sentido, diseñamos y comenzamos a experimentar un curso para estudiantes para profesor en matemática (Corica & Otero, 2016a, 2016b, 2016c). El objetivo del curso es que los alumnos del profesorado adopten un modelo didáctico no tradicional, basado en la investigación y en la vinculación de la matemática con otras disciplinas. En este trabajo presentamos resultados del análisis de un dispositivo didáctico diseñado por dos estudiantes para profesor en matemática (EPM) a fin de analizar aspectos del paradigma de investigación que adoptan al proyectar una enseñanza para la escuela secundaria.

2. Características del curso para la formación didáctico-matemática de EPM

El curso que diseñamos para la formación didáctico-matemática de EPM se compone de tres etapas. En la primera se propone el estudio de dos situaciones que se gestionan de manera simultánea. Se trata de involucrar a los EPM en experiencias que los aproximen al paradigma de investigación en todo su proceso formativo didáctico-matemático. Una situación consiste en que los EPM estudien un dispositivo didáctico basado en el paradigma de la investigación y del cuestionamiento del mundo (Parra, Otero & Fanaro, 2013a, 2013b). La otra situación consiste en abordar una cuestión generatriz vinculada con una problemática fundamental de la profesión de profesor: cómo enseñar el saber matemático. Esto requiere formular preguntas según los intereses y necesidades del grupo. La elaboración de respuestas se realiza a partir de recursos proporcionados por los EPM y el profesor del curso. Este último aporta bibliografía sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y sus desarrollos en correspondencia con el diseño curricular del curso. Aquí se procura que los EPM vivan en primera persona el estudio de la TAD involucrados en una enseñanza basada en los principios de la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo. Esto da lugar a gestionar una actividad en la que surgen preguntas no previstas, provocando que el estudio tome varias direcciones. Analizar con mayor o menor profundidad estas preguntas se vincula al interés del grupo. A lo largo de la propuesta logramos incorporar gérmenes de la pedagogía indicada. Los EPM logran ante una pregunta, generar otras en lugar de respuestas, y que el producto del estudio sea compartido y defendido conjuntamente. Sin embargo, es difícil contener la búsqueda de respuestas inmediatas y acabadas, cuando el producto relativamente final del estudio se obtiene tras dos meses de inicio del curso (Corica y Otero, 2016b). Una cuestión propuesta por los EPM se refiere a caracterizar diferentes dispositivos didácticos según distintos enfoques en didáctica de la matemática. Esto deriva en la segunda etapa del curso.

La segunda etapa consistió en el diseño de dispositivos didácticos por los EPM, en función de la formación didáctica y matemática que experimentaron. Para el desarrollo profesional, se considera la selección, análisis y evaluación de dispositivos didácticos que contemplen gestos de la pedagogía de la investigación, para ser desarrollados en las condiciones actuales de las instituciones escolares. Parte del desarrollo profesional de los EPM tendrá lugar en instituciones donde los alumnos son expuestos al estudio de disciplinas disgregadas, cuyos contenidos vienen dados por un diseño curricular que determina las nociones a estudiar en cada año escolar. Esto constituye una condición que impide realizar una genuina enseñanza por Recorrido de Estudio e Investigación (REI). Aquí reportamos resultados correspondientes a esta segunda etapa del curso.

La tercera etapa consistió en que los EPM reformulen sus propuestas en relación a las condiciones y restricciones de la escuela actual, conociendo las características de un curso real de la escuela secundaria. Aquí los EPM tienen el primer encuentro con la institución en posición de profesores. En primera instancia, los EPM conocen las características del curso participando como ayudantes en un periodo de al menos dos meses. Luego, los EPM tienen la posibilidad de experimentar la implementación de sus dispositivos didácticos. Finalmente, se propone que los EPM, reformulen sus propuestas en función de la experiencia vivida, para realizar futuras implementaciones.

3. Marco teórico

En este trabajo se adopta como referencial a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999, 2007, 2012, 2013). Siguiendo las líneas de investigación que propone la teoría, se plantea la necesidad de introducir en los sistemas de enseñanza procesos de estudio funcionales, donde los saberes no constituyan monumentos que el profesor enseña a los alumnos, sino herramientas materiales y conceptuales, útiles para estudiar y resolver situaciones problemáticas. Los REI son dispositivos que permitirían enfrentar el proceso de monumentalización del saber y hacer vivir, lo que Chevallard denomina la pedagogía de la investigación en clase de matemáticas. Para dicha pedagogía se requiere un conjunto de gestos didácticos, que implican modificaciones radicales de la enseñanza tradicional (Chevallard, 2012).

La pedagogía de los REI cuestiona elementos del contrato escolar tradicional: el profesor como templo del saber, único garante de la validez de las respuestas y gestor del tiempo didáctico, y el carácter individual del aprendizaje. Estos elementos quedan sustituidos por el modelo de un proceso de estudio colectivo, dirigido por un profesor que comparte la responsabilidad de la gestión de los momentos didácticos (Chevallard, 1999). El objetivo del estudio viene definido como conjunto de cuestiones Q a las que el grupo se propone aportar una respuesta R. El punto de partida de un REI es una cuestión generatriz Q viva para el grupo y cuya respuesta no es directamente accesible. Esta respuesta debe constituir una aportación significativa, en el sentido de ampliar el universo praxeológico de los estudiantes. Así, se movilizan los recursos, medios, saberes y respuestas disponibles que sean necesarios con tal de construir R. Se acaba generalmente incluyendo praxeologías por lo menos locales, integrando elementos praxeológicos que pueden ir más allá del nivel regional e incluso disciplinario.

La implementación de una enseñanza por REI modifica la relación entre profesor, alumnos y saber. Esto implica cambios en los tiempos didácticos (cronogénesis), la forma en que se organiza el estudio (mesogénesis) y el lugar de los actores del sistema didáctico en clase (topogénesis). La gestión de una enseñanza por REI requiere ejecutar gestos didácticos, propios del estudio y la investigación, denominados dialécticas (Chevallard, 2013): la dialéctica del estudio y la investigación, del paracaidista y el trufador, de entrar y salir del tema, de las cajas negras y cajas claras, de la lectura y escritura, de los media y los medios, de la difusión y recepción de respuestas, del individuo y el colectivo, del análisis y la síntesis. Siguen tres dialécticas que surgen en los datos que analizamos y que consideramos esenciales en un REI:

- La dialéctica del estudio y la investigación. Una investigación supone la combinación del estudio de preguntas y respuestas.
- La dialéctica de los media y los medios. La elaboración de las sucesivas respuestas provisionales requiere de respuestas preestablecidas, accesibles a través de medios de comunicación y difusión: los media (libros, artículos de investigación, apuntes de clase). Estas respuestas son producto de conjeturas y deben ponerse a prueba, resultando ser transformadas e incorporadas al medio.
- La dialéctica del individuo y el colectivo. Los estudiantes con su director de estudio acuerdan las tareas y negocian las responsabilidades de cada uno.

Una enseñanza por REI supone el estudio de preguntas acordadas por todos los integrantes de la comunidad de estudio. Se reparten responsabilidades y asignan tareas individuales, para luego retomar el proceso grupal de elaboración de una respuesta. Las obras encontradas o reencontradas para elaborar la respuesta, serán estudiadas para establecer su pertinencia. Así, surgirán nuevas preguntas que la comunidad de estudio decidirá cuándo y cómo responder. La responsabilidad del estudio recae en la comunidad productora, que sostiene y valida las respuestas que genera colectivamente.

4. Metodología

Nuestra investigación es cualitativa, exploratoria y descriptiva (Hernández, Fernández & Baptista, 2010). Se trata de un estudio de caso clínico, metodología propia de la TAD. Procuramos conocer cuáles son las características esenciales de un dispositivo didáctico propuesto por dos EPM de Matemática. El estudio se desarrolló con estudiantes de tercer año de una carrera de profesor en matemática de una Universidad Nacional Argentina. El curso estaba compuesto por 12 EPM, de entre 20 y 28 años. El plan de estudio del profesorado se compone de 25 cursos. En 14 de ellos se estudia matemática pura y los 11 restantes son de formación pedagógica. Se trata de estudiantes que carecen de experiencia docente, que conocen la escuela secundaria por su experiencia como alumnos y por lo estudiado en su proceso formativo. Algunas de estas características restringirán su actividad docente, porque les impondrán condiciones que no pueden modificar: tales como el lugar de la disciplina matemática en el currículo, y la inflexibilidad con la que se adopta este en las instituciones.

El desarrollo de la primera y segunda etapa del dispositivo didáctico para la formación de EPM duró 4 meses, con dos encuentros semanales (uno de 3 horas y otro de 4). Durante las sesiones que se propusieron en el curso, los EPM formaron los mismos grupos de trabajo de 2 o 3 integrantes. En un encuentro, los EPM estudiaron un REI codisciplinar (Parra, Otero & Fanaro, 2013a, 2013b). Esto generó un tipo de actividad a la que los EPM nunca estuvieron expuestos y que se pretende que aproximen en la gestión de sus prácticas. En otro encuentro, se propuso analizar la cuestión *¿Cómo diseñar e implementar dispositivos didácticos para el estudio de la matemática?* En esta tarea se procuró que los EPM formularan pares de preguntas y respuestas relacionadas con la profesión de profesor de Matemática. Esto tuvo lugar durante 7 sesiones. El medio gestado contiene preguntas centradas en caracterizar los atributos de los actores del sistema didáctico (Alumno y Profesor) y la manera de difundir el saber. En general, se trata de preguntas genéricas sobre la profesión, que son formuladas con independencia de las nociones de enseñanza.

Un aspecto indagado por los EPM fue el diseño de dispositivos didácticos a partir de diferentes enfoques en didáctica de la Matemática. En esta caracterización los EPM profundizaron en la descripción de REI y Actividades de Estudio e Investigación. Así, se inició un estudio en cada grupo que tuvo lugar durante 5 sesiones, donde buscaron y analizaron distintas investigaciones que involucran una enseñanza por REI (Barquero, Bosch & Gascón, 2011; Fonseca, 2011; Llanos & Otero, 2012; Serrano, Bosch & Gascón, 2007). Luego cada grupo diseñó dispositivos didácticos, que a su entender eran propios del paradigma de la investigación. Esto se desarrolló en función de las necesidades de cada grupo, quienes en esta etapa fueron los que propusieron los media para el estudio. En general, en las propuestas encontramos la explicitación de una cuestión generatriz inicial y sus derivadas, junto a algunas indicaciones de su posible gestión en el aula. Las cuestiones iniciales formuladas por cada grupo son las siguientes: [Grupo 1] *¿Cómo analizar el crecimiento demográfico?*, [Grupo 2] *Existen diversas maneras para trasladarse desde la casa de cada uno de ustedes al colegio, ¿Cuál consideran que es la más conveniente?*, [Grupo 3] *¿Cómo describir el movimiento de un péndulo simple?*, [Grupo 4] *¿Cómo se puede describir la trayectoria de una pelota?*, [Grupo 5] *¿Qué comportamiento tiene el crecimiento bacteriano?*

Las propuestas del Grupo 1 y 5 se refieren a describir dinámicas de poblaciones (ver una en Corica & Otero, 2016a). Mientras que los Grupos 3 y 4 centran su estudio en la descripción del movimiento de cuerpos. En este artículo describimos la propuesta del Grupo 2. Involucra una situación en la que la respuesta a la cuestión no se encuentra inscripta completamente en textos. Es una cuestión cuyo estudio podría engendrar una enseñanza que evidencie gestos propios de la pedagogía de la investigación. Los EPM del Grupo 2 propusieron un dispositivo didáctico estructurado en 4 sesiones. Esta formalización se contrapone a la atemporalidad que requiere una enseñanza por REI. El estudio no puede ser restringido de forma estricta a un espacio temporal, pues se encuentra vinculado al medio gestado por el grupo.

Pasamos a profundizar en la descripción del dispositivo didáctico propuesto por el Grupo 2. Para el análisis tomamos como punto de partida la hipótesis de la TAD, según la cual toda actividad humana regularmente realizada puede describirse en términos de praxeologías. Así, consideramos el conjunto de preguntas de la propuesta de los EPM y las clasificamos según el género de tarea al que remite su estudio. Una segunda categorización consiste en identificar los tipos de tareas (T_i) que requiere el estudio de cada pregunta y que componen los géneros de tarea.

5. Análisis del dispositivo didáctico diseñado por EPM

La arborescencia de preguntas propuestas por el Grupo 2 es la siguiente:

Q_o: *Existen diversas maneras de trasladarse desde la casa de cada uno de ustedes al colegio, ¿cuál consideran que es la más conveniente?*

Q_{01}: *¿Qué opciones tengo para trasladarme?*

Q_{02}: *¿Qué distancia separa al colegio de mi casa?*

Q_{03}: *¿Cuánto tiempo tardo en llegar?*

Q_1: *Considerando que se mueven en condiciones ideales (esto es, sin tener en cuenta los semáforos, el frenado en algunas esquinas, la aceleración, etc.) ¿cómo determinar exactamente a qué distancia viven y cuánto tiempo necesitan para llegar al colegio con puntualidad?*

Q_{11}: *¿Qué es la velocidad?*

Q_{111}: *¿Cómo se calcula?*

Q_{112}: *¿Qué significa que tenga carácter vectorial?*

Q_{1121}: *¿Qué significan dirección y módulo?*

Q_{113}: *¿Existe un solo tipo de velocidad?*

Q_{1131}: *¿Qué tipo de velocidad involucra este problema?*

Q_{12}: *¿Cómo determinar la velocidad si se tiene como dato la distancia recorrida pero no el tiempo?*

Q_{13}: *¿Qué significa que un movimiento sea rectilíneo?*

Q_{131}: *¿Y uniforme?*

Q_{1311}: ¿Qué significa que la velocidad sea constante?

Q_{14}: ¿Qué representa cada variable y los parámetros de la ecuación del MRU?

Q_{15}: ¿Qué es un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV)?

Q_{151}: ¿Qué es la aceleración?

Q_{152}: ¿Qué diferencia al MRU del MRUV?

Q_{2}: Con los datos y suponiendo que sólo se cuenta con remis y taxi, ¿qué medio de transporte es más redituable y a partir de qué distancia recorrida conviene utilizar uno antes que el otro?

Medio de transporte	Costo bajada de bandera	Costo adicional cada 100m
Taxi	$6, 50	$0,55
Remis	$8,50	$0,35

Q_{21}: Sabiendo a qué distancia está mi casa del colegio, ¿cuánto gasto si voy en remis?

Q_{211}: ¿Cuánto gasto si voy en taxi?

Q_{3}: ¿Qué medio de transporte conviene utilizar y a partir de qué distancia si se produce un cambio en las tarifas de modo tal que la bajada de bandera del taxi aumenta un 30%, la del remis un 50% y el costo adicional por cuadra del remis un 20%?

Q_{4}: Proponer situaciones que requieran, para su resolución, sistemas de ecuaciones lineales. ¿En cuáles convendría usar cada uno de los métodos estudiados y por qué?

Identificamos dos preguntas fundamentales: Q_0, cuyo estudio se centra en explorar una situación real que deben afrontar diariamente los estudiantes, y Q_1, cuyo estudio deriva en preguntas sobre el estudio de nociones de cinemática. Se modeliza la situación real para su análisis ideal. Destaca la arborescencia de preguntas que se gesta a partir del estudio de la situación ideal (Q_1) en relación a la real (Q_0). Encontrar respuestas pre-establecidas en textos simplificó el estudio de los EPM a Q_1. No se permitieron ingresar en zonas donde las respuestas no se encuentran inscriptas, tales como preguntas que nacen del interés y necesidad de la experiencia en el mundo real.

Pasamos a ampliar la descripción de los pares de preguntas y respuestas propuestos por los EPM. En primer lugar, clasificamos el conjunto de preguntas que propusieron los EPM según el género de tarea al que remite su estudio. De esta manera, identificamos preguntas que se vinculan con tres géneros: G_1 : *Calcular*, se refiere a tareas que implican llevar a cabo ciertos procedimientos, basados en reglas que son tomadas como verdaderas, para obtener un resultado que nos permita predecir algunos acontecimientos. G_2 : *Definir*, que conglomera tareas que implican elaborar un glosario de nociones físicas. G_3 : *Analizar*, reúne tipo de tareas que se refieren a modelizar distintas situaciones. Una segunda clasificación consistió en identificar los tipos de tareas (T_i) que requiere el estudio de cada pregunta y que componen los géneros de tareas. De esta manera identificamos 3 tipos de tareas con el Género G_1 : *Calcular*, un tipo de tareas se identifica con el género G_2 : *Caracterizar*, y finalmente otro se identifica con el género G_3 : *Analizar*. Esta propuesta pone de manifiesto la relevancia que le otorgan los EPM al estudio de cuestiones vinculadas con el género de tareas calcular. Estas tareas se vinculan con calcular, y hacer operativas las nociones que se gestan en el estudio de las cuestiones conglomeradas en el género *Definir*. A continuación realizamos la descripción de cada tipo de tareas que identificamos.

T_0: Calcular distancia y tiempo para trasladarse de un punto a otro de una ciudad

Q_0: Existen diversas maneras de trasladarse desde la casa de cada uno de ustedes al colegio, ¿cuál consideran que es la más conveniente?

Q_{01}: ¿Qué opciones tengo para trasladarme?

Q_{02}: ¿Qué distancia separa al colegio de mi casa?

Q_{03}: ¿Cuánto tiempo tardo en llegar?

Q_1: Considerando que se mueven en condiciones ideales (esto es, sin tener en cuenta los semáforos, el frenado en algunas esquinas, la aceleración, etc.) ¿cómo determinar exactamente a qué distancia viven y cuánto tiempo necesitan para llegar al colegio con puntualidad?

La cuestión Q_0 resulta problemática ya que su estudio engendra la formulación de otras cuestiones y conduce a recorrer diversas praxeologías. En lugar de dar respuesta directa a esta pregunta, los EPM respondieron a Q_{01}, Q_{02} y Q_{03}. Para Q_{02} indicaron:

Se responde inmediatamente, los alumnos saben a cuántas cuadras viven del colegio.

Inferimos que para los EPM Q_{02} resulta ser una cuestión en sentido débil, pues los estudiantes responderían inmediatamente. Sin embargo, la pregunta puede tornarse problemática para el grupo de estudiantes al que se podría destinar el dispositivo didáctico. Calcular la distancia entre dos puntos de una ciudad requiere recorrer organizaciones matemáticas de la geometría no euclideana, en particular de la Geometría Taxi, perteneciente a una familia de espacios métricos creados por el matemático Minkowski. Se trata de una geometría no euclidiana aplicada en una malla cuadriculada, en la que las intersecciones de las líneas horizontales con las verticales corresponden a las calles de una *ciudad ideal*. Durante la etapa escolar y de formación de los EPM la única geometría que se propone estudiar es la euclidiana. Esta permite moldear la realidad a través de puntos, rectas, figuras, etc. Pero hay otras geometrías que, a pesar de su relevancia histórica y su presencia en nuestra vida, no forman parte de la formación escolar de los ciudadanos (Barraza & Reyes, 2012; Comini, 2010).

En el dispositivo didáctico elaborado por los EPM, se supone que los alumnos particularizarán su medio de estudio para calcular la distancia desde su vivienda a la escuela. Los EPM proponen una situación posible de estudio en la que se procura calcular la distancia entre dos puntos dentro del radio céntrico de la ciudad de Tandil.

Si se toma el Colegio San José de Tandil (Dirección del Establecimiento: Maipú nº450 (entre Chacabuco y Fuerte Independencia) y la casa particular del alumno ubicada en la calle San Martin nº1250 (entre Alsina y Gral. Roca), la distancia que separará uno del otro será de 11 cuadras

Figura 1. Propuesta de tarea

Como se ve en la Figura 1, la ciudad de Tandil tiene un radio céntrico ortogonal. Sus calles forman una cuadrícula regular: siguen dos direcciones perpendiculares y en cada una de las calles son paralelas a distancia constante. En el estudio de este ejemplo, los EPM indicaron que la distancia de la casa del hipotético estudiante a la escuela es de 11 cuadras, empleando la técnica de contar las cuadras sobre el mapa. Si se pretende contabilizar cuáles son los posibles caminos que puede recorrer el estudiante para arribar a la escuela (considerando que recorra la menor distancia posible) podrá efectuar la construcción y cálculos que se indican a continuación. Así, se puede verificar que cualquiera sea el camino de la casa del estudiante a la escuela (sin retroceder ninguna cuadra), la menor distancia que los separa es de 11 cuadras. Para profundizar en el estudio de esta situación, en primer lugar representamos en el plano cartesiano el plano de la ciudad, donde cada eje representa el número de cuadras:

Figura 2. Representación asociada a la tarea de la Figura 1

La Geometría Taxi difiere de la euclideana en la definición de la métrica. En la primera, la menor distancia entre dos puntos de un plano no es la línea recta. La distancia euclídea entre dos puntos se determina como la longitud del segmento de recta que los une. Así, la distancia entre dos puntos (x, y), (z, w) es $d_E = \sqrt{(x-z)^2 + (y-w)^2}$. Mientras que para la Geometría Taxi, esta distancia resulta ser $d_T = |x-z| + |y-w|$. Para el ejemplo de los EPM, si calculamos la distancia entre A (Escuela) y B (Casa) mediante la Geometría Taxi resulta $d_T = 11$ cuadras. Si efectuamos los cálculos con la Geometría Euclideana, la distancia entre A (Escuela) y B (Casa) es $d_E = 8{,}54$ cuadras. Si bien resulta $d_T > d_E$, la distancia euclideana no es aplicable al mundo real, pues no es posible traspasar las viviendas. Otra pregunta que los EPM derivaron de Q_0 fue Q_{01}. Como respuesta a esta pregunta, indicaron:

Caminando; Bicicleta; Automóvil (personal); Colectivo; Motocicleta; Remis; Taxi; Otras.

No se problematizó la búsqueda del camino óptimo para poder arribar de la casa de los estudiantes a la escuela, y cuántas posibilidades de recorrido existen. Inferimos que se rehúye al estudio matemático y el camino planeado se dirige a estudiar las posibilidades de transporte de un lugar a otro. Si se profundiza en la situación, problematizando sobre la cantidad de caminos directos entre A y B podremos corroborar que la distancia es siempre la misma y de manera genérica podemos calcular la cantidad de caminos directos entre los dos puntos a través de la fórmula: $N = \frac{(m+n)!}{m!n!}$, donde m es la distancia horizontal entre los puntos A (Escuela) y B (Casa) y n, la distancia vertical. Esta fórmula permite el cálculo de una permutación con repetición donde $m + n$ representa la cantidad de elementos que serán permutados. Y m y n representan la cantidad de repeticiones de cada término. Para el ejemplo de la *Figura 2*, resulta que hay 165 caminos posibles para poder llegar de A a B. Así, el estudio de Q_0, Q_{01} y Q_{02} requiere recorrer principalmente praxeologías relativas a números, geometría y combinatoria.

El estudio de Q_{03} condujo a los EPM a explorar las posibles respuestas naturales que podrían ofrecer los estudiantes al que se destinaría este dispositivo didáctico:

Nuevamente, pueden estimar el tiempo que necesitan para llegar a horario al colegio.

Se considera necesario llevar a cabo, luego de las primeras cuestiones derivadas de los alumnos, un debate para convenir algunas de las maneras elegidas y descartar otras; debe excluirse, por ejemplo, el factor económico personal (todos deben tener acceso a los medios de transporte acordados).

Inferimos que pueden surgir respuestas del estilo "vivo a 5 cuadras del colegio, tardaré aproximadamente 10 minutos". Este tipo de respuestas debe ser descartada si se quiere llegar a trabajar con algún modelo que permita calcular exactamente qué medio es más conveniente.

Los EPM propusieron respuestas que podrían aportar los estudiantes y que el profesor debería descartar, tales como factores económicos o cálculos estimativos propios de la experiencia. Lo que se pretende es elaborar una respuesta independiente de la experimentación personal. Esto requiere del estudio de modelos que aporten una respuesta precisa a cualquier situación que se planteen. Así los EPM propusieron el estudio de Q_1*: Considerando que se mueven en condiciones ideales (esto es, sin tener en cuenta los semáforos, el frenado en algunas esquinas, la aceleración, etc.) ¿cómo determinar exactamente a qué distancia viven y cuánto tiempo necesitan para llegar al colegio con puntualidad?* Esta cuestión conduce a simplificar la situación real, e introducirse a estudiar nociones físicas en relación al movimiento de cuerpos. Del estudio de Q_1, se derivaron cuestiones que se ubican bajo el siguiente tipo de tareas.

T_1: Caracterizar nociones físicas relacionadas con la cinemática

Q_{11}: *¿Qué es la velocidad?*

Q_{112}: *¿Qué significa que tenga carácter vectorial?*

Q_{1121}: *¿Qué significan dirección y módulo?*

Q_{113}: *¿Existe un solo tipo de velocidad?*

Q_{1131}: *¿Qué tipo de velocidad involucra este problema?*

Q_{13}: *¿Qué significa que un movimiento sea rectilíneo?*

Q_{131}: *¿Y uniforme?*

Q_{1311}: *¿Qué significa que la velocidad sea constante?*

Q_{14}: *¿Qué representan cada una de las variables y los parámetros de la ecuación del MRU?*

Q_{15}: *¿Qué es un Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV)?*

Q_{151}: *¿Qué es la aceleración?*

Q_{152}: *¿Qué diferencia al MRU del MRUV?*

Con el estudio de las preguntas que se reúnen en T_1 consideramos que se pondría en funcionamiento la dialéctica de entrar y salir de los temas. Pues, los EPM planearon salirse del análisis de la situación que estaban estudiando para ingresar a la física, y poder aportar respuesta. De la respuesta que ofrecieron los EPM, destacamos:

Este tipo de cuestiones y sub-cuestiones referidas a la velocidad y sus características pueden surgir si se tiene en cuenta que están integrando una nueva praxeología a su equipamiento praxeológico. Las expuestas aquí pueden responderse si se dispone de medios como acceso a internet, libros de física, consultas al docente, etc

Los EPM manifiestan la posibilidad del empleo de diferentes medias para el estudio de respuestas, no reduciendo así el topos del profesor al media universal. Esto es un aspecto esencial en cuanto al lugar que ocupa el profesor en una enseñanza por REI, desplazando la posición central en la enseñanza tradicional. A continuación bajo T_2 se reúnen las cuestiones que procuran hacer operativas las agrupadas bajo T_1.

<u>T2: Calcular velocidad de un móvil</u>

Q_{111}: ¿Cómo se calcula?

Q_{12}: ¿Cómo determinar la velocidad si se tiene como dato la distancia recorrida pero no el tiempo?

Para el estudio de Q_{111} y Q_{12} los EPM describieron un movimiento ideal entre dos puntos A y B y propusieron cálculos según los medios de transporte disponibles:

Hablar de conceptos como velocidad, espacio y tiempo conduce al modelo del Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU) siempre que se trabaje en condiciones ideales (Movimiento sin aceleración (que no se le aplique ninguna fuerza al sistema) y con velocidad constante).

Si se plantea una cuestión del estilo de Q_{12}, el docente puede intervenir sugiriendo la búsqueda de las velocidades medias de cada uno de los medios elegidos por los alumnos. Así, podrán calcular sin mayores dificultades el tiempo que necesita cada uno de ellos para llegar desde su casa al colegio con puntualidad.

Listado de velocidades medias:

VM (peatón): 5 km/h

VM (bicicleta): 20 km/h

VM (automóvil personal/motocicleta/colectivo/remis/taxi): 40 km/h

Luego de formularse cuestiones de este estilo llegarán finalmente a la ecuación del movimiento que describe cada una de sus trayectorias: $x = x_0 + v\cdot(t_f - t_o)$

Ante esta fórmula los EPM esperan generar espacios de discusión. Las respuestas serían producto de la actividad gestada en toda la comunidad de estudio:

Una nueva puesta en común será necesaria para debatir sobre la función que desempeñan las variables y los parámetros de la ecuación del movimiento; lo que provocará una buena resolución del problema propuesto. Luego, para calcular los tiempos correspondientes: $x_0 = t_0 = 0$, $x = v\cdot t$

Caminando: $1100m = 5\frac{km}{h} \times t \rightarrow 1100m = 1{,}4\frac{m}{s} \times t \rightarrow t \approx 789s \cong 13\ min$

Bicicleta: $1100m = 20\frac{km}{h} \times t \rightarrow 1100m = 5{,}6\frac{m}{s} \times t \rightarrow t \approx 196\ s \cong 3{,}3\ min$

Auto/Colectivo/Moto/Remis/Taxi: $1100m = 40\frac{km}{h} \times t \rightarrow 1100m = 11{,}1\frac{m}{s} \times t \rightarrow \quad t \approx 99s \cong 1{,}6\ min$

En lo que sigue se propone el estudio de tareas donde se involucren sistemas de ecuaciones lineales, pues los EPM indicaron:

El abordaje de la Q_0 requiere del estudio de praxeologías tanto matemáticas como físicas (formulación de ecuaciones, análisis y resolución de fórmulas) pero no supone la necesidad de construir e integrar la OM sistemas de ecuaciones lineales al equipamiento praxeológico de los alumnos; el problema planteado en Q_2 puede resolverse eficazmente por ejemplo, mediante el uso de tablas y sin recurrir al método que se desea enseñar. Es así que la propuesta de una nueva cuestión Q_3 se plantea con la intencionalidad del *docente de acercar a los alumnos a la construcción de dicha praxeología. Q_4 está diseñada para que elaboren, en conjunto, nuevas situaciones donde crean conveniente usar alguno de los métodos de resolución de sistemas estudiados previamente*

Este protocolo pone de manifiesto que, si bien el dispositivo didáctico fue gestado inicialmente para conservar algunos gestos que involucraría una enseñanza por REI, culmina con la propuesta de Q_2, Q_3 y Q_4. Aquí el estudio se organiza únicamente en función de las nociones matemáticas que los EPM pretenden que se estudien: sistemas de ecuaciones lineales. Esto condicionaría la actividad de los alumnos, reduciendo su estudio al medio controlado por el profesor. Las tareas propuestas por los EPM se reúnen bajo el tipo de tareas T_3, que describimos a continuación:

<u>T_3: Calcular pares de puntos que satisfacen sistemas de ecuaciones lineales</u>

Q_2: Con los datos [ver los datos al inicio del apartado] y suponiendo que sólo se cuenta con remis y taxi, ¿qué medio de transporte es más redituable y a partir de qué distancia recorrida conviene utilizar uno antes que el otro?

Q_{21}: Sabiendo a qué distancia está mi casa del colegio, ¿cuánto gasto si voy en remis?

Q_{211}: ¿Cuánto gasto si voy en taxi?

Q_3: ¿Qué medio de transporte conviene utilizar y a partir de qué distancia si se produce un cambio en las tarifas de modo tal que la bajada de bandera del taxi aumenta un 30%, la del remis un 50% y el costo adicional por cuadra del remis un 20%?

En Q_2 se propone calcular el gasto de trasladarse al emplear dos medios de trasporte. En primer lugar se fuerza la situación a que las variables de las funciones que modelizan el costo de cada medio de transporte, sean las mismas. No se identifica que para la ciudad bajo estudio el taxi tiene un costo fijo más un costo adicional por el tiempo transcurrido durante el viaje. Mientras que en remis, el costo se obtiene considerando un valor fijo más el costo por kilómetro recorrido. Las técnicas propuestas por los EPM para resolver la tarea se reducen a la confección de tablas y el empleo del álgebra. Para el estudio mediante tabla se propone la siguiente resolución:

Un método de resolución para saber cuál les conviene en función del espacio puede ser hacer las tablas de cada uno y ver cuáles son los costos a medida que se avanza en recorrido:

TAXI	
Camino recorrido (cuadras)	Costo
1	$7,50
2	$7,60
3	$8,15
4	$8,70
5	$9,25
6	$9,80
7	$10,3
8	$10,9
9	$11,45
10	$12
11	$12,55
12	$13,10

REMIS	
Camino recorrido (cuadras)	Costo
1	$8,85
2	$9,20
3	$9,55
4	$9,90
5	$10,25
6	$10,60
7	$10,95
8	$11,30
9	$11,65
10	$12
11	$12,35
12	$12,70

Notarán que a una determinada distancia el precio a pagar es el mismo. Resta determinar qué sucede antes de las 10 cuadras y después, lo cual se observa en la tabla: conviene tomar un taxi hasta la cuadra 10, y luego será más redituable el remis.

Vemos que la resolución del problema no requiere el estudio de la organización matemática sistemas de ecuaciones lineales; se puede llegar a la solución sin mayores dificultades haciendo los cálculos correspondientes a los primeros 12 valores de la tabla. Si se plantea el uso de tablas para el estudio del problema, propondremos una variación del mismo, donde los parámetros se vean afectados de modo tal que no se llegue a una solución de manera inmediata y surja la necesidad de involucrar nuevos procedimientos.

Los EPM realizaron un análisis praxeológico-didáctico de la tarea. Ante posibles respuestas de los estudiantes que se alejen del camino planificado por los EPM, se propone estudiar Q_3. En el hacer de Q_3 los EPM asumen que los estudiantes emplearán técnicas algebraicas, considerando que se trata de nociones estudiadas por los alumnos en años previos, y que el empleo de la técnica de confección de tablas no resulta ser una técnica funcional. Se asigna al profesor el papel de controlar la actividad de los estudiantes, supervisando las producciones e intervenir para que se recorra el camino presupuesto desde un principio. Esto lo inferimos del siguiente protocolo:

Si el docente observara una dificultad por parte de los alumnos para formular las ecuaciones correspondientes, debería intervenir con la intención de provocar el estudio de tal organización matemática. Es decir, generar un debate sobre cómo formular cada ecuación y cómo resolver la situación problemática haciendo uso de lo construido

Finalmente, los EPM proponen que los alumnos formulen diferentes situaciones que se modelicen con sistemas de ecuaciones (Q_4). Dicha tarea se reúne bajo T_4.

T_4: Analizar situaciones que se modelan con sistemas de ecuaciones

Q_4: Proponer situaciones que requieran, para su resolución, sistemas de ecuaciones lineales. ¿En cuáles convendría usar cada uno de los métodos estudiados y por qué?

Para la gestión de Q_4, los EPM indicaron:

Los problemas planteados por los estudiantes pueden ser modelizaciones de situaciones extra-matemáticas (reales) como los propuestos durante el recorrido; no obstante se aceptará la formulación de sistemas de ecuaciones (sin estar sujetas a una situación del mundo a estudiar) donde se determine qué método es apropiado utilizar, siempre y cuando sean pensadas y formuladas por la propia comunidad de estudio

6. Conclusiones

En este trabajo aportamos resultados del diseño de un dispositivo didáctico propuesto por dos EPM que participaron de un curso de formación didáctico-matemática (Corica & Otero, 2016b). El objetivo era adoptar un modelo pedagógico no tradicional basado en la investigación y cuestionamiento del mundo, y así recuperar el sentido de la matemática escolar a partir del estudio funcional con otras disciplinas.

El curso del que participaron los EPM fue el primero de su formación que los involucró en el paradigma de la investigación y del cuestionamiento del mundo. Sin embargo, esta experiencia es insuficiente para cuestionar su vasta experiencia en una formación gobernada por el paradigma de la enseñanza tradicional de la matemática. El dispositivo didáctico propuesto por el Grupo 2 podría poner de manifiesto gestos didácticos propios de una enseñanza por investigación: el estudio tiene inicio con una pregunta abierta, donde los datos e incógnitas no están completamente determinados de antemano y genera la formulación de nuevas preguntas cuyas respuestas implican recorrer varias praxeologías no solo matemáticas. Esto se vincula con la dialéctica fundamental de una enseñanza por investigación, que es la del estudio e investigación. No es posible investigar sin estudiar y a su vez un estudio genuino es productor de preguntas a ser investigadas. La propuesta de los EPM es formulada con la intención de que los estudiantes realicen y respondan preguntas, desarrollen técnicas, hagan conjeturas e interactúen con otros miembros del grupo, pero esto se va perdiendo a lo largo del dispositivo didáctico. Para gestionar propuestas con estas características, es requisito romper con la concepción atomizada de la matemática y dar lugar a recorrer diversas organizaciones matemáticas según las necesidades del estudio. Inferimos que las condiciones y restricciones que implica gestionar la enseñanza de la matemática en la escuela secundaria actual, restringida a un diseño curricular que propone estudiar una matemática pura, hacen que la atención de los EPM se ubique en determinar qué praxeologías matemáticas estudiar del diseño curricular y qué tareas para recorrerlas. La matemática se presenta como modelos pre-construidos que explican y predicen las situaciones bajo estudio sin lugar para explorar y elaborar. En particular, la función docente tiende a ocupar el lugar que la enseñanza tradicional le ha asignado: el profesor como gestor del medio de estudio y del tiempo didáctico. Esto lo atribuimos a la situación formativa y a la inexperiencia de los EPM. Los resultados obtenidos aquí son compatibles con el análisis de otro dispositivo didáctico desarrollado por EPM que participaron del mismo curso (Corica & Otero, 2016a)

Es vital tratar de involucrar a los EPM en experiencias que los aproximen al paradigma de investigación en todo su proceso formativo matemático y didáctico-matemático. Esto ha de permitir adquirir una concepción epistemológica diferente del saber matemático. También ha de equipar mejor para elaborar, readaptar y gestionar dispositivos didácticos compatibles con la enseñanza por investigación.

Referencias

Artaud, M.; Cirade, G.; & Jullien, M. (2011). Intégration des PER dans l´equipement praxéologique du professeur. Le cas de la formation initiale. En M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 769-794). Barcelona: CRM.

Azcárate, P. (2004). Los procesos de formación: En busca de estrategias y recursos. En E. Castro & E. de la Torre (Eds.), *Actas del VIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 43-60). Salamanca: SEIEM.

Barquero, B.; Bosch, M.; & Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(3), 339-352.

Ball, D.; Thames, M.; & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Barraza F., O. y Reyes L. (2012). *Introducción al estudio de las geometrías no euclidianas a través de la geometría esférica. Desde una perspectiva docente*. Trabajo de Tesis de Licenciatura. Universidad de Santiago de Chile.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. Javier García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico* (pp. 705-746). Baeza: Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. (2012) *Teaching mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm*. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y (2013). *Éléments de didactique du développement durable. Leçon 1*. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Didactique_du_DD_2012-2013_1.pdf

Chevallard, Y. ; & Cirade, G. (2009). Pour une formation professionnelle d'université: éléments d'une problématique de rupture. *Recherche et Formation*, *60*, 51-62.

Climent, N.; Romero Cortés, J.; Carrillo, J.; Muñóz Catalán, M.; & Contreras, L. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16*(1), 13-36.

Comini, S. (2010). *Geometria táxi. Uma exploração através de atividades didáticas* Trabajo de Tesis de Maestría. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais.

Corica, A.; & Otero, M. (2016a). Estudio de dispositivos didácticos propuestos por futuros profesores de Matemática: un análisis desde la TAD. *Perspectiva Educacional*, *55*(2), 21-37.

Corica, A.; & Otero, M. (2016b). Diseño e implementación de un curso para la formación de profesores en matemática: una propuesta desde la TAD. *BOLEMA*, *30*(55), 763-785.

Corica A.; & Otero, M. (2016c). Análisis de la implementación de un dispositivo didáctico enmarcado en el paradigma de la investigación desarrollado por un estudiante del profesorado en matemática. Disponible en http://iciecymiienem.sites.exa.unicen.edu.ar.

Da Ponte, J.; Quaresma, M.; & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(1), 65-86.

Fonseca, C. (2011). Los Recorridos de Estudio e Investigación en las escuelas de ingeniería. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(3), 547-580.

Hernández, R.; Fernández, C.; & Baptista, M. (2010). *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill.

Llanos, V.; & Otero, M. (2012). Las funciones polinómicas de segundo grado en el marco de un Recorrido de Estudio y de Investigación: alcances y limitaciones. *UNION*, *31*, 45-63.

Llinares, S. (2008). Construir el conocimiento necesario para enseñar matemática: prácticas sociales y tecnología. *Evaluación e Investigación*, *3*(1), 7-30.

Llinares, S.; Valls, J.; & Roig, A. (2008) Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, *20*(3), 59-82.

Oliveira, E.; & Batista, I. (2013). Contribuições da história da matemática para a construção dos saberes do professor de matemática. *BOLEMA*, *27*, 1-30.

Parada, R., & Pluvinage, F. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(1), 83-113.

Parra, V.; Otero, M.; & Fanaro, M. (2013a) Enseñanza de la Matemática a partir de problemas de la Microeconomía: ejemplos de posibles Recorridos de Estudio e Investigación. *Números*, *82*(3), 17-35.

Parra, V.; Otero, M.; & Fanaro, M. (2013b) Los Recorridos de Estudio e Investigación en la Escuela Secundaria: resultados de una implementación. *BOLEMA, 27,* 847-874.

Ruiz, A.; Sierra, T.; Bosch, M.; & Gascón, J. (2014). Las matemáticas para la enseñanza en una formación del profesorado basada en el estudio de cuestiones. *BOLEMA, 28,* 319-340.

Serrano, L.; Bosch, M.; & Gascón, J. (2007). "Cómo hacer una previsión de ventas": propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. Comunicación presentada en *II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Uzès.

Referencias de las autoras

Ana Rosa Corica. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología. Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA, Buenos Aires, Argentina. acorica@exa.unicen.edu.ar

María Rita Otero. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología. Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA, Buenos Aires, Argentina. rotero@exa.unicn.edu.ar

Analysis of a didactic device proposed by pre-service mathematics teachers

Ana Rosa Corica y María Rita Otero, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (Argentina)

This work deals with pre-service mathematics teacher education. We design and start to experiment a course for future mathematics teachers in order for them to adopt a pedagogy based on research and world questions. Our goal is that the trainees provide sense to school mathematics with the functional study of the discipline in relation to other disciplines under the perspective provided by the Anthropological Theory of Didactics. The qualitative research was carried out with third-year students of a mathematics teacher education course from an Argentinean University. As final activity, the students were asked to propose a didactic device. We particularly illustrate essential characteristics of the didactic device proposed by two of the participants in the course. The didactic device starts with the question: *We have different ways of getting to school, which is better?* This is an open-ended question, where data and unknown variable are not determined in line with the fundamental dialectics of teaching for research. On the one hand, it is not possible to research without studying and, on the other, a genuine study is the product of questions to be researched. The participants formulated a generating question to carry out some teaching based on the research paradigm. They had difficulties in exploring and extending the question, and they reduced the study in scope and generativity. The experience in the course was insufficient to question the participants' vast experience in a formation governed by the traditional paradigm of mathematics teaching. We infer that the conditions and constraints affect the management of mathematics teaching in high school. The attention of pre-service mathematics teacher is rather focused on determining mathematical praxeologies and tasks to study curricular design. It is of vital importance to involve pre-service teachers in experiences that bring them closer to the research paradigm in their formative process. This would allow them to acquire a different epistemological conception of mathematical knowledge and of sciences in general. It would also equip them better to develop, readapt and manage didactic devices compatible with teaching by research.