AIEM
AVANCES DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
ISSN-e 2254-4313 | (2026) 30, 161-180 | aiem.es
seiem.es

Los Significados de la Integral Desarrollados por Alumnos de Ingeniería

The Meanings of the Integral Developed by Engineering Students

Víctor Larios Osorio [1], Rosa Elvira Páez Murillo [2], Angélica Rosario Jiménez Sánchez [1], Ricardo Iván Castañón Martínez [1]

[1] Universidad Autónoma de Querétaro (México)
[2] Universidad Autónoma de la Ciudad de México (México)

Resumen ∞ Este artículo identifica cómo los estudiantes de ingeniería construyen los significados de la integral definida e indefinida. El objetivo principal es identificar los significados que movilizan al resolver tareas abiertas vinculadas con los distintos significados parciales desarrollados históricamente en el cálculo integral. Se utiliza una metodología cualitativa y los datos se analizan a partir del enfoque ontosemiótico de la cognición y la instrucción matemáticas (EOS). Los resultados muestran que los estudiantes recurren, sobre todo, a significados parciales de la integral relacionados con el cálculo de áreas y el proceso inverso de la derivación, mientras que otros significados aparecen de manera marginal. Estos hallazgos ponen de manifiesto la importancia de diseñar propuestas didácticas que permitan articular una comprensión más amplia de la integral en la formación de ingenieros.

Palabras clave ∞ Conflictos cognitivos; Enseñanza del cálculo; Formación de ingenieros; Integral; Prácticas matemáticas.

Abstract ∞ This article identifies how engineering students interpret the concepts of the definite and indefinite integral. The primary goal is to identify the meanings they use when solving open-ended problems related to the various partial meanings developed over time in integral calculus. A qualitative approach is employed, and the data are analyzed using the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction (OSA). The findings reveal that students mainly depend on partial meanings of the integral related to calculating areas and the inverse of differentiation, while other meanings are only briefly referenced. These results emphasize the need to create teaching strategies that promote a more comprehensive understanding of the integral in engineering education.

Keywords ∞ Calculus teaching; Cognitive conflicts; Engineering training; Integral calculus; Mathematical practices.

Larios Osorio, V., Páez Murillo, R. E., Jiménez Sánchez, A. R. y Castañón Martínez, R. I. (2026). Los significados de la integral desarrollados por alumnos de ingeniería. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática, 30,* 161-180. https://doi.org/10.35763/aiem30.8519

CC BY
© de la autoría

1. Introducción

La revisión de la literatura sobre la enseñanza y el aprendizaje del cálculo permite identificar las principales líneas de investigación y las perspectivas actuales en este campo. El cálculo se reconoce como un pilar esencial y una de las principales puertas de entrada a los estudios universitarios, no solo en ingeniería, sino también en ciencias, tecnología y matemáticas (Bressoud et al., 2016; Romo-Vázquez y Artigue, 2023).

Diversos estudios, como el de Rasmussen et al. (2014), evidencian que persisten dificultades en el aprendizaje del cálculo, especialmente en lo referente a una comprensión superficial de los conceptos y a una excesiva dependencia de procedimientos algorítmicos. Esta situación genera una brecha entre el entorno escolar y los contextos profesionales (Faulkner et al., 2025; Romo-Vázquez y Artigue, 2023), atribuida en gran parte al predominio de tareas rutinarias en la enseñanza del cálculo (Hitt y Dufour, 2021; Zaldívar-Rojas et al., 2025).

Dentro de los conceptos fundamentales del cálculo, la integral ocupa un lugar destacado por la diversidad de interpretaciones que admite: área bajo una curva, proceso de acumulación, suma infinita y proceso inverso de la derivación, entre otras. Esta multiplicidad convierte a la integral en un objeto matemático complejo, cuya comprensión exige la articulación de diversas representaciones y significados (Burgos et al., 2021; Crisóstomo dos S. et al., 2005).

Para analizar los significados de los objetos matemáticos en este estudio, se recurre al enfoque ontosemiótico de la cognición y la instrucción matemáticas (EOS). Este marco permite abordar la noción de significado a partir de las prácticas matemáticas (Godino et al., 2007), lo que posibilita el estudio de cómo los conceptos adquieren sentido en distintos contextos y se articulan los significados personales e institucionales.

A partir de este marco teórico, Crisóstomo dos S. et al. (2005) identifican, para la integral definida, distintos significados parciales que reflejan su evolución histórica. Su propuesta de análisis ontosemiótico resulta fundamental tanto para el diseño de tareas que integren estos significados como para analizar la producción de los estudiantes en torno a ellos. De forma complementaria, Burgos et al. (2021) abordan la complejidad ontosemiótica de la integral mediante el análisis de textos matemáticos, subrayando la diversidad de objetos, representaciones y procesos implicados en su enseñanza y aprendizaje. Asimismo, Ávila Godoy et al. (2010) exploran los significados que estudiantes y profesores atribuyen a la integral de una función real, mostrando que estos varían según la actividad y el tipo de práctica en que se moviliza el objeto matemático.

Respecto a investigaciones basadas en el EOS que abordan otros conceptos del cálculo relacionados con este trabajo. Se identifican, en primer lugar, los estudios centrados en la derivada. Pino-Fan et al. (2011) presentan una descripción del significado global de la derivada, distinguiendo y articulando sus significados parciales en una propuesta teórica fundamentada en un análisis histórico-

epistemológico. En la misma línea, Larios et al. (2021) identifican los significados de la derivada evidenciados por estudiantes de primer año de ingeniería.

El segundo grupo comprende estudios centrados en los significados de la antiderivada. Gordillo y Pino-Fan (2016) identifican cuatro significados parciales de esta noción. Posteriormente, otros trabajos exploran los significados presentes entre estudiantes de ingeniería (Gordillo et al., 2019; Pino-Fan et al., 2018), lo que muestra que la comprensión de la antiderivada es parcial e instrumental.

Es importante mencionar que el análisis de los significados de conceptos del cálculo también ha sido tratado desde otros marcos teóricos. Por ejemplo, Briceño et al. (2024) analizan planeaciones didácticas de profesores para identificar los significados de la derivada que cada docente promueve en su clase. Por su parte, Zaldívar-Rojas et al. (2025) estudian los significados que emergen en torno a los criterios de la derivada cuando la tarea implica una situación de modelación de movimiento.

En síntesis, si bien existen estudios teóricos que abordan los significados de la integral definida y la antiderivada —y que sirven de base para investigaciones empíricas sobre los significados movilizados por estudiantes de ingeniería—, persiste la necesidad de un análisis integrado que examine simultáneamente los significados personales de la integral definida e indefinida y su articulación, especialmente en el contexto de los primeros cursos de ingeniería. Por ello, el objetivo de este trabajo es analizar los significados que movilizan los estudiantes de ingeniería al resolver tareas relacionadas con la integral definida e indefinida. Las preguntas de investigación que guían este estudio son: ¿Qué significados asociados a la integral definida e indefinida se identifican en la actividad matemática de los estudiantes de ingeniería? ¿Qué significados parciales de la integral definida e indefinida predominan en su trabajo matemático?

2. Significados global y parciales de la integral

En este trabajo, se adopta el enfoque ontosemiótico de la cognición y la instrucción matemáticas (EOS) como base teórico-metodológica, el cual propone una visión pragmático-antropológica para analizar los fenómenos matemáticos. Desde esta perspectiva, la noción de significado de un objeto matemático resulta central para comprender la relación entre las prácticas matemáticas y los propios objetos.

Se entiende por prácticas matemáticas al conjunto de acciones y manifestaciones, tanto discursivas como operativas, que realiza un individuo o una comunidad (denominada institución) para abordar y resolver problemas específicos en los que interviene el objeto matemático analizado (Godino, 2024; Godino et al., 2007).

El significado trasciende el uso referencial o meramente semiótico, pues las expresiones matemáticas también cumplen una función operacional al emplearse para ejecutar acciones matemáticas (Godino, 2024). Así, desde una perspectiva pragmática, el significado se concibe como el sistema de prácticas matemáticas (individuales o colectivas) asociadas a un conjunto de problemas o situaciones de las que emerge el objeto matemático en cuestión (Godino y Batanero, 1994).

Las prácticas matemáticas y, por ende, los significados pueden analizarse desde una perspectiva individual (significados personales) o institucional (significados compartidos por una comunidad). Esta distinción permite abordar los significados tanto desde lo cognitivo como desde lo cultural. Así, el significado se determina por el contexto y, a lo largo del tiempo, un mismo objeto matemático puede adquirir diversos significados parciales, en función de las prácticas vigentes en cada momento histórico y cultural. Bajo esta mirada sistémica del EOS, el significado global de un objeto matemático se entiende como el conjunto articulado de sus significados parciales, derivados de las diferentes prácticas matemáticas. Estos significados implican procesos de abstracción progresiva y dependen de las representaciones semióticas y herramientas (mentales o físicas) empleadas para abordar las situaciones matemáticas.

De este modo, prácticas, objetos y procesos matemáticos, junto con los atributos contextuales, se articulan en una red de relaciones —la configuración ontosemiótica— que vincula el objeto matemático con otros conceptos relacionados. Esta configuración contempla seis tipos primarios de objetos matemáticos: problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos (Godino, 2024).

A partir de estos elementos, Crisóstomo dos S. y colaboradores (Crisóstomo dos S., 2012; Crisóstomo dos S. et al., 2005) han realizado análisis histórico-epistemológicos para la integral definida (ver Tabla 1), y Gordillo y Pino-Fan (Gordillo, 2015; Gordillo y Pino-Fan, 2016) para la integral indefinida (ver Tabla 2), identificando las respectivas configuraciones ontosemióticas de cada objeto matemático. Cada configuración corresponde a un significado parcial vinculado a prácticas matemáticas específicas dentro de contextos histórico-filosóficos particulares.

Tabla 1. Configuraciones ontosemióticas correspondientes a la integral definida

Configuración ontosemiótica	Características principales
CeD-1 (Finita)	Cálculo de áreas considerando lenguaje geométrico y coloquial. Uso de métodos como el de exhausción (Grecia antigua).
CeD-2 (Intuitiva)	Estudio del cambio y del movimiento con procedimientos numéricos y geométricos. Uso de un lenguaje geométrico y aritmético (Medievo).
CeD-3 (Infinita)	Integración numérica considerando la noción de indivisible y con el método de exhausción. Uso de lenguaje aritmético y algebraico (S. XVII).
CeD-4 (Primitiva)	Estudio de la relación inversa entre la integración y la derivación por Newton, utilizando la notación de fluentes y fluxiones. Uso de argumentos deductivos (S. XVII).
CeD-5 (Sumatoria)	Estudio de la relación inversa entre la integración y la derivación por Leibniz, considerando sumas y diferencias de infinitesimales. Uso de argumentos deductivos (S. XVII).
CeD-6 (Analítica)	Fundamentación del cálculo con la definición de límite y aplicándolo a la integral definida con lenguaje analítico (S. XVIII).
CeD-7 (Generalizada)	Generalización de la integral con notación conjuntista y lenguaje analítico. Uso de argumentos deductivos (S. XIX).

Nota. Realizada a partir de Crisóstomo dos S. et al. (2005).

Tabla 2. Configuraciones ontosemióticas correspondientes a la integral indefinida

Configuración ontosemiótica	Características principales
CeI-1 (Tangentes y cuadraturas)	Obtención de rectas tangentes y de la curvatura de una curva con procedimientos sintéticos, con uso de lenguaje y propiedades geométricos (Medievo).
CeI-2 (Visión cinemática)	Estudio del movimiento mediante el método de fluxiones y en un lenguaje analítico. Uso de argumentos dinámicos y análisis geométrico (S. XVII).
CeI-3 (Sumatorias y diferencias)	Análisis de funciones por Leibniz, con uso de simbología nueva, argumentos algebraicos y geométricos, y con infinitesimales (S. XVII).
CeI-4 (Funciones elementales)	Formalización del cálculo con argumentos deductivos y lenguaje analítico para la obtención de funciones elementales. Diferenciación entre la integral definida y la indefinida (S. XVIII).

Nota. Realizada a partir de Gordillo y Pino-Fan (2016).

Este enfoque es fundamental para los procesos de aprendizaje ya que, desde la perspectiva del EOS, la comprensión y apropiación de un objeto matemático dependen del acoplamiento de significados a través de las prácticas matemáticas —discursivas y procedimentales— que realiza el sujeto:

> En una situación ideal, y en una institución dada, decimos que un sujeto "comprende" el significado del objeto O_I —o que ha "captado el significado" de un concepto— si es capaz de reconocer sus propiedades, justificarlas con argumentos válidos, usar las representaciones características, relacionarlo con los restantes objetos matemáticos y usar este objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas dentro de la institución correspondiente. (Godino, 2024, p. 153)

3. Aspectos metodológicos

El desarrollo de la investigación contempló las siguientes etapas: identificación de los significados parciales de los objetos matemáticos integral (definida e indefinida) y antiderivada con el objetivo de integrarlos en un significado global; diseño de un cuestionario orientado a identificar los significados movilizados por estudiantes de ingeniería, y aplicación del instrumento y posterior análisis de la información recolectada.

Dado que las variables de interés son de naturaleza cualitativa y el estudio es de carácter exploratorio, se optó por una metodología cualitativa para todo el proceso. El análisis y la descripción se complementaron con herramientas de estadística descriptiva.

3.1. El instrumento de recolección de datos

El instrumento de recolección de datos consistió en un cuestionario diseñado para identificar los significados y representaciones movilizados por los estudiantes respecto a la integral. El cuestionario se aplicó en una única sesión de dos horas al

inicio del semestre escolar, motivo por el cual su diseño tuvo en cuenta la complejidad y el tiempo disponible.

El cuestionario incluyó seis tareas (T1 a T6) diseñadas específicamente para este estudio, cuyas características generales se resumen en la Tabla 3. Se consideraron los significados parciales de la integral previamente mencionados (Crisóstomo et al., 2005; Gordillo y Pino-Fan, 2016). Aunque algunas tareas estaban orientadas a que las respuestas remitieran al significado global, en la práctica fue posible identificar los significados parciales movilizados por los participantes. El instrumento fue validado mediante un juicio de expertos.

Tabla 3. Resumen de las características de las tareas del cuestionario

Tarea	Práctica matemática esperada	Representación activada	Significado parcial activado
T1: Significado general de la integral	Descripción de significados personales de la integral.	Verbal/escrita	Global
T2: Relación entre la integral definida y la indefinida	Caracterización de las integrales definidas e indefinidas para identificar diferencias.	Verbal/escrita	Global
T3: Información proporcionada por la integral definida e indefinida	Descripción de los significados personales de la integral (definida e indefinida) en cuanto a la información que proporcionan.	Verbal/escrita	Global
T4: Obtención de la posición de un objeto a partir de su velocidad	Aplicación de la visión cinemática de la integración y vinculación de las "condiciones iniciales" con la constante de integración.	Simbólica y escrita	Visión cinemática (CeI-2) y obtención de funciones (CeI-4)
T5: Cálculo de la longitud de una trayectoria curva	Aplicación del método de exhausción para el cálculo de una suma infinita en un contexto geométrico que lleve al uso de la integral definida.	Gráfica y simbólica	Cuadraturas (CeI-1) y sumatorias y diferencias (CeD-5)
T6: Relación entre la derivada, la antiderivada y la integral a través del TFC	Caracterización de la derivada, la antiderivada y la integral, a partir de significados personales, que permitan identificar relaciones entre los conceptos y el significado personal del TFC.	Verbal/escrita	Global

3.2. Los sujetos participantes y el contexto

La muestra estuvo conformada por la totalidad de los estudiantes del campus principal de la facultad de Ingeniería de una universidad pública mexicana, pertenecientes a dos semestres consecutivos (2024-2 y 2025-1). En total participaron 81 estudiantes que iniciaban el segundo año de su formación y que ya habían aprobado los cursos de cálculo diferencial e integral.

El cuestionario se aplicó al inicio del semestre y las indicaciones para los estudiantes se limitaron a solicitar su participación voluntaria, con el fin de obtener información diagnóstica relevante para sus nuevos cursos. Se les exhortó a responder de manera honesta e individual, y se les pidió que, en caso de cometer errores, tacharan sus respuestas en lugar de borrarlas. Esta dinámica propició una mínima intervención docente durante la aplicación.

4. Resultados

En esta sección se presenta el análisis de los resultados obtenidos en cada una de las tareas del cuestionario aplicado a los estudiantes.

4.1. T1, T2 y T3: Significados de la integral, tanto definida como indefinida

Estas tres tareas guardan una gran similitud, ya que buscan identificar los significados generales que los participantes atribuyen a la integral, tanto en términos generales como en lo específico de la integral definida e indefinida. El registro semiótico de las tres tareas es escrito, pues se trata de preguntas abiertas que requieren una respuesta textual.

T1: ¿Qué es para ti la integral de una función?

T2: ¿Existen diferencias entre la integral definida y la integral indefinida?

T3: ¿Cuál es la información que te proporcionan la integral definida y la integral indefinida de una función?

El objetivo es que los participantes expresen los significados que han construido sobre la integral definida e indefinida, describiendo sus características y diferencias. Estas tareas resultaron ser las más propicias para la participación estudiantil, ya que presentaron menos respuestas en blanco. En la T1 se solicita a los alumnos que expongan su significado personal global de la integral. Las respuestas fueron organizadas y categorizadas, como se muestra en la Tabla 4.

Tabla 4. Frecuencias y porcentajes del tipo de respuestas en la tarea 1

Categoría	Frecuencia*
Algoritmo	2
Antiderivada	5
Cálculo de áreas	4
Área bajo la curva (mención explícita)	48
Área de una función	1
Datos de acumulación	3
Desplazamientos	1
Función inversa	1
Integral indefinida	1
“Misma función”	1
Operación inversa a la derivación	16
Primitiva	1

Categoría	Frecuencia*
Significado tanto de integral como de derivada	1
Suma	6
Cálculo de volúmenes	1
Otras respuestas o sin respuestas	4

Nota. *La suma de las frecuencias excede la cantidad de participantes debido a que en algunas respuestas se hace referencia a más de una categoría.

Los resultados muestran que los dos significados más mencionados están relacionados con el cálculo de áreas (61 % de las menciones) y con el proceso inverso a la derivación (23 %). Esto indica que el significado vinculado al cálculo de áreas predomina en las respuestas de los estudiantes, mientras que la referencia a la obtención de funciones primitivas es menor. La visión cinemática de la integral es prácticamente inexistente y no se registran referencias a los desarrollos del siglo XIX que introducen la noción de límite y la formalización de la suma infinita.

En la T2 se evidencia que la mayoría (el 98 %) considera que existen diferencias entre la integral definida y la indefinida. Una de las respuestas de los participantes que declaran que no hay diferencias es la siguiente, donde se aprecia que el cambio de nombre se debe a una "generalización" o "ampliación"[1]:

> C2-04 Gráficamente, una integral definida e indefinida son iguales, pero la integral definida representa un segmento de la función resultada de la integración.

La T3 evidencia esas diferencias, pues se les pide a los participantes que describan la información que proporcionan tanto la integral definida como la indefinida. En la Tabla 5 se presenta la información que, según los alumnos, proporciona la integral definida, y en la Tabla 6, la correspondiente a la integral indefinida.

Tabla 5. Información que proporciona la integral definida

Categoría	Frecuencia
Un área	59
Un volumen	9
Un valor específico	7
Información para aplicaciones	4
La longitud de una curva	4
Es una acumulación o suma	3
Son los límites de integración	3
La posición de un objeto que se mueve	1
El cambio en un fenómeno	1
Una función evaluada en un intervalo	1

[1] Las referencias a los participantes están codificadas alfanuméricamente. Además, las respuestas se reproducen tal y como están escritas, respetando los posibles errores ortográficos o gramaticales.

Categoría	Frecuencia
La función inicial en un intervalo	1
Información de una "función exacta"	1
Integración de una función polinomial	1
Sin respuesta y otras	3

El significado parcial de la integral vinculado al área (bajo la curva o de superficies) es el más frecuente (60 % de las respuestas). Si se incluye la extensión al cálculo de volúmenes, el porcentaje asciende al 69 %. Una referencia específica, también asociada al significado de cuadraturas, es el cálculo de la longitud de una curva, que aparece en apenas el 4 % de las respuestas. Es relevante que solo el 3 % de los estudiantes haga referencia al significado de acumulación o suma infinita.

En cambio, referencias a una visión cinemática —y que se esperaría más para el caso de la integral indefinida— sí aparecen, aunque al menos en un solo caso.

Tabla 6. Información que proporciona la integral indefinida

Categoría	Frecuencia
La antiderivada o primitiva	14
Una función (sin precisar alguna en particular)	14
El área bajo la curva	8
Una familia de funciones	6
El comportamiento de la función	5
La velocidad de un objeto en movimiento	3
Una ecuación o función con constante	3
La posición de un objeto en movimiento	3
La aceleración de un objeto en movimiento	2
El cambio de un fenómeno	2
La derivada	2
La función o ecuación para el área	2
Las características del problema planteado	1
Una función polinomial	1
El intervalo de función	1
Una "hipótesis"	1
Una "función ilimitada"	1
Información de los ejercicios	1
Información general	1
Una suma	1
Sin respuesta y otras	13

En las respuestas sobre la integral indefinida se observa una mayor diversidad de categorías. Sin embargo, la mayoría de las referencias (49 %) apuntan a la obtención de una función, un conjunto de funciones o, en algunos casos, a una ecuación (de manera incorrecta). El 9 % alude a la visión cinemática y, si se consideran

todas las menciones relacionadas con el estudio de la variación, el porcentaje asciende al 35 %.

Existen algunos casos de confusión, como las ocho referencias al área bajo la curva —que debería corresponder a la información proporcionada por la integral definida—, las dos referencias a la obtención de la derivada o la referencia a que proporciona una suma. Aparentemente, estas confusiones se presentan más en el caso de la integral indefinida que en el de la integral definida. Esto podría dar una indicación del grado de comprensión de cada uno de los objetos matemáticos considerados.

En general, la mayoría de los estudiantes manifestó que la información proporcionada por la integral definida es un número o dato concreto, lo cual es coherente con un significado parcial asociado a cuadraturas y sumatorias. Por su parte, la integral indefinida se asocia principalmente a la obtención de una función, lo que refleja el significado parcial relacionado con la generación de funciones elementales.

4.2. T4: Obtención de la posición de un objeto a partir de su velocidad

Esta tarea se vincula con la visión cinemática del cálculo porque aborda el estudio del movimiento y, hasta cierto punto, es común en los textos escolares. Se expresó de la siguiente manera:

T4: Supón que un vehículo se mueve en una carretera y conocemos su velocidad en todo momento, la cual podemos expresar o graficar como una función $v(t)$. Si queremos saber su posición, ¿con esa información es suficiente? ¿Por qué sí o por qué no?

Sin embargo, al alumno no se le pidió que calculara la posición o la velocidad de un objeto en movimiento, sino que determinara las condiciones necesarias para obtener dicha información. Tal como se mencionó, es un planteamiento algo común en los libros, pues relaciona la velocidad del objeto en movimiento con la función de posición mediante la integral indefinida. Así pues, se esperaba que los alumnos dijeran que la información no era suficiente, pues, al conocer la función de velocidad del vehículo, se podría integrar para obtener la función que lleva a la posición, pero se requiere conocer información conocida como la condición inicial (posición inicial), representada por la constante de integración.

Según el antecedente académico de los alumnos, solo el 2 % de las respuestas de esta tarea quedaron en blanco. Pero, en contraste, solo el 15 % de las respuestas fueron consideradas correctas. La información porcentual de las respuestas se resume en la Tabla 7.

Tabla 7. Resumen de las respuestas en la T4

Categoría*	Sí	Sí, con reservas	No	No, con reservas
Consideran que se requiere integrar	81 %	6 %	10 %	3 %
Consideran que se proporcionó la información suficiente en la consigna	74 %	7 %	14 %	1 %
Se usan constantes de integración o del conocimiento de condiciones iniciales de manera explícita	18 %	3 %	79 %	---

Nota. *No están consideradas los dos casos en que no hubo respuestas.

La gran mayoría de los participantes consideró explícitamente que es necesario integrar para resolver la tarea, lo cual puede deberse a que este tipo de ejercicios es frecuente en los cursos de cálculo integral, donde se aborda el significado parcial asociado a la visión cinemática de la antiderivada (CeI-2). No obstante, más de tres cuartas partes de los estudiantes afirmaron que la información proporcionada era suficiente, mientras que solo entre el 15 % y el 20 % señalaron la necesidad de contar con condiciones iniciales o constantes de integración.

En este sentido, hubo respuestas como la siguiente de un alumno que considera que se requiere más información y establece explícitamente que esa información está representada por la constante de integración:

> B2-08 Es suficiente para aproximarse a la posición pero no saber la exacta ya que puedes integrar la función $v(t)$ para conseguir la función de posición pero necesitas mas información para despejar C (o la constante incognita) que te da la integral y así conseguir una función de posición que describa su comportamiento con exactitud.

Pareciera que la dificultad para establecer esta última relación entre la constante de integración y la información conocida de una situación está vinculada a la conversión de registros semióticos (del verbal al simbólico), junto con el significado que se construye de esa constante, para que pase de ser un elemento en un algoritmo a un elemento útil en el proceso de resolución. Ahora bien, esta dificultad en el papel y aplicación de las constantes de integración se observó también en la siguiente tarea, por lo que se abordará en la siguiente subsección.

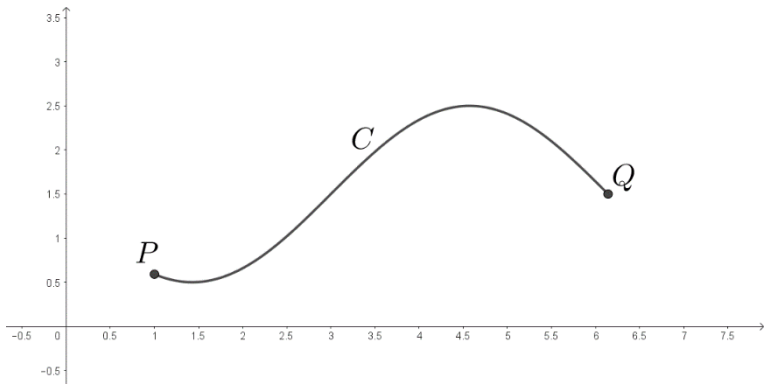
Por otro lado, se observó que la mayoría de los participantes no utilizó el registro analítico en sus respuestas (83 % frente al 14 % que sí lo hizo). Suponemos que esto se debió a que la consigna solicitaba la descripción (con su explicación) de un proceso. La respuesta común de quienes sí lo utilizaron consistía en texto y expresiones simbólicas.

4.3. T5: Cálculo de la longitud de una trayectoria curva

Con esta tarea se busca determinar si los participantes pueden identificar la integral definida como una herramienta para calcular una suma infinita en un contexto geométrico. Para ello se planteó la siguiente tarea:

T5: Una partícula se mueve siguiendo la trayectoria C de la siguiente figura (ver Figura 1.), desde el punto P hasta el punto Q, en t segundos. Si se pudiera describir la curva con unas ecuaciones paramétricas en función del tiempo t, ¿cómo se podría calcular la distancia que recorre esa partícula a lo largo de esa trayectoria? Justifica tu respuesta. (Nota: No es necesario calcular esa distancia, sino que lo importante es que escribas el cómo se podría calcular esa distancia).

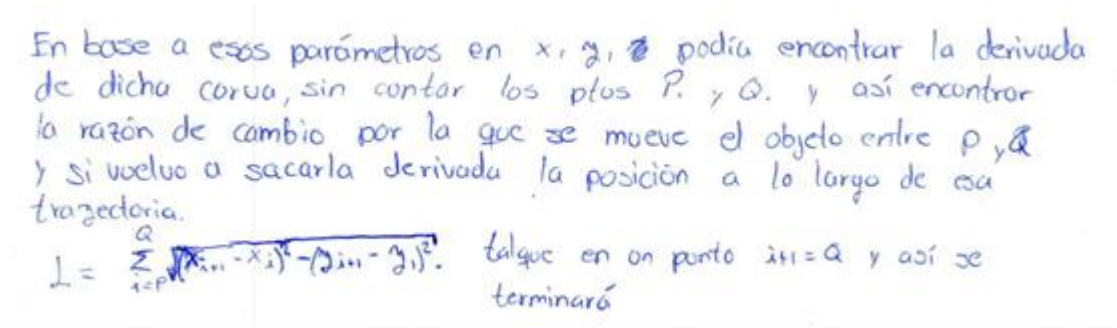
Figura 1. Trayectoria de una partícula en la T5.



Se esperaba que los alumnos consideraran la estrategia de dividir la trayectoria en una serie de segmentos de recta y sumar las longitudes de cada uno. Así, aplicando el método de exhausción, se podrían hacer aproximaciones cada vez más cercanas a la longitud de la trayectoria y así obtener una integral definida.

Al categorizar las respuestas, se observó que solo el 5 % de los alumnos recurrió a la respuesta esperada al referirse a dividir la trayectoria en subtrayectorias mediante un proceso de particionado. Uno de ellos ha proporcionado una respuesta que explica el proceso completo (ver Figura 2).

Figura 2. Respuesta del participante C1-06.


En base a esos parámetros en x, y, t podía encontrar la derivada de dicha curva, sin contar los ptos P. y Q. y así encontrar la razón de cambio por la que se mueve el objeto entre P y Q y si vuelvo a sacarla derivada la posición a lo largo de esa trayectoria.

$L = \sum_{i=P}^{Q} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$. tálque en on punto $x_{i+1} = Q$ y así se terminará

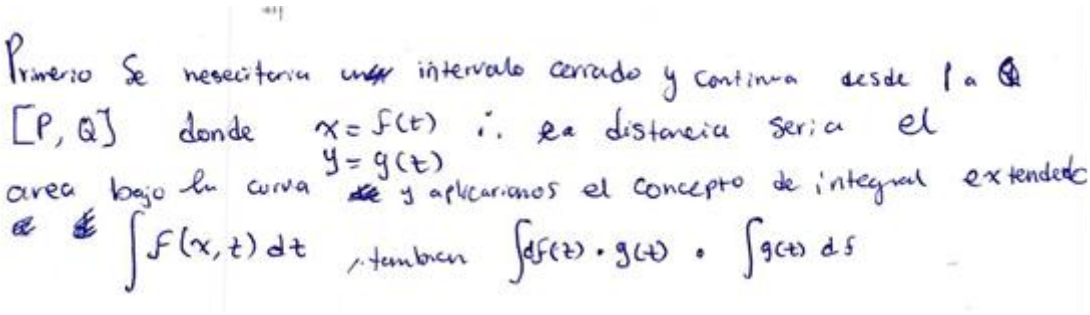
Las referencias al uso de la integral aparecen en el 44 % de las respuestas, aunque solo el 28 % de los estudiantes proporcionó la fórmula correspondiente (algunos con errores). Esto sugiere que, si bien el tema se aborda en algunos cursos de cálculo integral, los alumnos tienden a recordar y aplicar aspectos algorítmicos, mientras que la estrategia heurística de particionar la trayectoria ha dejado de emplearse con frecuencia.

El 12 % de las respuestas se refieren a una visión cinemática del estudio del movimiento. Es posible que este significado se active por el hecho de que la tarea plantea responder sobre un objeto en movimiento, pero como se aprecia en la siguiente respuesta de uno de los alumnos, aparece esa referencia directamente:

> A1-02 Si nosotros tenemos la función de velocidad e integramos en función del tiempo, nos da la función de posición. Con ello, sustituimos en *t*, el tiempo que tardó en pasar de *P* a *Q*.

Asimismo, como en otras tareas, algunos estudiantes vinculan la integral con el cálculo de áreas bajo una función (ver Figura 3); este tipo de referencias representa el 9 % de las respuestas.

Figura 3. Respuesta del participante C1-09



4.4. T6: Relación entre la derivada, la antiderivada y la integral a través del teorema fundamental del cálculo

Esta tarea consta de dos subtareas orientadas a identificar la relación entre los conceptos centrales de la investigación y el papel que desempeña el teorema fundamental del cálculo en dicha relación. Para ello se plantearon las siguientes preguntas:

T6: (a) ¿Cuál es la relación que existe entre la derivada, la integral y la antiderivada de una función?

(b) ¿Cuál es el papel del teorema fundamental del cálculo en la posible relación entre estos tres conceptos?

Esta tarea está relacionada con las primeras tres, pero estas se orientan a identificar los significados de cada objeto matemático y sus características, de modo que puedan expresarse las diferencias entre ellos. En esta tarea aparecen como parte central el teorema fundamental del cálculo (TFC) y la vinculación a través de este, no las características o diferencias en sí entre los objetos matemáticos.

Se esperaba que en el inciso: (a) expresaran la relación entre los tres objetos matemáticos, estableciendo que la derivada se obtiene mediante un proceso inverso al que se utiliza para obtener la integral y la antiderivada, mientras que estas últimas son muy similares, aunque difieren en términos generales.

En el inciso (b) los participantes deberían indicar que es precisamente el teorema fundamental del cálculo, en sus dos partes, el que relaciona de manera inversa los procesos de derivación y de integración. Además, podría añadirse que es a través de sus demostraciones que queda justificada tal relación.

Tabla 8. Porcentajes de respuestas correctas, parcialmente correctas, incorrectas y sin respuesta en los incisos de la T6

Inciso	Correctas	Parcialmente correctas	Incorrectas (no incluye sin respuesta)	Sin respuesta
a) Relación entre conceptos	11	63	19	9
b) Papel del TFC	11	30	35	37

Hay una diferencia apreciable entre los dos incisos en los datos de las columnas de la derecha de la Tabla 8. Esto podría explicarse porque el primer inciso permite expresar opiniones y hace referencia a nociones que se abordan en todas las tareas planteadas. Por otro lado, el segundo inciso hace referencia directamente a un teorema y su manejo parece plantear una dificultad adicional, a pesar de la importancia que tiene este en particular.

En concreto, para el primer inciso se categorizaron las respuestas de acuerdo con las relaciones entre los siguientes conceptos: antiderivada-integral, derivada-integral y derivada-antiderivada. El resumen de las respuestas se presenta en las Tablas 9, 10 y 11.

Tabla 9. Resumen de las referencias hechas sobre la relación entre la antiderivada y la integral

Categoría	Frecuencia
Son lo mismo	34
Hay una relación inversa	3
La antiderivada es parte de la integral	1
Son casi lo mismo	1
La antiderivada está relacionada con la función a través de la integral	1
Sin respuesta en general o no contestó a esto en particular	41

Tabla 10. Resumen de las referencias hechas sobre la relación entre la derivada y la integral

Categoría	Frecuencia
Tienen una relación inversa	51
Son operaciones contrarias	2
Son operaciones complementarias	1
Sin respuesta en general o no contestó a esto en particular	27

Tabla 11. Resumen de las referencias hechas sobre la relación entre derivada y antiderivada.

Categoría	Frecuencia
Tienen una relación inversa	39
Sin respuesta en general o no contestó a esto en particular	42

En resumen, se ve que la relación a la que los alumnos hacen más referencia es la derivada-integral. Es posible que sea a la que se le hace más énfasis en los cursos. En contraste, la gran mayoría de los alumnos considera que la antiderivada y la integral son lo mismo.

Asimismo, parece que la relación más clara entre las planteadas es la derivada-integral, ya que casi dos terceras partes de los participantes plantean la relación inversa entre ambos procesos (Tabla 10). Hay que mencionar que esta relación se presenta de diversas maneras a lo largo de los cursos. En cambio, esa percepción de una relación inversa se mantiene entre la derivada y la antiderivada, aunque en menor medida.

En cambio, al categorizar las respuestas del segundo inciso, se concibe, en general, que el TFC vincula las dos ramas del cálculo, lo cual se refleja en las respuestas de los alumnos: casi un tercio de ellas (el 32,5 %) hacen referencia de una u otra manera. A pesar de que las respuestas en blanco o declarando la ignorancia al respecto superan en un 58 %, lo cual puede interpretarse como desconocimiento o confusión que debe tomarse en cuenta. Ahora bien, solo una cuarta parte de las respuestas declara que el TFC es el medio por el cual se establece que son procesos inversos.

Por otro lado, en cuanto a la operativización del teorema, el 37 % de las respuestas se refiere a procesos de obtención de funciones o de cálculo. En particular, el 7 % de las referencias se refieren a la categoría dirigida a "evaluar integrales", con una referencia explícita a la primera parte del TFC, a la que en algunos libros de texto se denomina *teorema de evaluación* (Stewart, 1999). En particular, esta parte del TFC es mencionada explícitamente, aunque no necesariamente de manera completa ni simbólica, por solo el 6 % de los alumnos, mientras que el 10 %

mencionó la segunda parte del TFC (que explicita la relación inversa entre la derivación y la integración).

5. Comentarios y reflexiones sobre los significados de la integral

Como se ha señalado, el Cálculo Integral surgió inicialmente del estudio de áreas de superficies irregulares y del movimiento de objetos, incorporando más tarde la problemática de encontrar la función primitiva de una función dada. Cada uno de estos problemas originó prácticas específicas en la comunidad matemática y dio lugar a configuraciones epistémicas que corresponden a distintos significados parciales de la integral. Como resultado, algunos de estos significados parciales se han asociado tradicionalmente, en los cursos escolares, con la integral definida o la indefinida.

En el caso de la integral definida, el significado parcial más frecuentemente mencionado es el relacionado con el cálculo de áreas (CeD-5 y CeD-6), llegando a generalizarse para todo el cálculo integral. Más de la mitad de las menciones en la T1 (53 %) y en la sección de integral definida de la T3 (60 %) así lo evidencian, lo cual es esperable. Sin embargo, también aparece en el 10 % de la parte relativa a la integral indefinida en la T3 y en otras tareas ajenas al cálculo de áreas. Por ejemplo, un alumno responde en la T2:

> C1-10* La integral definida es el area bajo la curva en un intervalo cerrado donde la función existe y es integrable
>
> *La integral indefinida es el area/sumatoria de la curva en todos los valores donde la función existe y es integrable

Por su parte, el significado parcial vinculado a la obtención de funciones primitivas y a la CeI-4 se asocia principalmente con la integral indefinida. Este significado aparece en el 8 % de los casos en la T1 y en el 16 % en la sección correspondiente de la T3, sin referencias en la parte de la definida. Si además se consideran todas las menciones en las que la integral indefinida genera una función o una familia de funciones, aunque no se explicite la relación con el proceso inverso a la derivación, el porcentaje en la T3 asciende al 43 %. En la T1, habría que sumar el 17 % de las respuestas que mencionan la integración como operación inversa a la derivación.

Otro de los problemas fundacionales del Cálculo Integral, vinculado con la CeI-2 y el estudio del movimiento desde una perspectiva cinemática, se asocia principalmente con la integral indefinida (solo existe una mención en la sección de la integral definida en la T3). Este significado parcial está presente en el 1 % de las respuestas de la T1 y en el 10 % de la parte de integral indefinida de la T3. Además, es mencionado por el 12 % de los estudiantes en la T4, donde se plantea una situación de movimiento, aunque la resolución no se enfoque de ese modo. Si bien se trata de menos referencias en comparación con la CeI-4, este significado aparece cuando se abordan contextos de movimiento y se vincula sobre todo con la integral indefinida.

En síntesis, mientras que la integral definida —y la integral en general— suele asociarse a procesos de cálculo de áreas que producen resultados numéricos, la integral indefinida se vincula principalmente con la obtención de funciones.

En relación con la integral indefinida, otro conflicto detectado es la omisión de las constantes de integración (observado de la T1 a la T4). Esta confusión puede llevar a los estudiantes a no contemplar sus implicaciones, como sucedió en la T4 al no considerar necesaria esa información. Es probable que este tipo de conflicto induzca respuestas meramente mecánicas, sin movilizar el significado matemático adecuado para su aplicación:

> D2-15 [T2, sobre las diferencias.] A una se le pone +c y a la otra no.

Los procesos cognitivos vinculados con la noción de infinito constituyen otra fuente de conflicto. En general, no se hace referencia a la CeD-5, que concibe la integral definida como una suma infinita de sumandos infinitamente pequeños. Asimismo, en la T5 no se observa el uso de estrategias de partición y aproximación mediante el método de exhausción (recordando que la tarea requería proponer una estrategia y no calcular un resultado numérico).

Todo lo anterior abre la oportunidad de profundizar en la investigación sobre la comprensión de los significados de la integral, complementando lo realizado respecto a la derivada. Es relevante continuar indagando en las diferencias entre los significados de la antiderivada y la integral, ya que suelen confundirse, como evidencian los resultados de la T6. Desde la perspectiva estudiantil, si se perciben como equivalentes, puede surgir la duda sobre la necesidad de estudiar ambos conceptos.

Finalmente, resulta fundamental profundizar en los procesos de argumentación y justificación en la formación matemática de los estudiantes, ya que, como se observó en la T6 sobre el teorema fundamental del cálculo, no les queda claro el papel que desempeñan los teoremas en la construcción y comprensión de los conceptos matemáticos, así como en su uso y significado.

Reconocimientos

Este artículo se realizó como parte del proyecto "Conflictos en el aprendizaje de las nociones centrales del cálculo en alumnos de Ingeniería", financiado por la Universidad Autónoma de Querétaro en el marco del Fondo para el Fortalecimiento de la Investigación, Vinculación y Extensión (Fonfive-2024) con el registro FIN202424.

Referencias

Ávila Godoy, R., Ibarra Olmos, S. E. y Grijalva Monteverde, A. (2010). El contexto y el significado de los objetos matemáticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4–II), 337–354. https://relime.org/index.php/relime/article/view/278

Bressoud, D., Ghedams, I., Martinez-Luances, V. y Törner, G. (2016). *Teaching and learning of calculus*. Springer. https://doi.org/10.1007/9783-319-32975-8_1

Briceño, E., Hernández, J. y Morales, J. (2024). ¿Qué significados de la derivada favorece un profesor en su planeación de clase? *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, *15*, e1975. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v15i0.1975

Burgos, M., Bueno, S., Pérez, O. y Godino, J. D. (2021). Onto-semiotic complexity of the definite integral. *Journal of Research in Mathematics Education*, *10*(1), 4–40. https://doi.org/10.17583/redimat.2021.6778

Crisóstomo dos S., E. (2012). *Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: Una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. http://hdl.handle.net/10481/24493

Crisóstomo dos S., E., Ordóñez, L., Contreras, Á. y Godino, J. D. (2005). Reconstrucción del significado global de la integral definida desde la perspectiva de la Didáctica de la Matemática. En Á. Contreras, L. Ordóñez y C. Batanero (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Primer congreso internacional sobre aplicaciones y desarrollos de la teoría de las funciones semióticas* (pp. 125–166). Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén.

Faulkner, B., González-Martín, A. S., Gueudet, G., Ralston, P. y Hieb, J. (2025). Calculus in engineering programmes: Issues related to content, student persistence and applications. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *11*, 781–809. https://doi.org/10.1007/s40753-025-00280-8

Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en Educación Matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones.* McGraw-Hill Interamericana de España.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355. https://revue-rdm.com/1994/significado-institucional-y/

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM-Mathematics Education*, *39*(1–2), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Gordillo, W. (2015). *Análisis de la comprensión sobre la noción antiderivada en estudiantes universitarios* [Tesis doctoral sin publicar]. Universidad de los Lagos.

Gordillo, W. y Pino-Fan, L. R. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 535–558. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a12

Gordillo, W., Pino-Fan, L. R. y Larios-Osorio, V. (2019). Meanings that engineering students confer to the antiderivate. *Visión Electrónica*, *13*(2), 331–336. https://doi.org/10.14483/22484728.15165

Hitt, F. y Dufour, S. (2021). Introduction to calculus through an open-ended task in the context of speed: Representations and actions by students in action. *ZDM-Mathematics Education*, *53*(3), 635–647. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01258-x

Larios, V., Páez, R. E. y Moreno, H. (2021). Significados sobre la derivada evidenciados por alumnos de carreras de Ingeniería en una universidad mexicana. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática*, *20*, 105–124. https://doi.org/10.35763/aiem20.4002

Pino-Fan, L., Font, V., Gordillo, W., Larios, V. y Breda, A. (2018). Analysis of the meanings of the antiderivative used by students of the first engineering courses.

International Journal of Science and Mathematics Education, *16*(6), 1091–1113. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9826-2

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matematica e Pesquisa*, *13*(1), 141–178.

Rasmussen, C., Marrongelle, K. y Borba, M. C. (2014). Research on calculus: What do we know and where do we need to go? *ZDM-Mathematics Education*, *46*, 507–515. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0615-x

Romo-Vázquez, A. y Artigue, M. (2023). Challenges for research on tertiary mathematics education for non-specialists: Where are we and where are we to go? En R. Biehler, M. Liebendörfer, G. Gueudet, C. Rasmussen y C. Winsløw (Eds.), *Practice-oriented research in tertiary mathematics education* (pp. 535–557). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-14175-1_26

Stewart, J. (1999). *Cálculo diferencial e integral.* International Thomson Editores.

Zaldívar-Rojas, J. D., Cabrera, L. y Jiménez, A. (2025). Una aproximación variacional para la significación de los criterios de la derivada en la modelación-graficación. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática*, *27*, 157–177. https://doi.org/10.35763/aiem27.6157

∞

Víctor Larios Osorio

Universidad Autónoma de Querétaro (México)
vil@uaq.mx | https://orcid.org/0000-0002-4454-8516
Contribución: Conceptualización, análisis formal, investigación, metodología, administración del proyecto, visualización, redacción - borrador original y redacción - revisión y edición.

Rosa Elvira Páez Murillo

Universidad Autónoma de la Ciudad de México (México)
rosa.paez@uacm.edu.mx | https://orcid.org/0000-0001-7825-9686
Contribución: Análisis formal, metodología y redacción - borrador original.

Angélica Rosario Jiménez Sánchez

Universidad Autónoma de Querétaro (México)
rosariojs@uaq.mx | https://orcid.org/0000-0002-4950-4221
Contribución: Análisis formal, investigación y metodología.

Ricardo Iván Castañón Martínez

Universidad Autónoma de Querétaro (México)
rcastanon17@alumnos.uaq.mx | https://orcid.org/0009-0009-6657-1993
Contribución: Investigación.

Recibido: 19 de septiembre de 2025
Aceptado: 28 de marzo de 2026

The Meanings of the Integral Developed by Engineering Students

Víctor Larios Osorio [1], Rosa Elvira Páez Murillo [2], Angélica Rosario Jiménez Sánchez [1], Ricardo Iván Castañón Martínez [1]

[1] Universidad Autónoma de Querétaro (México)
[2] Universidad Autónoma de la Ciudad de México (México)

This article examines the construction of meanings of the definite and indefinite integral among engineering students. The aim of the study is to identify the meanings mobilized by students when solving open-ended tasks related to the different partial meanings that have emerged throughout the historical development of integral calculus. The study adopts a qualitative approach, and the collected data were analyzed using the ontosemiotic approach to mathematical cognition and instruction (OSA) to identify the meanings mobilized by students. The results show that students predominantly mobilize partial meanings of the integral associated with the calculation of areas and with the inverse process of differentiation, whereas other meanings appear only marginally in their responses. These findings suggest the need to design instructional approaches that promote a broader articulation of the different meanings of the integral in engineering education.