AIEM

AVANCES DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

ISSN-e 2254-4313 | (2026) 29, 25-48 | aiem.es

seiem.es

Aprendizaje del Concepto de Logaritmo como División Sucesiva

Learning the Logarithm Concept as Repeated Division

Antonio Martín Barcala @, María Teresa González Astudillo @, Marta Molina @

Universidad de Salamanca (España)

Resumen ∞ Tradicionalmente, en las aulas se introduce el logaritmo como la inversa de la exponencial. Weber (2016) sostiene que esta definición genera errores y dificulta su comprensión, sugiriendo una enseñanza basada en modelos básicos alternativos. Presentamos una sesión diseñada para guiar a los estudiantes hacia la construcción del concepto de logaritmo como división sucesiva y aportar evidencia empírica de su potencial explicativo.

Se analizaron las discusiones de los alumnos mediante el marco teórico-metodológico Abstracción en Contexto para mostrar las acciones epistémicas ocurridas durante las actividades. Los resultados indican que este modelo favorece la construcción del concepto, ya que los alumnos reconocen su necesidad y llegan al constructo antes de recibir una definición formal. Además, lograron comprender y razonar algunas de sus propiedades básicas.

Palabras clave ∞ Abstracción; Concepto; División sucesiva; Logaritmo; Modelos básicos

Abstract ∞ Traditionally, logarithms are introduced in classrooms as the inverse of the exponential function. Weber (2016) argues that this definition leads to errors and hinders understanding, suggesting teaching based on alternative basic models. We present a lesson designed to guide students toward constructing the concept of logarithm as repeated division and to provide empirical evidence of its explanatory potential.

Students' discussions were analyzed using the Abstraction in Context theoretical-methodological framework to identify the epistemic actions that occurred during the activities. The results indicate that this model supports concept construction: students recognize its necessity and reach the construct before receiving a formal definition. They were also able to understand and reason about some of its basic properties.

Keywords ∞ Abstraction; Basic model; Concept; Logarithm; Repeated division

Martín Barcala, A., González Astudillo, M. T., & Molina, M. (2026). Aprendizaje del concepto de logaritmo como división sucesiva. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática, 29,* 25-48. https://doi.org/10.35763/aiem29.6724

1. Introducción

El concepto de logaritmo, creado para simplificar cálculos manuales, fue vinculado con la exponencial por Euler en 1765, facilitando su operatividad. Esta definición prevalece en la educación secundaria, como se observa en libros de texto actuales (Alcaide Guindo et al., 2016; Colera Jiménez y Gaztelu Albero, 2016; Gámez Pérez et al., 2016).

A pesar de su importancia, muchos estudiantes consideran los logaritmos difíciles y a menudo no logran una comprensión total (DePierro et al., 2008; Kenney, 2005). Investigaciones previas han identificado errores comunes en su manejo, desde confusiones con conocimientos previos hasta mal uso de sus propiedades (Aziz et al., 2017; Ganesan y Dindyal, 2014; Hoon et al., 2010).

La definición de logaritmo como inversa de la exponencial, aunque estándar, puede contribuir a estas dificultades, llevando a un aprendizaje memorístico (Weber, 2016). Para mitigarlo, se han propuesto enfoques educativos alternativos. Panagiotou (2011) sugiere una aproximación histórica para mostrar que los logaritmos son respuestas a problemas concretos. Weber (2016) aboga por un enfoque basado en múltiples interpretaciones conceptuales.

En España, según la ley educativa vigente, el logaritmo se introduce en 4.º de educación secundaria (Ley Orgánica 8/2013), con alumnos de 15-16 años. En este contexto, buscamos mejorar la comprensión del logaritmo en su primer contacto educativo, respondiendo a la pregunta: ¿Qué acciones epistémicas tienen lugar en el proceso de construcción del concepto de logaritmo a partir del modelo básico de división sucesiva? Para ello, se plantean los siguientes objetivos: 1) identificar dichas acciones epistémicas en una sesión diseñada para alumnos de 4.º de educación secundaria, y 2) analizar las ventajas de una enseñanza basada en el modelo del logaritmo como división sucesiva.

2. Marco teórico

Este trabajo se articula en torno a dos nociones: Modelos básicos (Weber, 2016) y Abstracción en Contexto (AiC) (Hershkowitz et al., 2001). Los modelos básicos facilitan la accesibilidad y comprensión del logaritmo, alineándose con la capacidad cognitiva y experiencia de los estudiantes. Estos modelos han inspirado el diseño de tareas que promueven la construcción del concepto. El modelo de Abstracción en Contexto permite analizar este proceso de construcción.

2.1. Modelos básicos de Weber

Vom Hofe y Blum (2016) describen los “modelos básicos” como representaciones mentales viables y robustas que permiten captar conceptos y procedimientos matemáticos tal como están representados en el ámbito mental. Este constructo, también denominado “ideas básicas” (Vom Hofe, 1998), “imágenes individuales” (Vom Hofe, 1998) o “modelos mentales” (Vom Hofe et al., 2006), se consideraba prescriptivo, describiendo las interpretaciones estándar de conceptos matemáticos a aprender (Weber, 2016).

Vom Hofe (1998) introduce una visión empírica, atendiendo a las interpretaciones reales de los estudiantes y las concepciones que guían su resolución de problemas. Destaca tres aspectos clave:

- La constitución del significado de un concepto matemático, vinculándolo a conocimientos o experiencias familiares.
- La generación de una representación mental correspondiente; es decir, una "internalización" que posibilita la acción operativa a nivel del pensamiento.
- La capacidad de aplicar un concepto a situaciones de la vida real, reconociendo una estructura correspondiente en contextos relacionados con la materia o modelando un problema con ayuda de estructuras matemáticas.

Al no haberse descrito modelos básicos para el logaritmo previamente, Weber (2017) identifica cuatro conceptualizaciones que también respaldan Vargas et al. (2022):

- Logaritmos como medida multiplicativa: el logaritmo de un número b (en base a) indica con qué frecuencia la base a contiene al número b como factor.
- Logaritmos como "contar el número de dígitos": el logaritmo (decimal) de un número b coincide con el número de dígitos de b menos uno.
- Logaritmos como "reductor" en la jerarquía de operaciones: el logaritmo de una expresión reduce las operaciones de tercer nivel (potencias y raíces) a operaciones de segundo nivel (multiplicaciones y divisiones) y reduce las operaciones de segundo nivel a operaciones de primer nivel (sumas y restas).
- Logaritmo como inversa de la exponencial: el logaritmo de un número en base a es el exponente al cual se debe elevar la base para obtener dicho número.

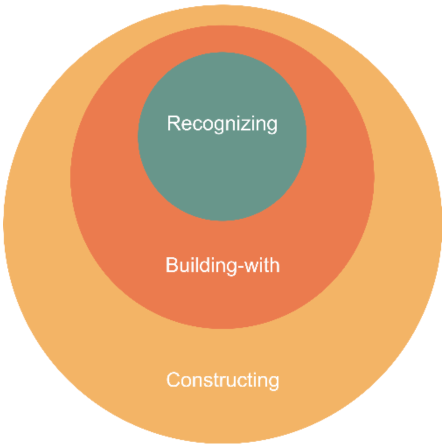
Enfoques similares al de los "modelos básicos" incluyen modelos tácitos (Fischbein, 1989), imágenes conceptuales (Tall y Vinner, 1981) y *use meanings* (Usiskin, 1991). Sin embargo, siguiendo la propuesta teórica de Weber, y buscando dar respuesta a nuestro problema de investigación, en este artículo nos centramos en el constructo de "modelo básico", especialmente en la medida multiplicativa, como punto de partida para la construcción y aprendizaje del logaritmo.

2.2. Abstracción en contexto

Schwarz et al. (2009) definen la abstracción como una reorganización vertical de constructos previos para crear uno nuevo. El modelo teórico Abstracción en Contexto (Hershkowitz et al., 2001) permite estudiar cómo los alumnos construyen un nuevo concepto mediante el análisis de sus interacciones (Butuner e Ipek, 2023). Este proceso tiene tres etapas: necesidad de un nuevo constructo, emergencia y consolidación al utilizarlo en otros contextos (Valongo y Felgueiras, 2022).

El modelo incluye tres tipos de acciones epistémicas (Hershkowitz et al., 2001): R-acciones (*Recognizing*), B-acciones (*Building-with*) y C-acciones (*Constructing*). Las R-acciones ocurren cuando los estudiantes reconocen un constructo previo relevante para un problema. Las B-acciones involucran trabajar con estos constructos para comprender la situación, mientras que las C-acciones integran constructos previos y generan un nuevo constructo. Estas últimas hacen referencia a la primera vez que se usa o menciona ese constructo nuevo y a menudo incluyen B-acciones y R-acciones, formando una estructura anidada (Schwarz et al., 2009) (Figura 1).

Figura 1. Modelo anidado de acciones epistémicas RBC



Este marco teórico funciona también como herramienta metodológica para analizar la construcción de conceptos (Hodiyanto et al., 2023), y lo utilizamos para examinar cómo los alumnos construyen el concepto de logaritmo a través del modelo básico de división sucesiva.

3. Metodología

Este estudio forma parte de un experimento de enseñanza de naturaleza cualitativa en el marco del paradigma de las investigaciones de diseño (Collins et al., 2004). Este experimento tiene como objeto de investigación el aprendizaje del concepto de logaritmo mediante una enseñanza basada en los cuatro modelos básicos propuestos por Weber. La sesión aquí analizada es la primera del segundo ciclo del experimento (Molina, 2011) y se ciñe al uso de la interpretación conceptual del logaritmo, considerado como la cantidad de divisiones hasta alcanzar la unidad.

3.1. Diseño e implementación de la sesión de trabajo en el aula

Se propusieron varias tareas para provocar la necesidad y construcción de nuevo conocimiento y facilitar la transición entre el conocimiento informal y el formal. Las actividades dirigían a los alumnos hacia la construcción progresiva del concepto de logaritmo, basándose en la conceptualización de división sucesiva. Se buscó que las tareas estuvieran contextualizadas en un entorno reconocible, como el crecimiento exponencial de las amebas, y que las pudieran abordar partiendo de herramientas conceptuales que poseyesen.

La propuesta se estructuró en dos partes. La primera buscaba generar un proceso de construcción conceptual, aumentando la dificultad de las tareas según el crecimiento de las amebas, las reproducciones y el tiempo necesario para alcanzar cierta cantidad. La segunda parte, entregada tras completar la primera, se centraba en la abstracción y formalización del concepto. Se introdujo el término logaritmo y se practicó el cálculo de logaritmos de diferentes bases mediante divisiones sucesivas, así como el uso de la terminología asociada.

La sesión se realizó en un aula de 4.º de educación secundaria con 29 alumnos que habían completado satisfactoriamente el bloque de "Números y álgebra" (Ley Orgánica 8/2013), pero sin conocimiento previo sobre logaritmos. Se dividieron en siete grupos de 4 o 5, trabajando juntos durante los 50 minutos de la clase. El profesor-investigador, a cargo de la sesión, aseguraba la comprensión de las actividades, reconduciendo a los alumnos cuando era necesario.

La organización de la enseñanza en equipos se basó en una concepción cultural y social del proceso de instrucción. La interacción social permitió a los alumnos construir su conocimiento y expresar sus ideas, facilitando explicaciones colectivas que no se lograrían individualmente (Cobb, 1995).

3.2. Análisis de los datos

Para el análisis, además de las respuestas escritas por los grupos y las notas de campo tomadas durante la experimentación, se disponía de videograbaciones de las discusiones en los pequeños grupos que fueron transcritas. Con tal de completar la información, se tuvo en cuenta la visualización del video observando el lenguaje corporal y las acciones en momentos de silencio o de peor calidad del audio, por ejemplo, cuando se superponen conversaciones paralelas, cuando consultan actividades previas o cuando hablan con integrantes de otros equipos (Delgado Martín et al., 2014).

Para este artículo se seleccionó un grupo entre los siete que permitiera describir el proceso de construcción del concepto de logaritmo. Para su selección se atendió a la claridad y calidad tanto del discurso como de las grabaciones.

Según cada actividad de la sesión, se establecieron unidades de análisis a las que se asignaron las acciones epistémicas identificadas según el marco teórico AiC. Para asegurar y discutir la asignación efectuada, se contrastó esta identificación entre los autores del presente artículo.

En la Tabla 1 se ilustra, a modo de ejemplo, el método de análisis descrito.

Tabla 1. Ejemplo del método de análisis según el marco AiC

Unidad de análisis	Acción epistémica	Observaciones/Justificación
[10] Marta: Vale... ¿Y cuántas 3 horas antes?		
[14] Manuel: Entre 8	R-acción	Reconocen la división como constructo útil para la resolución del problema.
[15] Marta: 3 veces entre 2...	R-acción	
[16] Marta: Sí, entre 2 a la 3	R-acción	Identifica la potencia como método de representación para esa misma división.
[17] Manuel: 2, esto es, el 2; este sale porque se dividen en 2, y el 3 es el número de horas	B-acción	Actúa sobre los constructos reconocidos (división y potenciación) para lograr la comprensión de la situación.

Unidad de análisis	Acción epistémica	Observaciones/Justificación
[18] Marta: "¿Hace cuántas horas habría tan solo 1 ameba?" Vale, pues… Eh… Ah, sería 4096 entre 2 a la "x" es igual a 1	R-acción	Acude a la ecuación exponencial como constructo ya conocido para plantear el enunciado del problema.
[20] Rosa: Lo puedes ir dividiendo hasta que te dé 1.	B-acción	Combina constructos previamente reconocidos para establecer una estrategia de resolución.
[42] Marta: Estos son… 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12… 12… Muy bien, tenías razón, José, qué listo eres [43] Marta: O sea, 2 a la 12, entre 2 a la 12, es igual a 1… 12, como aquí era 3, y eran 3 horas antes… Pues aquí, 12 horas antes	C-acción	Produce un nuevo constructo (número de divisiones realizadas hasta llegar a 1) como respuesta al problema.

4. Resultados

Se presentan los resultados organizados en cuatro apartados según las diferentes fases de construcción del concepto de logaritmo observadas durante la sesión: uso de constructos previos, generalización del proceso, necesidad de un nuevo constructo y formalización del logaritmo y de sus propiedades. Los extractos aparecen cronológicamente según se sucedieron a lo largo de la sesión. Por limitaciones de espacio se han omitido las partes de la transcripción en las que no se hace explícita ninguna acción epistémica. En la descripción se indican mediante corchetes las intervenciones de los alumnos en las que se ve reflejada cada afirmación.

4.1. Uso de constructos previos

En la primera parte de la tarea se buscaba que los estudiantes identificaran la división sucesiva como herramienta para la resolución de varias actividades contextualizadas. En la primera pregunta se pretende llevar a los alumnos a determinar la operación aritmética necesaria para obtener el número de amebas en un cultivo una hora antes [1]. En el diálogo entre los alumnos se observan R-acciones al reconocer la división como constructo previo relevante para la obtención del resultado esperado, en un primer momento de forma más intuitiva [7]; y, posteriormente, verbalizando un razonamiento basado en el concepto de operaciones inversas [9], realizando de nuevo una R-acción.

> [1]. Marta: "Si en un momento determinado tenemos 4096 amebas, ¿cuántas teníamos 1 hora antes?"… Vale, cada hora…
>
> [2]. José: 2048… Sí, ¿No?
>
> [3]. Manuel: Ah, ya… Yo tenía una duda, eh, que era si… Si cada una se dividiera, en plan… 1 y sale otra, ¿o 1, salen 2?
>
> [4]. Marta: Un… De 1 salen 2.
>
> [5]. José: De una salen 2.
>
> [6]. Marta: Si tienes 5, tienes 10… O sea, que si tienes… Eh…

[7]. José: Por eso digo entre 2.

[8]. Marta: Vale, entonces… ¿Cómo lo reflejamos en los cálculos? ¿Cuántos tenía 1 hora antes? Pues…

[9]. Manuel: A ver, si cada hora… Se multiplica por 2… 1 hora antes se dividirá por 2.

A continuación, al repetirles la pregunta, pero esta vez tres horas antes [10], un alumno calcula la solución realizando mentalmente divisiones sucesivas [11] para, inmediatamente después, identificar entre todos los miembros del equipo, en varias R-acciones encadenadas, tres estrategias distintas [14], [15] y [16] para la resolución del problema. En particular, se reconocen las potencias [16] como un constructo específico previo que los alumnos ya poseen y que tiene valor representativo en esta situación. En este momento, además, se produce una B-acción al relacionar estos constructos y generar una estrategia de resolución válida para otras situaciones [17], identificando la base de la potencia como el divisor y el exponente como el número de horas que pasan o han de pasar (Figura 2).

[10].Marta: Vale… ¿Y cuántas 3 horas antes?

[11]. Manuel: 2048, 1024, 512…

[12].José: Sí.

[13].Marta: Sí… Habrá que dividirlo…

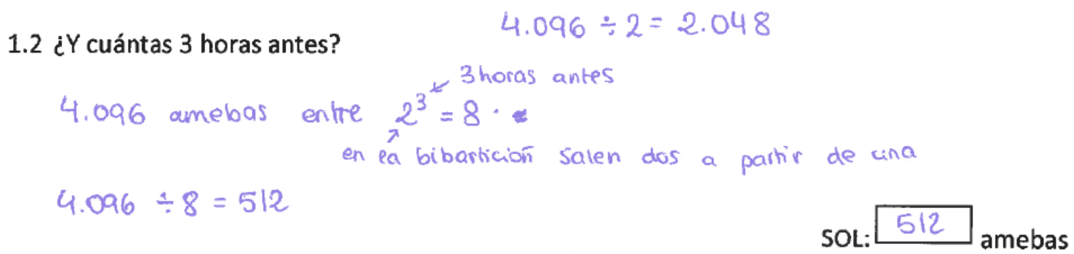
[14].Manuel: Entre 8

[15].Marta: 3 veces entre 2…

[16].Marta: Sí, entre 2 a la 3.

[17].Manuel: 2, esto es, el 2; este sale porque se dividen en 2, y el 3 es el número de horas.

Figura 2. Respuesta escrita a la pregunta 1.2



En el tercer apartado de esta primera pregunta introductoria (Figura 3) se dirige al alumno, aunque sin mencionarlo de forma explícita, hacia el cálculo del logaritmo en base dos de 4096. Los estudiantes, mediante una B-acción, combinan los constructos de división y de potencia reconocidos anteriormente para, mediante una nueva R-acción, plantear la situación en forma de ecuación exponencial [18].

[18].Marta: "¿Hace cuántas horas habría tan solo 1 ameba?" Vale, pues… Eh… Ah, sería 4096 entre 2 a la "x" es igual a 1.

En el siguiente fragmento, por un lado, una alumna encadena varias R-acciones sobre la resolución de la ecuación exponencial [19] y [21-23], mientras que otra insiste, hasta en dos ocasiones, en la división sucesiva hasta llegar a 1 como método de resolución [20], [24] y [25], llevando a cabo así una B-acción.

[19].Marta: Yo creo que lo mejor es poner esto en potencia de base 2, ¿No?

[20]. Rosa: Lo puedes ir dividiendo hasta que te dé 1.

[21].Marta: Si lo pensáis… Si lo pensáis para… Una cosa, una cosa… Si lo pensáis, para que dé 1.

[22]. Marta: Se tiene que dividir entre sí mismo.

[23]. Marta: Entonces… 2 a la… Lo que… 2 a la algo tiene que dar 4096…

[24]. Rosa: Entonces puedes ir dividiendo.

[25]. Rosa: Hasta que te dé 1.

Finalmente, en [26-27], [30] y [32-41], los alumnos se deciden a ir dividiendo sucesivamente entre 2 hasta llegar a 1 (B-acción) para posteriormente contar el número de divisiones realizadas [42], dando lugar así a la primera acción de construcción (C-acción) al generar un nuevo constructo, el número de divisiones realizadas hasta llegar a 1, como solución al problema planteado. Además, relacionan este nuevo constructo con el exponente, que, en el contexto del problema, representa las horas transcurridas desde el comienzo del experimento [43].

[26]. José: A ver… ¿Podemos seguir…? Desde 512, entre 2…

[27]. José: 256 entre 2, entre 2, entre 2…

[28]. Rosa: Claro.

[29]. José: Y te acaba dando ya…

[30]. Rosa: Hasta que te dé 1.

[31]. José: Y tú luego lo sumas, las horas desde aquí más las que…

[32]. Marta: O sea, dividiéndolo continuamente entre 2…

[33]. Marta: 2048.

[34]. Manuel: 1024.

[35]. Marta: 512.

[36]. Manuel: 256…

[37]. José: 128…

[38]. Manuel: 64… 32…

[39]. Marta, Manuel: 16… 8…

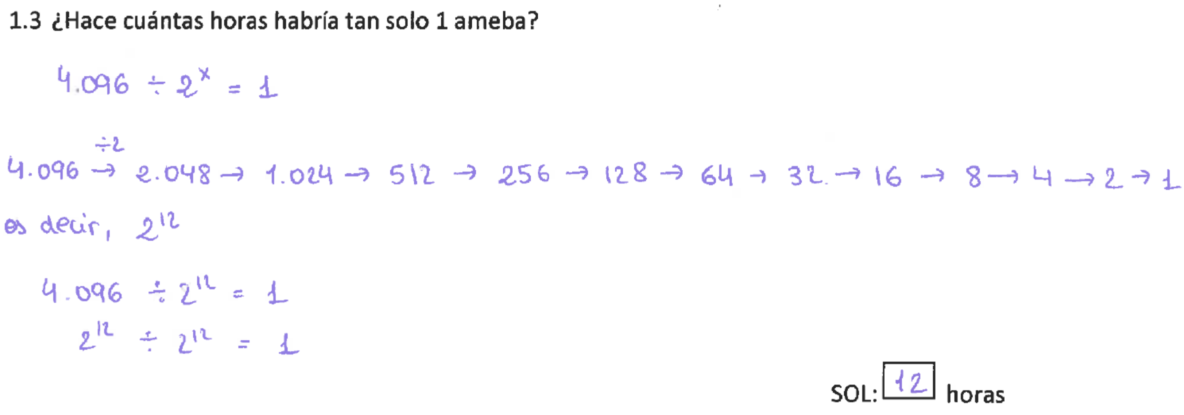
[40]. Manuel: 4.

[41].Marta, Rosa: 2 y 1…

[42]. Marta: Estos son… 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12… Muy bien, tenías razón, José, qué listo eres.

[43]. Marta: O sea, 2 a la 12, entre 2 a la 12, es igual a 1... 12, como aquí era 3, y eran 3 horas antes... Pues aquí, 12 horas antes.

Figura 3. Respuesta escrita a la pregunta 1.3



4.2. Generalización del proceso

En la segunda actividad de esta primera parte se plantea un escenario similar al anterior, pero cambiando la base del crecimiento exponencial [44] para fomentar en los alumnos una generalización de las estrategias y aprendizajes adquiridos. En el primer apartado, los alumnos realizan una R-acción al identificar la razón [46] por la cual han de multiplicar en el crecimiento exponencial del ejemplo que se les presenta y otra al recurrir a las potencias de base 5 para expresar el dato provisto en el enunciado [49].

[44]. Marta: Vale... "En otro estudio realizado en el mismo laboratorio se observa un organismo desconocido que se quintuplica cada hora". O sea... Si tenemos...

[45]. Manuel: De 1 salen 5.

[46]. Marta: De, de 10... ¿Cuántos salen? 5 por 10.

[47]. Rosa, Marta, José: 50...

[48]. Marta: Vale... "Si al cabo de 4 horas había 625 células, ¿con cuántas comenzó el cultivo?".

[49]. José: 5 a la 4.

Por otro lado, en una B-acción, los alumnos rápidamente se vuelcan en realizar divisiones sucesivas hasta llegar a 1 [50-55], como venían haciendo en la actividad anterior, lo que los lleva a contar el número de divisiones [57], es decir, de horas transcurridas, llegando a dudar de este dato [59] sin caer en la cuenta de que viene proporcionado en el enunciado y de que en este caso lo que se pide no es eso, sino el número inicial de amebas.

[50]. Manuel: 625, entre 5, 125, entre 5.

[51]. José: A ver... Claro...

[52]. Manuel: 25, entre 5, 5.

[53]. José: Así todo el rato.

[54]. Manuel: Y entre 5.

[55]. José, Marta: 1.

[56]. Manuel: Pero no ha pas...

[57]. Marta: O sea, 1, 2, 3, 4... 4 horas.

[58]. José: 5 a la 4.

[59]. Manuel: No, pero no han pasado 4 horas.

[60]. Marta: 4 hor... Sí, al cabo de.

[61]. José: Sí.

[62]. Marta: 4 horas, había 625...

[63]. Manuel: Por eso.

[64]. Marta: O sea que empezó con 1.

[65]. José: Comenzó con 1.

A continuación, en el diálogo transcurrido entre los alumnos en torno al segundo apartado de la segunda pregunta, se puede observar en las intervenciones [67] y [75] cómo, mediante una C-acción, identifican las horas con el número de multiplicaciones (en contraste con el número de divisiones que venían contando). Por otro lado, una alumna directamente da el salto a las potencias y asume, por el contexto del problema, que el dato se puede escribir como potencia entera de base 5 [68].

[66]. Marta: Ya, ya... Vale, perfecto... Venga... "Si posteriormente se observa que el cultivo consta ya de 15625 células, ¿cuánto tiempo ha pasado desde que se puso en marcha el experimento?"... Vale.

[67]. Rosa: Pues 625 vas multiplicando hasta que te dé eso y luego las multiplicaciones son las horas...

[68]. Marta: 15625, ¿qué potencia de 5 es?

[69]. José: 15625... A ver... 625 por 5 son 3000...

[70]. Marta: Vale... 625 por 5 son 3125.

[71]. Manuel: Y esto lo multiplicas por 5...

[72]. Rosa: Por 5 te da eso, creo que ya.

[73]. Marta: Eso quiere decir que...

[74]. Rosa: 2 horas...

[75]. Marta: 2 horas más, o sea, 6 horas desde que se realizó el experimento, porque si 625 lo habíamos conseguido en 4 horas...

4.3. Necesidad de un nuevo constructo

Tras las primeras actividades en las que han desarrollado y consolidado una estrategia de resolución extrapolable a diferentes casos de crecimiento exponencial, los alumnos ya muestran una correspondencia mental entre número de horas transcurridas en el experimento, número de divisiones, número de multiplicaciones y exponente de la potencia. En particular, se puede ver cómo responden con soltura a la siguiente pregunta, identificando claramente el exponente de la potencia como el número de horas transcurridas [76-77] (C-acción).

[76]. Marta: 6 horas… Vale, perfecto… "¿Cuántas horas transcurrirán hasta que tengamos 5 a la 20 células?".

[77]. José: 20.

Ante un breve momento de duda sobre la formulación del enunciado [78], mediante una B-acción, retroceden en su discurso para comparar con las operaciones y resultado de la actividad anterior y reafirmarse en su respuesta [80-84].

[78]. Marta: 20 horas, pero se refiere desde… ¿Desde las 6 horas, o desde el inicio?

[79]. Manuel: Desde el inicio.

[80]. Manuel: A ver, esto es 5 a la 6, ¿No?

[81]. Marta: Eh, 5 a la 6 es eso, sí, porque es.

[82]. Manuel, Marta: 5 por 5, por 5, por 5.

[83]. Marta: Por 5, por cin… 5 por… Sí, 5 a la 6…

[84]. Rosa: Entonces son 20 horas.

Sin embargo, se identifica una dificultad, que surge de la inseguridad y reside en la resistencia para considerar las 0 horas como punto de partida [87]. Además, se puede ver que algunos alumnos no alcanzan a comprender las implicaciones del crecimiento exponencial y, por tanto, de la escala logarítmica [93-99].

[85]. José: O no, espera.

[86]. Marta: Sí, 20 horas, pero no sabemos si desde las…

[87]. José: Pero, 5 a la 1, son 5… Y tenemos en la primera hora 1.

[88]. Marta: Esto es 1 hora, esto es otra hora, esto es hora, esto es otra hora… Que estas… De lo de 20, ¿es a partir de 6 o a partir del inicio?

[89]. Profesor: Desde el inicio.

[90]. Marta: Desde el ini… Pues 20 horas… "¿Cuántas horas transcurrirán hasta que tengamos 5 a la 20 células?".

[91]. José: 20 horas.

[92]. Manuel: Sí, ¿No?

[93]. Marta: Vale, 20 horas… ¿Cuántas horas transcurrirán…? 20 horas… Porque… 5 a la 20 horas… Porque es… Vamos a comprobarlo, venga… 1, 5…

[94]. Manuel: ¿Hasta 20?

[95]. Marta: Ya, cierto…

[96]. Manuel: 25, 125, 625…

[97]. José: ¿Lo vas a hacer?

[98]. José: Que es hacer 14 veces más la multiplicación que hemos hecho de 15000...

[99]. Marta: ¿14 veces más?

[100]. Manuel, José: Claro...

En la última pregunta de la primera parte de la sesión, los alumnos ya no llegan a considerar la división sucesiva como herramienta para su resolución e intentan encontrar directamente, mediante el uso de la calculadora, el exponente necesario que dé como resultado el millón de células. Al no obtener un resultado exacto, una alumna plantea la posibilidad de que los exponentes puedan ser decimales [110]; sin embargo, siguen sin obtener una respuesta que les convenza y es en ese momento en el que surge la necesidad de una herramienta que les proporcione el valor exacto esperado. Sorprende que un alumno identifique dicha herramienta como el logaritmo [126] sin que se le haya mencionado con anterioridad.

[101]. Marta: "¿Cuántas horas como mínimo fueron necesarias para alcanzar el millón de células?".

[102]. Manuel: Tú prueba 5 a la 9... Ya se ha pasado el millón.

[103]. José: Hala, no, a ver... 5 a la... A la 8...

[104]. Marta: Pero no lo hagáis a voleo.

[105]. José: 5 a la 9 mínimo, porque 5 a la 8 es esto...

[106]. Marta: A ver, 5 a la 9...

[107]. Manuel: 5 a la 9 es 1.900.000.

[108]. Marta: Vale... 5 a la 9 mínimo. O sea, 9 horas como mínimo.

[109]. Manuel: Sí.

[110]. Marta: No, porque... ¿Sabes lo que pasa? Imagínate en 5 horas y media... O sea, en se, en se... En 8 horas y media...

[111]. José: Ya, pero...

[112]. Marta: Igual en 8 horas y media ya ha superado el millón... Pon

[113]. José: Pero...

[114]. Marta: Pon 5 a la 8,5.

[115]. José: ¿5...?

[116]. Marta: A la 8,5.

[117]. Manuel: 873000.

[118]. José: No llega.

[119]. Manuel: 5 elevado...

[120]. Marta, Manuel: Elevado a la 8.

[121]. Marta: Coma 7.

[122]. José: 75.

[123]. Marta: Ya ahí ya es el millón.

[124].Manuel: Sí.

[125].Marta: Pues 5 a la 8.

[126].Manuel: ¡Ah, para eso hay que usar logaritmos!

[127].José: A las 9 horas.

[128].Marta: Como mínimo.

[129].Rosa: A las 9, porque con 8 no llega.

Al concluir la primera parte de la actividad, los alumnos tienen una intuición sobre la necesidad del constructo de logaritmo como herramienta para hallar exponentes. Es más, hasta en dos ocasiones han realizado una C-acción generando un nuevo constructo por matematización vertical: la realización de divisiones sucesivas entre un mismo número hasta llegar a 1 y la identificación del número de divisiones realizadas con el exponente esperado.

4.4. Formalización del logaritmo y propiedades

En la segunda parte de la actividad, al alumno se le presenta una definición de logaritmo [130]. En las actividades siguientes se aprecia cómo los alumnos asimilan el nuevo constructo repitiendo en voz alta su definición [134], [135-136] y [145] y, mediante una B-acción, observando los ejemplos anteriores [134] y [145], son capaces de extrapolar la definición para cualquier base [137-140].

[130].Marta: Vamos a ver… "Las soluciones a los ejercicios anteriores se conocen como logaritmos. Estos se pueden calcular realizando divisiones sucesivas entre la velocidad de crecimiento hasta llegar a 1. Algunos resultados son exactos, y otros, como en el apartado 2,4 son aproximados". Vale, sí… "De modo que, por ejemplo". Vale, a ver… 1.3, logaritmo 2, no sé, 4096 se lee logaritmo en base 2 de 4096. Y es igual a 12, porque 4096 se puede dividir entre 2 exactamente 12 veces hasta llegar a 1. ¿Vale? Vale, vale, perfecto. ¿Lo entend…? ¿todo el mundo… Más o menos, ¿no?

[131]. Rosa: Sí.

[132].Marta: Logaritmo en base 5, 625…

[133].Rosa: Supongo.

[134].Marta: 625 se puede dividir 4 veces entre 5 hasta llegar a 1… Vale… Vale… Logaritmo 3, o sea, en base 3, perdón… Es 2187… Vale, nos da…

[135].Marta: ¿En cuántas veces se tiene que dividir…? Ya, es que está tachado y corregido… Sin… ¿En cuántas veces se tiene que dividir para…

[136].José: Llegar a 1.

[137].Marta: … ¿Llegar a 1? Y el 3, este…

[138].José: Entre 3.

[139].Marta: En base 3… ¿Qué significa…? Ah, entre 3.

[140]. Rosa: José: Entre 3.

[141].Marta: Vale.

[142].José: Tiene que ir dividido.

[143].Marta: Entre 3…

[144]. José: Para llegar a 1.

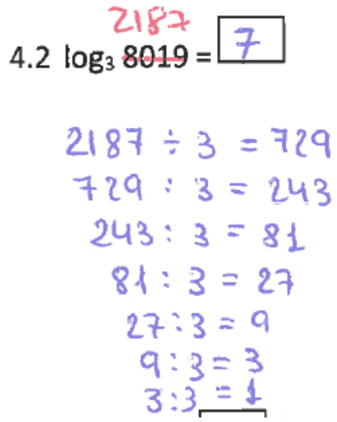
[145].Marta: O sea, aquí 5, entre 5… Pues aquí se tiene que dividir entre 3… ¿Cuántas veces se tiene que dividir 187 entre 3 para llegar a 1?

En la última intervención, uno de los alumnos realiza una C-acción al contar el número de divisiones como conclusión de la actividad y escribirlo como resultado del logaritmo [147] (Figura 4).

[146]. Marta: Vale, es decir, que hay que…

[147].José, Marta: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 [Cuenta el número de divisiones y lo apunta en la hoja].

Figura 4. Respuesta escrita a la pregunta 4.2



Pese a tener clara la definición [145] y parecer haber interiorizado el concepto, en la siguiente actividad los alumnos aplican una vez más el nuevo constructo generado al dividir sucesivamente el argumento entre la base [148-156], pero dudan en el momento en que las divisiones dejan de ser exactas [157]. Este momento produce inseguridad incluso hacia uno de los aspectos de la definición [159] que hasta ahora parecía estar claro. La inexactitud de las divisiones pone de manifiesto una dificultad en el algoritmo, que ya no les parece tan sencillo y, aunque los alumnos continúan dividiendo con el objetivo de llegar a 1 [161-173], se aprecian nuevas dudas al tener que dividir un número entre otro mayor [174]. Sin embargo, pese a las dificultades, finalmente uno de los alumnos identifica que, si el objetivo es llegar a 1, el número de divisiones necesarias debe ser algo mayor que 9 y algo menor que 10 [177] (Figura 5).

[148]. Marta: Vale, siguiente… Entre 2… Ochoci… A ver… 800 entre 2…

[149]. José, Marta: 400…

[150].Manuel, Marta: Entre 2… 200…

[151]. Marta: 200 entre 2…

[152].Manuel, José, Marta, Rosa: 100.

[153].Manuel: 50…

[154].Marta, Manuel: 50 entre 2... 25

[155].Manuel, José, Marta: 25 entre 2...

[156].José: 12,5.

[157].Marta: 12 coma... Espera, ¿cómo lo hacen aquí? Eh... ¿Ponen decimales...?

[158].Marta, Rosa: Sí.

[159].Rosa: Y, ¿hay que llegar hasta 1?

[160]. José: Vale...

[161]. Marta, José: 12,5...

[162].Manuel: Entre 2...

[163].Rosa: 6,25.

[164]. Marta: 6 coma... ¿Aquí cuántos decimales ponen? Vale, 2... 6,25...

[165].Manuel: Entre...

[166]. José: Entre 2...

[167].Marta: ¿Entre 2...?

[168]. Manuel: 3,125

[169]. Marta: 3 coma... A ver esto...

[170].José: 125.

[171]. Rosa: Pon todos.

[172].Marta: Sí... 125... 3,125, ¿entre 2...?

[173].Rosa: 1,5625.

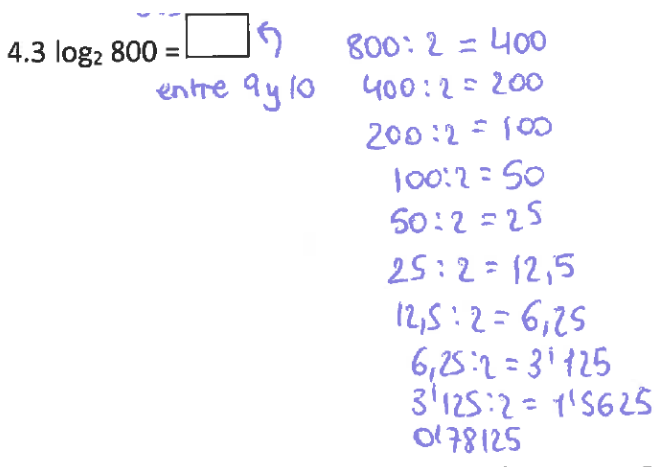
[174].Marta: 1,5625... Y este ya no se puede dividir más entre 2, o sea, me refiero, ya nos da 0 coma...

[175].Rosa: 0,78 te da

[176].Marta: Entonces, como lo que queremos es llegar a 1, pues aproximadamente será... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9... veces

[177].José: Entre... Pero las... ¿No sería entre 9 y 10?

Figura 5. Respuesta escrita a la pregunta 4.3



En la última actividad se pretende analizar cómo el modelo básico del logaritmo como número que cuenta divisiones puede ayudar o no a esclarecer algunas propiedades del logaritmo. En el primer apartado, los alumnos llegan rápidamente a la conclusión de que el logaritmo en base 6 de 6 es 1 [178-180], pero resulta difícil distinguir si en primera instancia su resultado hace referencia al número de divisiones necesarias para llegar a 1 o al propio resultado de la división del argumento entre la base [183] (Figura 6). Posteriormente, un alumno reafirma que el resultado del logaritmo es 1 porque “lo dividimos una vez” [197].

[178].Manuel, Marta: Logaritmo 6 de 6...

[179].Marta: O sea, en base 6, de 6... Vale...

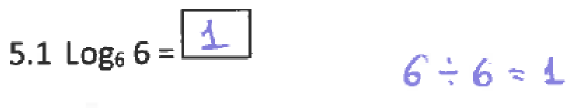
[180]. Manuel: 1.

[181]. Marta: Entonces hay que dividir entre 6...

[182].José: 1... Sí.

[183].Marta: O sea, 6 entre 6, sí... 6 entre 6 es igual a 1

Figura 6. Respuesta escrita a la pregunta 5.1



Por otro lado, en el caso del logaritmo en base 8 de 1, se puede apreciar una acción de consolidación del constructo al reconocer el valor de dicho logaritmo como 0 porque “1 ya está en 1” [184] o porque “no necesitamos dividirlo más” [199]. Es más, se aprecia una correspondencia entre “hacer el logaritmo” y “llegar a 1” [189-192].

[184]. Marta: O sea, 1... Vale... ¿Aquí 1 entre 8...? ¿Hasta llegar a 1...? Pero si 1 ya está en 1...

[185].Manuel: Ya está... 0... 0...

[186]. Rosa: No, porque ya, si divides entre 8...

[187].Marta: ¿1 entre 8...?

[188].Rosa: 0,125.

[189]. Marta: Ya, pero es que el loga... Es que ya está...

[190]. José: Ya está el...

[191]. Marta: O sea, ya está hecho.

[192].José: La solución ya está.

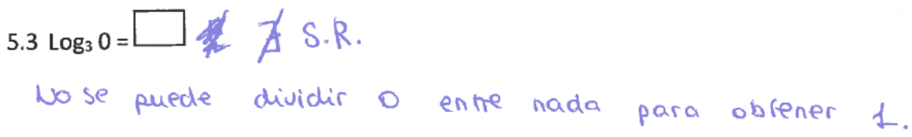
En las siguientes líneas, uno de los alumnos prueba a introducir en la calculadora log 1 y obtiene 0 [193], pero una de sus compañeras replica que están queriendo calcular logaritmo en base 8 [194] (por lo que el logaritmo en base 10 que ha calculado su compañero no le vale, no dándose cuenta así de que, sea cual sea la base, el logaritmo de 1 siempre será 0).

> [193].Manuel: Logaritmo de 1 es igual a 0... Tú escríbele, si, eh... si dividimos...
>
> [194]. Marta: Ya, pero logaritmo en base 8...
>
> [195].José: Claro, porque 0 es las veces que lo tienes que dividir... Entonces, 0 sí que puedes...
>
> [196]. Marta: No, 3 son las veces que tienes que dividir... O sea, no... 3 es el número en el que tie... Entre el que tienes que dividir 0.
>
> [197].José: Ya, y lo que te da es las veces que lo tienes que dividir... Aquí 1, porque lo dividimos 1 vez... Aquí entre 9 y 10... Pues aquí 0 porque...
>
> [198]. Marta: 0 porque no tienes...
>
> [199]. José: No necesitamos dividirlo más.
>
> [200]. Marta: Vale, vale... vale, vale... Sí, sí.
>
> [201].José: A ver, yo creo que es así.
>
> [202]. Marta: Entonces, como... el resultado es las veces que tienes que dividir este número para llegar a 1, aquí sería 0 porque no tienes que dividirlo ninguna vez...

Por último, en la intervención [203], los alumnos son capaces de llegar a la conclusión de que el logaritmo de 0 no tiene solución aplicando el modelo básico del logaritmo como división sucesiva (Figura 7).

> [203]. **Marta:** Vale, ¿y esto? Lo que pasa es que, claro... 0 no hay solución real porque no lo puedes dividir por nada para que dé 1...

Figura 7. Respuesta escrita a la pregunta 5.3



5. Discusión y conclusiones

Las actividades diseñadas permitieron que los alumnos construyeran el concepto de logaritmo gradualmente, pasando por las diferentes acciones epistémicas descritas en el modelo RBC (Hershkowitz et al., 2001).

Respecto a nuestro primer objetivo de investigación, en la primera parte de la sesión se produce un primer acercamiento informal al concepto de logaritmo partiendo de tres R-acciones destacables: dividir entre 2 como operación inversa a la duplicación de amebas [9], el uso de potencias como modo de expresar el divisor de una división sucesiva entre un mismo número [16] y la modelización mediante ecuaciones exponenciales [18] para la resolución de un problema.

A partir de estas R-acciones se produjeron una serie de B-acciones que concluyeron en una C-acción (Tabla 2) en la que se intuye el modelo básico del logaritmo como medida multiplicativa (Weber, 2016).

Tabla 2. Jerarquía de acciones epistémicas ocurridas durante la actividad 1 de la primera parte

R-acciones	Dividir (entre 2) [9]	Potencias [16]	Ecuaciones exponenciales [18]
B-acciones	División sucesiva [11 y 15]. División sucesiva hasta llegar a 1 [20, 24 y 25].	Interpretar la base y el exponente en el contexto del problema [17].	
	Identificar el número de divisiones realizadas con el exponente de la potencia y con el número de horas transcurridas [43].		
C-acción	Contar el número de divisiones realizadas como estrategia de resolución del problema [42].		

En el proceso de resolución de la actividad 2 de la primera parte, en el segundo apartado, se produce una nueva C-acción al contar el número de multiplicaciones realizadas (en contraste con el número de divisiones de la actividad anterior) e identificar estas con el número de horas transcurridas [67 y 75]. Dado que las C-acciones se constituyen a partir de B-acciones y R-acciones (Schwarz et al., 2009), este cambio de estrategia, de razonar en términos de divisiones a razonar en términos de multiplicaciones, viene condicionado por los primeros constructos reconocidos en cada caso: mientras que en la actividad 1 la primera R-acción identificada es la división, tras leer el enunciado de la actividad 2, los alumnos realizan una primera R-acción al identificar la razón por la cual se multiplica cada valor de la función exponencial descrita en el enunciado [46].

Antes de terminar la primera parte, aparecen las primeras dificultades al darse cuenta de que en algunos casos los exponentes buscados pueden o deben ser decimales. Así, se hace explícita la necesidad de un nuevo constructo [126], etapa necesaria en el proceso de abstracción (Valongo y Felgueiras, 2022).

La segunda parte de la tarea, orientada a la formalización del concepto, permite asociar las C-acciones previas con el concepto de logaritmo [147] (en una nueva C-acción) y afianzar el constructo mediante repetición y generalización de estrategias para el cálculo de logaritmos en cualquier base [137-140] (B-acciones). En particular, se aprecia cómo los alumnos recurren con frecuencia al concepto de logaritmo definido como “cuántas veces se tiene que dividir para llegar a 1” [134, 135-136 y 145].

Además, en cuanto a nuestro segundo objetivo de investigación, los alumnos son capaces de concluir, mediante razonamientos basados en el modelo básico de división sucesiva, propiedades básicas de la definición de logaritmo como $log_a a=1$, porque “lo dividimos una vez” [197], $log_a 1=0$, porque “1 ya está en 1” [184] y “no necesitamos dividirlo más" [199], y $log_a 0 = \nexists$ porque "no lo puedes dividir por nada para que dé 1" [203].

Por último, las dificultades mencionadas se hacen más explícitas aquí al aplicar la definición de logaritmo como división sucesiva y encontrarse con divisiones que dejan de ser exactas [157] o en las que el divisor es mayor que el dividendo [174]. Esto supone un valor añadido a las apreciaciones de DePierro, que afirma que los estudiantes no tienen claro el significado de una base elevada a un exponente decimal, posiblemente porque no parece haber una forma sencilla de determinar el resultado sin presionar un botón en una calculadora (DePierro et al., 2008).

Para Kenney (2005), el principal problema que los estudiantes tienen con los logaritmos es hacer conexiones significativas entre el concepto y el término logaritmo y su notación, entre otras cosas, debido a que esta última puede resultar ambigua: no "les dice" qué hacer. Con nuestra propuesta salvamos esta dificultad haciendo explícito el procedimiento de qué "hacer" al encontrarse con el logaritmo de una cantidad.

Se observa que los alumnos han sido capaces de construir el concepto de logaritmo a partir del modelo básico de división sucesiva, incluso antes de conocer una definición formal. Además, dicha definición les resulta operativa, recurriendo a ella para resolver las actividades o problemas con naturalidad. Por otro lado, el diseño de las tareas facilitó la necesidad del constructo, por lo que los alumnos no lo ven como algo extraño que les produzca inseguridad o rechazo, y este modelo básico les ayuda a comprender propiedades básicas de la definición de logaritmo. Aportamos, por tanto, evidencia empírica de su potencial explicativo, detallando las acciones epistémicas que llevan a los alumnos a la construcción del concepto a partir de este modelo básico.

Entre las limitaciones del estudio podemos señalar que este modelo básico carece del potencial necesario para el cálculo de logaritmos no exactos y es preciso, por tanto, dirigirles hacia otros modelos básicos con mayor aplicabilidad en la resolución de tareas más complejas. Por otro lado, se ha apreciado que los alumnos disponían de poco tiempo para realizar las actividades propuestas, lo que ha podido condicionar su desempeño.

Para la continuación de este trabajo, se propone ampliar el diseño de las actividades presentadas en este artículo con mayor espacio para la consolidación y puesta en común de los aprendizajes adquiridos, así como extender el alcance de la investigación a otros modelos básicos y su interdependencia entre ellos.

REFERENCIAS

Alcaide Guindo, F., García Martín, D., & Rocafort, J. A. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas: 4 ESO: Savia*. Fundación Santa María-Ediciones SM.

Aziz, T. A., Pramudiani, P., & Purnomo, Y. W. (2017). How do college students solve logarithm questions? *International Journal on Emerging Mathematics Education*, *1*(1), 25–40. https://doi.org/10.12928/ijeme.v1i1.5736

Butuner, N., & Ipek, J. (2023). Examination of the abstraction process of parallelogram by sixth-grade students according to RBC+C model: A teaching experiment.

European Journal of Educational Sciences, *10*(2), 101–125. https://doi.org/10.19044/ejes.v10no2a101

Cobb, P. (1995). Mathematical learning and small-group interaction: Four case studies. En P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 25–129). Lawrence Erlbaum Associates.

Colera Jiménez, J., & Gaztelu Albero, I. (2016). *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas, 4 ESO*. Anaya Educación.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 15–42. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2

Delgado Martín, M. L., Codes Valcarce, M., Monterrubio Pérez, M. C., & González Astudillo, M. T. (2014). El concepto de serie numérica. Un estudio a través del modelo de Pirie y Kieren centrado en el mecanismo "folding back". AIEM-*Avances de Investigación en Educación Matemática*, *6*, 25–44. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i6.85

DePierro, E., Garafalo, F., & Toomey, R. (2008). Helping students make sense of logarithms and logarithmic relationships. *Journal of Chemical Education*, *85*(9), 1226–1228. https://doi.org/10.1021/ed085p1226

Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 9–14.

Gámez Pérez, J. C., Grence Ruiz, T., Almodóvar, J. A., Pérez Saavedra, C., & Sánchez Figueroa, D. (2016). *Matemáticas académicas Serie Resuelve 4 ESO Saber Hacer*. Santillana Educación, S.L.

Ganesan, R., & Dindyal, J. (2014). An investigation of students' errors in logarithms. En J. Anderson, M. Cavanagh, & A. Prescott (Eds.), *Curriculum in focus: Research guided practice. Proceedings of the 37th anual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 231–238). MERGA.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*(2), 195–222. https://doi.org/10.2307/749673

Hodiyanto, Budiarto, M. T., Ekawati, R., Susanti, G., Kim, J., & Bonyah, E. (2023). How abstraction of a pre-service teacher in constructing relationships among quadrilaterals. *Journal on Mathematics Education*, *15*(2), 339–362. https://doi.org/10.22342/jme.v15i2.pp339-362

Hoon, T. S., Singh, P., & Ayop, S. K. (2010). Working with logarithms. *Malaysian Education Dean's Council Journal*, *6*(6), 121–129.

Kenney, R. (2005). Students' understanding of logarithmic function notation. En G. M. Lloyd, M. Wilson, J. L. M. Wilkins, & S. L. Behm (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Meeting of PME-NA*.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. (2013). *Boletín Oficial del Estado*. https://www.boe.es/eli/es/lo/2013/12/09/8/con

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75–88. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435

Panagiotou, E. N. (2011). Using history to teach mathematics: The case of logarithms. *Science & Education*, *20*, 1–35. https://doi.org/10.1007/s11191-010-9276-5

Schwarz, B. B., Dreyfus, T., & Hershkowitz, R. (2009). The nested epistemic actions model for abstraction in context. En J. M. Laborde (Ed.), *Intelligent learning environments: The case of geometry* (pp. 11–41). Springer.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Usiskin, Z. (1991). Building mathematics curricula with applications and modelling. En M. Niss, W. Blum, & I. Huntley (Eds.), *Teaching of mathematical modelling and applications* (pp. 30–45). Ellis Horwood.

Valongo, A., & Felgueiras, M. (2022). Constructing the continuity concept. *WSEAS Transactions on Advances in Engineering Education*, *19*, 109–120. https://doi.org/10.37394/232010.2022.19.11

Vargas-Hernández, J., Cano-Villamil, M. I., & Rúa-Vásquez, J. A. (2022). Deconstruction of the logarithmic function: Teacher training. *Eco Matemático*, *13*(1), 102–116. https://doi.org/10.22463/17948231.3919

Vom Hofe, R. (1998). On the generation of basic ideas and individual images: Normative, descriptive and constructive aspects. En A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (Vol. 4, pp. 317–331). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-011-5470-3_20

Vom Hofe, R., & Blum, W. (2016). "Grundvorstellungen" as a category of subject-matter didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(1), 225–254. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0107-3

Vom Hofe, R., Kleine, M., Blum, W., & Pekrun, R. (2006). The effect of mental models ("Grundvorstellungen") for the development of mathematical competencies. En M. Bosch (Ed.), *European Research in Mathematics Education: Vol. IV* (pp. 142–151). Autor.

Weber, C. (2016). Making logarithms accessible — Operational and structural basic models for logarithms. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(1), 69–98. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0104-6

Weber, C. (2017). Multiple models for teaching logarithms: with a focus on graphing functions. En T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME10* (pp. 537–544). DCU Institute of Education and ERME.

∞

ANEXO. ENUNCIADOS DE LA SESIÓN

SESIÓN 1: PRIMERA PARTE

1. En un laboratorio se está trabajando con un cultivo de amebas que se reproduce por bipartición cada hora:

Si en un momento determinado tenemos 4.096 amebas,

1.1 ¿Cuántas teníamos una hora antes?

1.2 ¿Y cuántas 3 horas antes?

1.3 ¿Hace cuántas horas habría tan solo 1 ameba?

2. En otro estudio realizado en el mismo laboratorio se observa un organismo desconocido que se quintuplica cada hora:

2.1 Si al cabo de 4 horas había 625 células, ¿con cuántas comenzó el cultivo?

2.2 Si posteriormente se observa que el cultivo consta ya de 15.625 células, ¿cuánto tiempo ha pasado desde que se puso en marcha el experimento?

2.3. ¿Cuántas horas transcurrirán hasta que tengamos 5^{20} células?

2.4. ¿Cuántas horas **como mínimo** fueron necesarias para alcanzar el millón de células? Puedes ayudarte de la calculadora.

SESIÓN 1: SEGUNDA PARTE

3. ¿Cuál de los dos casos tiene un crecimiento más rápido: la ameba o el organismo desconocido?

4. Calcula ahora mediante divisiones sucesivas (como en el ejemplo):

4.1 $\log_5 625 = 4$

625 se puede dividir 4 veces entre 5 hasta llegar a 1.

$625 : 5 = 125$

$125 : 5 = 25$

$25 : 5 = 5$

$5 : 5 = 1$

4.2. $\log_3 2187 = \boxed{}$

4.3 $\log_2 800 = \boxed{}$

5. Responde sin utilizar la calculadora, ¿cuál será el valor de los siguientes logaritmos? Justifica tu respuesta.

5.1 $\mathrm{Log}_6\, 6 = \boxed{}$

5.2. $\mathrm{Log}_8\, 1 = \boxed{}$

5.3. $\mathrm{Log}_3\, 0 = \boxed{}$

6. Escribe a continuación cómo se leerían los logaritmos del ejercicio 4:

4.1 Logaritmo en base ________ de ________ es igual a _________.

4.2 Logaritmo ____.

4.3 ____.

∞

Antonio Martín Barcala

Universidad de Salamanca (España)
amb852@usal.es | https://orcid.org/0009-0004-5265-0643
Contribución: conceptualización, investigación, análisis formal, metodología, redacción - borrador original.

María Teresa González Astudillo

Universidad de Salamanca (España)
maite@usal.es | https://orcid.org/0000-0003-4800-365X
Contribución: conceptualización, metodología, redacción - revisión y edición.

Marta Molina

Universidad de Salamanca (España)
martamolina@usal.es | https://orcid.org/0000-0002-1213-6162
Contribución: conceptualización, metodología, redacción - revisión y edición.

Recibido: 16 de marzo de 2024
Aceptado: 9 de noviembre de 2024

Learning the Logarithm Concept as Repeated Division

Antonio Martín Barcala @, María Teresa González Astudillo @, Marta Molina @

Universidad de Salamanca (España)

This article examines an instructional proposal for supporting students' construction of the concept of logarithm through the basic model of repeated division, instead of the traditional approach that defines logarithms only as the inverse of the exponential function. Building on Weber's notion of basic models and the Abstraction in Context (AiC) theoretical–methodological framework, the study seeks to analyze the epistemic actions that emerge when students engage in tasks specifically designed to create the need for the logarithmic concept. The teaching experiment was implemented with a class of 29 fourth-year secondary students who had previously studied exponential growth. The lesson was structured in two parts: the first focused on problems involving exponential processes in which students needed to determine earlier states of a system, encouraging them to interpret division as the inverse of multiplicative growth; the second part guided them toward generalizing this reasoning and articulating the idea of logarithm as the number of successive divisions required to reach a given value.

Classroom discussions and students' written productions were analyzed using the AiC framework, identifying recognizing (R-actions), building-with (B-actions), and constructing (C-actions). The results show that students were able to mobilize prior constructs related to powers and inverse operations and progressively reorganize them to make sense of situations requiring repeated division. Through collaborative work and teacher questioning, they generalized the process, representing it symbolically and linking the quotient structure to exponential notation. Before receiving a formal definition, several students explicitly expressed the emergent construct as "the number of times we divide by the base to obtain the target value," anticipating the core meaning of logarithm within this model.

The analysis also reveals that the repeated-division model helped students reason about some basic properties of logarithms, such as the relationship between multiplication of quantities and addition of exponents, and the dependence of the result on the base. These understandings were grounded in the activity context and supported by students' own justifications rather than by formal statements introduced externally. Overall, the findings provide empirical evidence that teaching logarithms through a basic model rooted in repeated division favors conceptual construction: students recognize the necessity of the concept, appropriate it meaningfully, and develop initial relational reasoning about its properties prior to formalization.