


Usar a Linguagem Algébrica com Compreensão: O Papel das Conjeturas, Generalizações e Justificações

Using Algebraic Language with Understanding: The Role of Conjectures, Generalizations, and Justifications

Kelly Nunes Aguiar @ , João Pedro Mendes da Ponte @ ,
Marisa Alexandra Ferreira Quaresma @ 

UIDEF, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (Portugal)

Resumo ∞ Neste artigo procuramos responder à questão de investigação: que relações existem entre a realização de conjeturas, generalizações e justificações e o uso da linguagem algébrica com compreensão pelos alunos? A partir de uma experiência de ensino e numa perspetiva qualitativa e interpretativa, os dados são recolhidos através de respostas escritas e orais de alunos no trabalho de sala de aula e em entrevistas. Os resultados mostram que as conjeturas, generalizações e justificações têm um papel fundamental na reflexão sobre os significados dos símbolos algébricos e sobre como estes podem expressar relações matemáticas. A promoção destes processos de raciocínio contribui para que os alunos atribuam significados aos símbolos algébricos com base em múltiplas perspetivas, concorrendo para o uso da linguagem algébrica com compreensão.

Palavras-chave ∞ Álgebra; Aprendizagem; Generalizações; Justificações; Raciocínio matemático

Abstract ∞ This article aims to address the following research question: what relationships exist between the formulation of conjectures, generalizations, and justifications and students' use of algebraic language with understanding? Drawing on a teaching experiment and adopting a qualitative and interpretative perspective, data are collected through students' written and oral answers during classroom work and in interviews. The results show that conjectures, generalizations, and justifications play a fundamental role in reflecting on the meanings of algebraic symbols and on how these can express mathematical relations. Promoting these reasoning processes supports students in assigning meaning to algebraic symbols from multiple perspectives, thereby contributing to the use of algebraic language with understanding.

Keywords ∞ Algebra; Generalizations; Justifications; Learning; Mathematical reasoning

Aguiar, K. N., Ponte, J. P. M., & Quaresma, M. A. F. (2026). Usar a linguagem algébrica com compreensão: O papel das conjeturas, generalizações e justificações. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática*, 29, 159-179. <https://doi.org/10.35763/aiem29.7118>

1. INTRODUÇÃO

Expressar generalizações, estabelecer relações e resolver problemas são alguns dos objetivos do ensino da Álgebra (Arcavi et al., 2017). A linguagem algébrica, por meio de símbolos de aceitação universal, permite que ideias matemáticas complexas sejam expressas sucintamente e interpretadas eficazmente (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Na aprendizagem da Matemática, porém, o que um aluno vê ao olhar para símbolos algébricos, depende do que está apto a perceber (Sfard e Linchevski, 1994). Nem sempre o significado que os alunos dão aos símbolos é o esperado pelo professor ou o subjacente ao planeamento da tarefa (Sfard e Linchevski, 1994). Por esta razão, ao longo da trajetória escolar dos alunos é necessário que eles desenvolvam a habilidade de ver ideias abstratas através de símbolos algébricos e uma compreensão profunda desta linguagem (Lannin et al., 2023). Integrar reflexão e questionamento no processo de aprendizagem é importante para que os alunos usem a linguagem algébrica de modo flexível e crítico (Friedlander e Arcavi, 2017).

Usar a linguagem algébrica deste modo, beneficiando do seu valor prático para expressar relações e resolver problemas, constitui um desafio para os alunos (Arcavi et al., 2017). No âmbito da educação matemática, é necessário investigar práticas que potenciem a compreensão dos alunos sobre como a linguagem algébrica serve de base à comunicação de ideias matemáticas (Lannin et al., 2023). Nesta perspetiva, realizamos uma investigação com alunos de 8.º ano de três escolas em Portugal, na qual buscamos responder à questão de investigação: *que relações existem entre a realização de conjecturas, generalizações e justificações e o uso da linguagem algébrica com compreensão pelos alunos?*

2. ENQUADRAMENTO TEÓRICO

2.1. Usar a linguagem algébrica com compreensão

Aprendizagem com compreensão é um termo conhecido, presente em diversos documentos curriculares (e.g., Ministério da Educação, 2021). Aprender com compreensão é conectar um conteúdo novo a outros conteúdos já conhecidos (Hiebert et al., 2000), ideia semelhante a *sense making*, que é “desenvolver compreensão de uma situação, contexto ou conceito conectando-a a conhecimento já existente” (NCTM, 2009, p. 4). Na Álgebra, assim como nas demais áreas da Matemática, é expectável que os alunos aprendam com compreensão (NCTM, 2009) e que desenvolvam significado para os símbolos algébricos (Lannin et al., 2023).

Usar a linguagem algébrica consiste na escolha autónoma de adotar símbolos algébricos e na interpretação e manipulação de símbolos algébricos dados. O que os alunos veem ao olhar para os símbolos algébricos e os significados que lhes atribuem na criação de expressões algébricas é uma questão central (Sfard e Linchevski, 1994). De acordo com White et al. (2023), os alunos devem ser capazes de interpretar e criar expressões algébricas considerando múltiplas perspetivas, onde estas expressões representam processos e objetos. Neste sentido, os alunos podem considerar, por exemplo, o contexto das expressões, os conceitos e propriedades

matemáticas que envolvem, e os procedimentos realizados. Lannin et al. (2023) sugerem que os alunos devem olhar para expressões algébricas como processo e como produto, tendo oportunidades de interpretar e reinterpretar seus significados em vários contextos, refinando sua compreensão das expressões. Do mesmo modo, Arcavi et al. (2017) afirmam que os alunos devem exercitar a procura pela estrutura expressa nos símbolos, a leitura do seu significado e a percepção de seu potencial na resolução de problemas. Deste modo, “usar a linguagem algébrica com compreensão” envolve adotar, interpretar e manipular símbolos algébricos dando-lhes significado a partir de conexões envolvendo contexto, conceitos e propriedades matemáticas, e procedimentos relacionados numa situação dada.

2.2. Conjeturas, generalizações e justificações

Conjeturar é um meio para se chegar a descobertas, sendo uma forma natural dos alunos se envolverem no raciocínio matemático (Lannin et al., 2011). Envolve raciocinar sobre relações matemáticas para desenvolver afirmações que se pensa poderem ser verdadeiras, mas que não foram provadas (Lannin et al., 2011). As conjeturas de natureza geral constituem generalizações, afirmando que uma propriedade ou procedimento é válido para um certo conjunto de objetos, e sendo o escopo da reivindicação maior do que o conjunto de casos verificados (Carraher et al., 2008). No contexto escolar é fundamental ter em conta o processo realizado pelo aluno e não apenas o produto da sua generalização (Lannin et al., 2011), pelo que as generalizações têm diferentes classificações. Radford (2003) chama de *factuais*, generalizações que advêm da observação empírica; *contextuais*, que pressupõem um alargamento a um novo conjunto de objetos; e *simbólicas*, que envolvem a compreensão e utilização da linguagem simbólica na expressão de relações. Semelhantemente, o reconhecimento de características comuns de objetos ou de regularidades a partir de exemplos pode ser considerado *generalização empírica*, enquanto a percepção de relações matemáticas, *generalização teórica* (Carraher et al., 2008) (Tabela 1). Expressar relações matemáticas é central nas generalizações teóricas, seja por meio de afirmações explícitas (*generalização contextual*) ou pelo uso de linguagem algébrica (*generalização simbólica*). Para Stylianides et al. (2017), a formulação de generalizações teóricas constitui um desafio para os alunos, mais propensos a formular generalizações empíricas.

Justificar é um processo de busca por dados que permitam mudar o valor epistémico de um enunciado para verdadeiro, falso ou mais provável (Jeannotte e Kieran, 2017). Na Matemática escolar é necessário considerar o conhecimento, a linguagem e as representações que estão dentro do alcance conceitual dos alunos quando formulam justificações e não apenas provas formais (Stylianides et al., 2017). Nesta perspetiva, as justificações podem ser classificadas (Tabela 1) como: *por convicção externa*, quando citam uma autoridade como um professor ou um livro, ou a aparência de um argumento (Harel e Sowder, 2007); *justificações empíricas*, quando os alunos se baseiam em exemplos aleatórios, selecionados ou genéricos e, *justificações analíticas*, quando têm uma natureza dedutiva, apresentando argumentos por coerência lógica ou aplicando definições, teoremas e propriedades (Harel e Sowder, 2007). Stylianides et al. (2017), consideram que os exemplos

genéricos, que apresentam características presentes em uma classe de casos, servem como uma ponte entre argumentos empíricos e dedutivos.

Tabela 1. Classificações de generalizações e justificações

	Classificação	Descrição
Generalizações	Empíricas/ factuais	Reconhecimento de características comuns de objetos ou de regularidades, a partir de casos particulares.
	Teóricas Contextuais ou simbólicas	Afirmações explícitas ou expressões algébricas para expressar relações matemáticas.
Justificações	Por convicção externa	Baseadas numa autoridade ou na aparência de um argumento.
	Empíricas	Baseadas em exemplos aleatórios, cuidadosamente selecionados ou genéricos, que apresentam características de uma classe de casos.
	Analíticas	De natureza dedutiva, sendo baseadas em coerência lógica ou na aplicação de definições, teoremas e propriedades matemáticas.

As classificações apresentadas na tabela 1 indicam características que estão na base de generalizações e justificações. Tais classificações não pretendem representar níveis, podendo surgir inclusive mais do que uma no decorrer do trabalho dos alunos ao formular generalizações e justificações.

3. METODOLOGIA DE INVESTIGAÇÃO

O estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan e Biklen, 1994), e a metodologia de Investigação Baseada em Design (Cobb, Jackson, & Dunlap, 2016). Esta opção justifica-se pelo propósito de estudar uma intervenção educacional, que busca promover aprendizagens particulares e compreender os processos que lhe estão subjacentes (Cobb et al., 2016). A investigação concretizou-se pela realização de uma experiência de ensino com alunos de 8.º ano, construída com características específicas para promover o raciocínio matemático. Sua conjectura inicial é: *uma experiência de ensino que tem como base o ensino exploratório e a promoção do raciocínio matemático, nomeadamente através da realização de conjecturas, generalizações e justificações, apoia o desenvolvimento do uso da linguagem algébrica com compreensão, na aprendizagem de tópicos algébricos.*

As características sobre as quais a experiência de ensino foi construída inserem-se na abordagem de ensino exploratório (Ponte, 2005), ou seja, num contexto onde os alunos assumem papel de destaque na interpretação de questões, na sua resolução e na comunicação de soluções, dado esta abordagem propiciar a promoção do raciocínio matemático (Ponte et al., 2020). Assim, elencámos um conjunto de princípios para a promoção do raciocínio matemático a partir de Ponte et al. (2020), para constituir a experiência de ensino, referentes a: dinâmica da aula, comunicação estabelecida, características das tarefas propostas e ações do professor na condução da aula (Tabela 2). Além destes princípios, consideramos ainda a

importância de valorizar a reflexão sobre os significados dos símbolos (Arcavi et al., 2017; Lannin et al., 2023) e de criar oportunidades para os alunos interpretarem, criarem e compararem expressões algébricas (Friedlander e Arcavi, 2017).

Tabela 2. Princípios da experiência de ensino

Aula Exploratória	Dinâmica	1. Favorecer que os alunos assumam um papel central na aula por meio da organização em três fases: lançamento da tarefa, trabalho autónomo dos alunos e discussão coletiva.
	Comunicação	2. Oportunizar os alunos a comunicar e refletir em conjunto, encorajando a partilha de ideias.
Características da tarefa	Gerais	3. Permitir uma variedade de estratégias de resolução; 4. Envolver uma variedade de representações;
	Específicas	5. Incentivar a formulação de conjeturas e generalizações; 6. Solicitar a justificação de respostas e estratégias; 7. Solicitar a identificação justificada da verdade ou falsidade de afirmações.
Ações do professor	Lançamento da tarefa	8. Assegurar que todos os alunos compreendem os termos matemáticos do enunciado;
	Trabalho autónomo	9. Acompanhar a resolução da tarefa dando as indicações necessárias, sem reduzir de modo significativo o seu grau de desafio; 10. Para os alunos com dificuldades em formular ou concretizar uma estratégia de resolução, dar sugestões ou colocar questões facilitadoras que os ajudem a chegar por si próprios a uma estratégia.
	Discussão coletiva	11. Explorar desacordos entre alunos, levando-os a argumentar as suas posições; 12. Aceitar e valorizar contribuições incorretas ou parciais, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique; 13. Solicitar a explicação do “porquê”, a apresentação de justificações de respostas ou estratégias e a formulação de justificações alternativas.

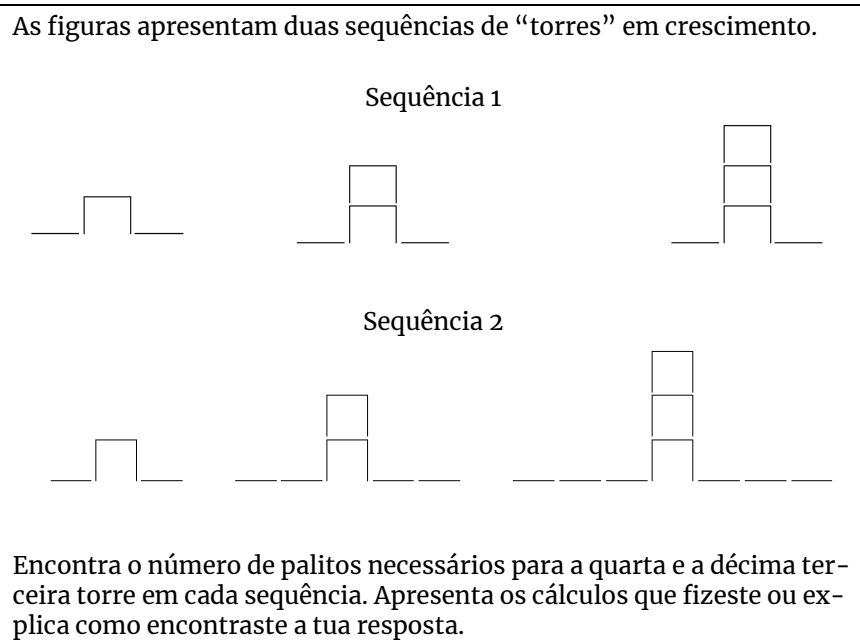
Nota. Autoria própria, a partir de Ponte et al. (2020).

A experiência de ensino foi realizada em três turmas de 8.º ano, designadas por A, B e C, de diferentes escolas em Portugal, constituindo três ciclos de design. Composta por seis aulas, lecionadas pelas professoras de Matemática de cada turma, a experiência de ensino preconizava um trabalho sólido junto às professoras no que concerne ao raciocínio matemático e aos princípios para o promover. Este trabalho concretizou-se por meio de reuniões com cada professora onde os princípios da tabela 2 foram amplamente discutidos assim como as tarefas que cumpram a experiência de ensino. O trabalho de sala de aula teve início em novembro de 2021, na turma A; em março de 2022, na turma B; e em outubro de 2022, na turma C, sendo as turmas constituídas por cerca de 20 alunos, que trabalharam em grupos de três a quatro. Cada aula, com duração de 90 minutos, foi dedicada a uma tarefa ou a uma parte desta, começando com a leitura da tarefa pela professora, seguida pela realização de cada questão autonomamente e, finalmente, pela sua discussão coletiva. As turmas escolhidas caracterizavam-se por uma boa participação nas aulas e as professoras interessavam-se pelo incentivo à comunicação, pelo que o ambiente durante as aulas da experiência de ensino era de participação e comunicação.

Os documentos curriculares vigentes previam um estudo inicial de *Sequências*, *Expressões algébricas* e *Funções* no 7.º ano, e o seu aprofundamento no 8.º ano, sendo esperado que os alunos representem situações por meio da linguagem algébrica e reconheçam vantagens no seu uso (*Aprendizagens Essenciais*, 2021).

Neste artigo analisamos respostas individuais e momentos de discussão decorrentes da resolução da primeira tarefa da experiência de ensino, e também respostas de alguns alunos a uma tarefa realizada em entrevistas. A seleção da primeira tarefa justifica-se pelo conjunto de conjeturas, generalizações e justificações que os alunos formularam já no início da experiência de ensino, tratando-se de um contexto de sequências familiar aos alunos. Esta tarefa, intitulada *Torres Crescentes* (Figura 1), é composta por questões referentes a duas sequências de figuras que possibilitam a observação de padrões de crescimento e a exploração da linguagem algébrica para os representar. Discutimos aqui respostas dadas apenas à primeira questão, uma vez que envolvem resultados notáveis no que respeita aos significados dados pelos alunos às expressões algébricas e sua relação com a formulação de conjeturas, generalizações e justificações.

Figura 1. Tarefa torres crescentes, questão 1



Nota. Adaptada de Friedlander e Arcavi, 2017

A realização de entrevistas deve-se ao facto de propiciarem uma fonte de dados detalhados acerca da aprendizagem dos alunos (Bogdan e Biklen, 1994). Estas entrevistas foram realizadas após a finalização da experiência de ensino com o objetivo de recolher dados na linguagem dos alunos, referentes às conjeturas, generalizações e justificações formuladas num contexto favorável ao uso da linguagem algébrica. Os participantes das entrevistas foram indicados pelas professoras, tendo como critério serem participativos nas aulas de Matemática. Centraremos a

nossa atenção em um aluno de cada turma, Nuno (turma A), Ester (turma B) e Ana (turma C) — nomes fictícios — pelo facto de suas contribuições nas discussões coletivas terem se destacado. A tarefa realizada visava a formulação de conjeturas, generalizações e justificações referentes a uma sequência de multiplicações, e a representação de relações por meio da linguagem algébrica (Figura 2).

Figura 2. Tarefa (entrevista 2)

Entrevista 2

Observa as multiplicações a seguir:

$$\begin{array}{l} 5 \times 5 = 25 \\ 6 \times 4 = 24 \\ 7 \times 3 = 21 \\ 8 \times 2 = 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times _ = 15 \\ _ \times 2 = _ \\ _ \times _ = 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} n \times n = n^2 \\ (n - 1) \times (_) = n^2 - 1 \\ (_) \times (n + 2) = n^2 - 4 \\ (n - 3) \times (_) = _ \end{array}$$

- a) A partir de 5, o que está a acontecer com o primeiro fator? E, a partir de 5, o que está a acontecer com o segundo fator?
- b) A partir de 25, o que está a acontecer com os resultados obtidos?
- c) Completa a sequência de multiplicações, seguindo o padrão da sequência anterior:
- d) Será que o padrão que encontraste se verifica sempre que se parte da multiplicação de um número por ele próprio? Justifica.
- e) Completa a sequência de multiplicações, para um número qualquer n . Justifica.
- f) A partir das alíneas anteriores, escreve uma generalização para a expressão abaixo. Justifica a tua resposta.

$$(n - a) \times (n + a) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Nota: adaptada de Ponte et al. (2009).

A recolha de dados foi feita pela primeira autora, por meio da observação direta das aulas da experiência de ensino, com recurso a gravação, vídeo e diário de bordo; de entrevistas a um conjunto de alunos por turma; e de recolha documental das produções escritas dos alunos. Foram utilizados como dados as produções escritas dos alunos e transcrições, de momentos de discussão coletiva e de entrevistas. Para a análise dos dados, começamos pela transcrição dos áudios e pela observação dos registos das produções escritas dos alunos. A seguir, identificamos momentos significativos das discussões e diálogos, e de que modo as resoluções escritas dos alunos contribuía para a sua análise. Por fim, analisamos estas unidades de registo a partir de categorias e subcategorias de análise (Tabela 3) definidas com base na revisão de literatura, em particular nos processos de raciocínio matemático (Carraher et al., 2008; Harel e Sowder, 2007; Lannin et al., 2011) e em perspetivas usadas para dar significados aos símbolos (Lannin et al., 2023; White et al., 2023).

Tabela 3. Categorias de análise

Dimensão	Categoria	Subcategoria
Processos de raciocínio matemático	Conjeturas	
	Generalizações	Empíricas/factuais Teóricas, contextuais ou simbólicas
	Justificações	Por convicção externa Empíricas Natureza analítica
Perspetiva para dar significados	Contexto da tarefa	
	Conceitos e propriedades matemáticos	
	Procedimentos	

Selecionamos excertos das discussões coletivas que enquadrassem as respostas de Nuno, Ester e Ana, no contexto da participação de outros alunos das turmas, e analisamo-los a partir das categorias e subcategorias indicadas na tabela 3. Ao optarmos por analisar, neste artigo, o trabalho de um número reduzido de alunos, temos em conta as limitações desta opção, mas visamos realizar uma análise profunda dos dados e apresentar uma descrição rica dos significados que estes alunos atribuem aos símbolos algébricos. Buscamos responder que conjeturas, generalizações e justificações os alunos formularam, e que perspetivas usaram para dar significados a símbolos e expressões algébricas. Ao longo da discussão referimos de que modo estas categorias contribuem para responder ao objetivo proposto. Os resultados estão organizados separadamente por tarefa e por turma, mostrando o desenvolvimento dos alunos tanto na aula como, posteriormente, na entrevista.

4. RESULTADOS

4.1. Tarefa torres crescentes

A questão 1 não solicitava o termo geral das sequências, mas muitos alunos tiveram a iniciativa de o procurar. Isto ocorreu nas três turmas e as discussões coletivas envolveram as expressões algébricas criadas pelos alunos. A seguir apresentamos os resultados, tendo em conta padrões observados nas respostas de Nuno, Ester e Ana, e na sua interação com outros grupos (representados por André, Sara e Estevão).

4.1.1. Turma A

As conjeturas que surgiram na turma A referiam a exploração empírica feita pelos alunos e buscavam expressar relações verdadeiras para termos quaisquer das sequências:

André: Eu vi que aumenta de 3 em 3. Então fiz 3 vezes 4, dá 12, mas como aqui tinha mais 2, fiz 12 mais 2, dá 14! Então é $3n + 2$. Já nesta fiz vezes 5, porque aumenta de 5 em 5 e dá certo, é apenas $5n$.

(...)

Nuno: Esta é a expressão da sequência $(3n + 2)$.

Professora: Então o que é este 3?

Nuno: O 3 é o número de palitos por andar.

Professora: O n é o quê?

Nuno: O n representa a posição... E o número de andares na figura.

Professora: E o 2?

Nuno: O 2 representa os dois palitos que têm nas laterais.

Professora: E se mantêm sempre o mesmo número?

Nuno: Nesta sequência sim, mas na 2 também se acrescenta palitos nas laterais. Então eu fiz $2n$ mais $3n$!

Professora: Os colegas disseram $5n$. É o mesmo?

(...)

Professora: Então, explica, Nuno, o $2n$ é o quê?

Nuno: São os palitos laterais, porque acrescentamos 2 palitos, um de cada lado.

Professora: Mas cada lado terá quantos palitos?

Nuno: Professora, na quinta posição terá 5, na sexta terá 6... Na posição n terá n de cada lado! Como são dois lados, $2n$!

Professora: Então, o que vocês acham, é o mesmo que $5n$?

André: Eu acho que sim. Acrescentamos 2 palitos nas laterais e 3 palitos na torre, 5 no total. O Nuno só contou separado!

Professora: Então são expressões...

Alunos: Equivalentes!

(Turma A, discussão, novembro de 2021)

André baseou-se na regularidade encontrada em exemplos, formulando uma generalização empírica/factual, enquanto Nuno descreveu relações entre a posição da figura e a sua estrutura/termo, apresentando uma generalização teórica/simbólica. Relacionando cada parte da expressão algébrica a um argumento lógico que a baseia, a justificação de Nuno tem natureza analítica, apesar de ter usado um exemplo genérico para explicitar o padrão do número de palitos laterais na sequência 2. André usou um procedimento onde se observa o aumento de um termo para outro e, se houver um valor constante, multiplica-se tal valor por n (posição qualquer da sequência), verificando a seguir se é necessário adicionar algo ao número resultante para obter o primeiro termo da sequência. Este procedimento constitui uma estratégia válida e sua justificação baseia-se na verificação de exemplos.

Ambos os alunos usaram a *perspetiva do contexto* para darem significado a $3n + 2$, $2n + 3n$ e $5n$, indicando o aumento de 3 e 5 palitos e, no caso de Nuno, apontando relações entre a posição de uma figura e a sua estrutura. Nuno deu significado às expressões pela *perspetiva dos conceitos*, relacionando os conceitos de multiplicação, adição e posição numa sequência, ao número de “andares” em ambas as sequências e ao número de palitos laterais na sequência 2. André, apesar de mencionar a multiplicação e a adição, não articulou estes conceitos para dar significado a

$3n + 2$ e $5n$, baseando-se essencialmente numa *perspetiva procedimental*. Ainda que este aluno tenha chegado a um termo geral, não evidenciou compreensão da relação matemática nele expressa. Vemos que tanto a generalização empírica/factual como a teórica/simbólica contribuíram para que os alunos dessem significado às expressões, uma vez que diferentes perspetivas foram consideradas. A justificação dada por Nuno foi essencial para que André observasse $3n + 2$ e $5n$ pela perspetiva dos conceitos, relacionando as estruturas das figuras à adição repetida, e para que reconhecesse aspetos diferentes do significado das expressões equivalentes $2n + 3n$ e $5n$.

4.1.2. Turma B

A formulação de conjecturas na turma B também veio a partir da exploração das sequências, apontando regularidades:

Sara: $3n + 2$ pois vai adicionando 3 palitos em cada torre.

Professora B: Certíssimo, só faltou explicar aqui de onde é que vem o 2.

Sara: Como, de figura para figura, vai se acrescentando mais 3 na sequência 1, então, por exemplo no 1, 1 vezes 3 não dá 5, que é o certo, então foi preciso acrescentar mais 2.

Professora B: Mais ideias?

Ester: Eu também fiz esta fórmula, porque 2 é o número de palitos usados na base, 3 é o número de palitos usados para a torre em si, e n é o número de camadas da torre!

Professora B: Perceberam a ideia da Ester?

Sara: Ah professora, faz sentido!

Professora B: Então, e para a outra sequência, Ester? Explica lá!

Ester: Então, se é sempre mais cinco, quer dizer que é multiplicado por 5 (...)
5 vezes o número de ordem.

Professora B: A expressão geradora, não é?!

Ester: Na torre, adicionamos 2 dos lados, quer dizer, 1 de cada lado e depois um piso! E um piso é constituído por 3 palitos!

(Turma B, discussão, março de 2022)

Sara baseou-se na verificação de exemplos, generalização empírica/factual, e Ester relacionou a estrutura das figuras aos padrões de crescimento de cada sequência, generalização teórica/simbólica. Esta aluna explicitou uma relação entre o número de ordem e cada termo na sequência 2, apresentando argumentos lógicos relativos à formação de cada figura, nomeadamente o número de palitos na base e a constituição de cada “piso” da torre. Por referir características presentes numa classe de casos, a justificação de Ester tem um carácter analítico. Sara, por seu lado, baseou sua justificação na verificação de exemplos, aplicando um procedimento válido para a escrita de um termo geral (explicitado na subsecção anterior).

A *perspetiva do contexto* foi usada pelas alunas para darem significado às expressões algébricas, pela observação do aumento de palitos e, no caso de Ester, pela identificação do padrão na estrutura das figuras. Ambas as alunas mencionaram os conceitos de adição e multiplicação, mas Ester relacionou-os em seu argumento sobre o padrão de formação das figuras e o número de ordem (na sequência 2), dando significado às expressões pela *perspetiva dos conceitos matemáticos*. Sara, apesar de mencionar conceitos, concentrou-se na aplicação do referido procedimento automático para a criação da expressão, usando predominantemente a *perspetiva procedimental* para dar significado a $3n + 2$. A generalização empírica/factual formulada por Sara contribuiu para que desse significado à expressão algébrica, mas a generalização teórica/simbólica e a justificação apresentadas por Ester possibilitaram que Sara tivesse uma maior compreensão da expressão, dando-lhe significado também pela *perspetiva dos conceitos matemáticos*.

4.1.3. Turma C

Na turma C vimos novamente a formulação de conjecturas a partir da exploração das sequências, indicando relações verdadeiras para um termo qualquer:

Professora C: E como é que chegaram a esta expressão? ($2 + 3n$)

Estevão: Como o primeiro termo é 5, vimos que é 3 vezes 1 porque aumenta de 3 em 3, e que precisava de mais 2, para dar 5, que é o primeiro termo!

(...)

Professora C: E na segunda sequência?

Estevão: É $5n$ porque aumenta de 5 em 5.

(...)

Ana: Nós também fizemos a fórmula 2 mais $3n$.

Professora C: Expliquem aos colegas porquê que é 2 mais $3n$!

Ana: Nós usamos estes dois palitos dos lados, e como só aumentava o do meio, 3 em cada termo, ficava 3 vezes n mais 2.

Professora C: E nesta sequência? Os palitos das laterais aumentam?

Ana: Aumenta 2 de um termo para o outro. Então, temos 2, 4, 6, que é $2n$.

Professora C: Então a parte do meio é na mesma $3n$ e as laterais $2n$?

Ana: Sim, fica $3n$ mais $2n$.

Professora C: E $3n$ mais $2n$ dá...

Alunos: $5n$!

Professora C: O mesmo que já tínhamos antes só que com outro significado.

(Turma C, discussão, novembro de 2022)

As generalizações formuladas por Estevão têm carácter empírico/factual, enquanto as formuladas por Ana apontam relações entre a estrutura das figuras e os padrões de crescimento, constituindo generalizações teóricas/simbólicas. As justificações de Ana assumem tanto um carácter analítico, ao indicar características

presentes em classes de casos, como empírico, pelo uso de exemplos para justificar $2n$. Estevão, porém, usa apenas exemplos para a aplicação de um procedimento (explicitados anteriormente).

Ambos os alunos usaram a *perspetiva do contexto* para dar significado às expressões pela observação do padrão de aumento de palitos, e no caso de Ana, pela identificação de padrões na estrutura das figuras. Apesar de ambos fazerem alusão aos conceitos de adição e multiplicação, apenas Ana os relacionou para dar significado às expressões pela *perspetiva dos conceitos*. Estevão usou essencialmente uma *perspetiva procedimental* para dar significado a $2 + 3n$ e escreveu um termo geral, entretanto não evidenciou uma compreensão profunda da relação matemática expressa. Tanto as generalizações empíricas/factuais como as teóricas/simbólicas contribuíram para a percepção de significados, mas as teóricas/simbólicas possibilitaram que mais perspetivas fossem consideradas, nomeadamente, contexto e conceitos. Por fim, as justificações de Ana foram usadas na discussão coletiva para que os alunos identificassem a equivalência entre $3n + 2n$ e $5n$, reconhecendo aspectos diferentes do significado destas expressões.

4.2. Entrevista

4.2.1. Nuno

Ao observar a primeira sequência de multiplicações, Nuno explicitou a conjectura de que havia um padrão e testou esta conjectura com outro número:

Nuno: Sim, existe um padrão, mas o difícil é explicar o porquê. Posso fazer mais um exemplo? Vou fazer com 9 vezes 9.

(...)

Nuno: Diminuiu sempre 1, 4, 9, 16 e 25.

Investigadora: E que números são estes?

Nuno: Ah, 1 vezes 1, 1. 2 vezes 2, 4. 3 vezes 3, 9.

Investigadora: Então o padrão existe?

Nuno: Sim, mas como vou explicar? Vou dizer que deu certo em exemplos aleatórios.

(...)

Nuno: Ah, aqui é n ao quadrado menos a ao quadrado.

Investigadora: Porquê?

Nuno: Eu segui a sequência que vi anteriormente! O resultado é o n ao quadrado menos o número que somamos ou subtraímos, ao quadrado. Mas vou fazer a multiplicação distributiva, para ver se dá mesmo.

(...)

Investigadora: Muito bem! E este exemplo?

Nuno: Era para mostrar que fazer com as setas dá no mesmo que fazer a multiplicação, como faríamos mesmo com números.

(Nuno, entrevista, janeiro de 2022)

O aluno baseou-se em exemplos para formular uma conjectura sobre a subtração de quadrados perfeitos (generalização empírica/factual), mas ao longo da sua resolução, observou uma relação entre o número adicionado e subtraído aos fatores da multiplicação e o valor subtraído ao produto (generalização teórica/simbólica). Apesar de reconhecer que apenas a apresentação de exemplos não seria válida, o aluno recorreu a uma justificação empírica, e apenas ao formular $(n - a) \cdot (n + a) = n^2 - a^2$ percebeu que poderia validar o seu argumento por meio da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (justificação de carácter analítico). Nuno usou ainda um exemplo para validar o uso da propriedade distributiva (figura 3).

Figura 3. Justificação de Nuno

$(n - a) \times (n + a)$
 $n^2 + na - na - a^2$

ex 1: $(100 - 50) \times (100 + 50) =$
 $= 100^2 + 5000 - 5000 - 2500$
 $= 10.000 - 2500$
 $= 7.500$

ex 2: $(100 - 50) \times (100 + 50)$
 $= 50 \times 150.$
 $= 15.000 \div 2$
 $= 7.500.$

O aluno deu significado a $(n - a) \cdot (n + a) = n^2 - a^2$ por várias perspetivas: *contexto*, pela sequência observada ao longo da tarefa e a relação identificada; *conceitos e propriedades*, pelos conceitos de multiplicação, subtração, quadrados perfeitos e pela propriedade distributiva, expressos na relação matemática; e *procedimentos*, pela multiplicação de monómios, adição algébrica e cálculo de expressão numérica. Vemos que a formulação de generalizações empíricas/factuais e teóricas/simbólicas, assim como a busca por justificações válidas, foram fundamentais para que Nuno desse significado a uma expressão algébrica complexa por meio de múltiplas perspetivas. Neste processo, cada perspetiva considerada destaca um aspeto do significado da expressão em causa, aumentando a sua compreensão desta.

4.2.2. Ester

Ester explorou as multiplicações, indicando uma conjectura sobre o padrão de formação de cada multiplicação e a sua relação com a linha em que estava, o que chamou de número de ordem:

Ester: Adicionamos e subtraímos o número de ordem. 1 depois é 2, 3...

(...)

Ester: No resultado subtraí 1, 4, 9...

Investigadora: Achas que há um padrão?

Ester: Sim, é 1 vezes 1, 2 vezes 2, 3 vezes 3, ou seja, o número de ordem multiplica por ele mesmo e dá o quanto nós devemos subtrair.

(...)

Investigadora: E achas que este padrão acontece para qualquer número?

Ester: Eu estou a pensar a fazer com um número aleatório para ver se dá certo.

(...)

Investigadora: E então?

Ester: Dá certo! Fiz mais dois exemplos! E se fizermos até ao 0 também dá! Diminui sempre 1, 4, 9, 16... Eu não posso escrever só que testei e deu certo, pois não? Não sei o que responder então vou dizer isto.

(...)

Ester: É n ao quadrado menos a ao quadrado, porque vimos nos exemplos!

Investigadora: Mas porquê? (A aluna pensa)

Ester: Ah, aqui posso fazer a distributiva! (...) E esta justificação agora chega!

(Ester, entrevista, abril de 2022)

Ester formulou uma generalização teórica/contextual, ao explicitar verbalmente as relações entre número de ordem, composição dos fatores de cada multiplicação e produto obtido, e depois uma generalização teórica/simbólica, pela expressão simbólica destas relações. Recorreu a exemplos aleatórios, uma justificação empírica, mas reconheceu que apenas isto não seria suficiente. Assim como Nuno, ao escrever $(n - a) \cdot (n + a) = n^2 - a^2$ a aluna lembrou-se de aplicar a propriedade distributiva para validar sua conjectura (justificação analítica) (Figura 4).

Figura 4. Justificação (Ester)

Handwritten text: $n^2 + na - an - a^2$ R: Pela propriedade distributiva o padrão é dado e certo.
 $n^2 - a^2$

Vemos novamente o uso de várias perspetivas para dar significado à expressão $(n - a) \cdot (n + a) = n^2 - a^2$: *contexto*, pelo padrão identificado nos exemplos; *conceitos e propriedades*, pelos conceitos de adição, subtração, multiplicação, potenciação e número de ordem de uma sequência, e pela propriedade distributiva da multiplicação; e *procedimentos*, pela multiplicação de monómios e pela adição algébrica na aplicação da propriedade distributiva. Ao formular generalizações teóricas (contextual e simbólica), e justificações empíricas e analíticas, Ester articulou várias perspetivas para dar significado à expressão em causa, o que contribuiu para a sua compreensão.

4.2.3. Ana

Ao observar as sequências de multiplicações, Ana apontou uma relação entre os números adicionados e subtraídos aos fatores, e o valor subtraído ao produto:

Ana: Subtraímos 1, 4, 9, 16 e 25, que são números quadrados.

Investigadora: Se subtrairmos estes números encontraremos os resultados corretos?

Ana: Acho que sim, são os números que somamos ou subtraímos aqui, mas ao quadrado! Será menos 1 ao quadrado, depois menos 2 ao quadrado...

Investigadora: Porquê?

Ana: Porque deu certo todas as vezes, mas sei que não posso explicar assim.

(...)

Investigadora: Se estivermos numa linha qualquer, onde adicionamos e subtraímos a , como saberemos o resultado?

Ana: Será n ao quadrado menos a ao quadrado, sabemos pela sequência.

Investigadora: Mas tens de dizer o porquê.

(...)

Ana: Ah! Aqui podemos fazer a distributiva nesta fórmula! Para ter a certeza!

(Ana, entrevista, novembro de 2022)

Ana explicitou verbalmente uma relação matemática entre os números adicionados/subtraídos aos fatores e os números quadrados perfeitos, formulando uma generalização teórica/contextual. No seguimento da tarefa esta aluna formulou uma generalização teórica/simbólica. Ana se apoiou nos exemplos para justificar sua resposta (justificação empírica) mesmo reconhecendo que apenas o uso de exemplos não seria suficiente. Tal como Nuno e Ester, após o uso da linguagem algébrica, Ana percebeu que poderia usar a propriedade distributiva para dar uma justificação válida.

Ana deu significado à expressão $(n - a) \cdot (n + a) = n^2 - a^2$ pela perspetiva do contexto, referindo o padrão da sequência, e pela perspetiva dos conceitos e propriedades, relacionando adição, subtração, potenciação e números quadrados perfeitos para descrever o padrão observado, e a propriedade distributiva da multiplicação para o justificar. A aluna não aplicou a propriedade distributiva para verificar a validade da expressão, mencionando esta possibilidade, mas realizou apenas os cálculos já relacionados na realização da tarefa. As generalizações teóricas (contextuais e simbólicas) formuladas por Ana possibilitaram que desse significado à expressão pelas perspetivas do contexto, e dos conceitos e propriedades matemáticas, contribuindo para a sua compreensão da expressão.

5. DISCUSSÃO

Os alunos se envolveram naturalmente na formulação de conjeturas (como em Lannin et al., 2011), e o ambiente promotor do raciocínio matemático encorajou os alunos a verbalizarem generalizações e justificações (Ponte et al., 2020). Na experiência de ensino, vimos uma ampla exploração empírica (como em Stylianides et al., 2017) e que esta precede o surgimento de generalizações teóricas (contextuais ou simbólicas) e justificações de natureza analítica, favorecendo a identificação de características presentes em classes de casos e relações matemáticas. Observamos,

particularmente nas entrevistas, o desenvolvimento de uma forte noção da necessidade de apresentar justificações que não se baseiem apenas em exemplos.

As conjecturas, generalizações e justificações formuladas pelos alunos, sejam elas de natureza empírica ou teórica/analítica, concorreram para a compreensão no uso da linguagem algébrica. Enumeramos na tabela 4, alguns dos principais contributos destes processos de raciocínio observados ao longo da experiência de ensino.

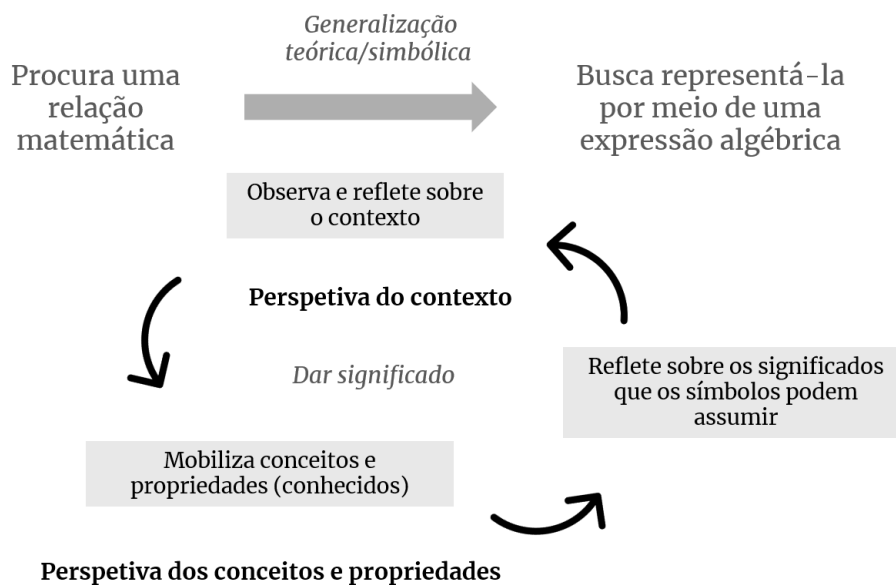
Tabela 4. Conjeturas, generalizações e justificações e o uso da linguagem algébrica com compreensão

Conjeturas e generalizações	<ol style="list-style-type: none"> 1. Conduzem os alunos na reflexão sobre os significados dos símbolos. 2. Evidenciam para os alunos o valor prático da linguagem algébrica de expressar relações matemáticas. 3. Apoiam os alunos na criação de expressões algébricas. 4. Favorecem a que os alunos deem significado aos símbolos pela perspectiva do contexto e dos conceitos e propriedades matemáticos. 	<ol style="list-style-type: none"> 6. Favorecem a prática de ver e rever os significados dos símbolos, contribuindo para a reflexão sobre eles. 7. Apoiam o reconhecimento de aspetos diferentes de um significado evidenciados por expressões equivalentes.
Justificações	<ol style="list-style-type: none"> 5. Evidenciam, para os próprios alunos, para colegas e para o professor, os significados atribuídos aos símbolos algébricos. 	<ol style="list-style-type: none"> 8. Favorecem a que os alunos transitem entre diferentes perspectivas para dar significado aos símbolos algébricos.

Enquanto formulavam *conjeturas e generalizações*, em tarefas de cunho algébrico, os alunos foram levados a refletir sobre os significados que os símbolos poderiam assumir. (1) Estes processos de raciocínio tornaram mais evidentes para eles o valor da linguagem algébrica para expressar relações matemáticas, (2) apoiando-os na criação de expressões algébricas (3). Os resultados mostram que os alunos que usam a linguagem algébrica para comunicar ideias matemáticas que eles mesmos conjecturaram e generalizaram, refletem sobre os símbolos, dando significado às expressões algébricas criadas (como destacam Lannin et al., 2023). Estes dois processos de raciocínio matemático favoreceram, em particular, que as perspectivas do contexto e dos conceitos e propriedades matemáticos fossem usadas pelos alunos para dar significado aos símbolos. (4) Ao comunicarem suas *justificações*, os alunos evidenciaram significados atribuídos aos símbolos e expressões algébricas. (5) Os três processos de raciocínio matemático contribuíram para que os alunos vissem e revissem os significados dos símbolos (6) e apoiaram o reconhecimento de aspetos diferentes de um significado evidenciados por expressões equivalentes, (7) como observamos na tarefa 1. Articuladas, *conjeturas, generalizações e justificações* favoreceram que os alunos vissem diferentes perspectivas para dar significados aos símbolos algébricos, (8) tanto durante a realização do trabalho autónomo como na discussão coletiva. A comunicação entre os alunos, mediada pelas professoras, foi fundamental para que isto ocorresse (como refere o NCTM, 2009).

Considerando a importância de que os alunos deem significado às expressões algébricas no seu contexto e sob diferentes perspetivas (Lannin et al., 2023; White et al., 2023), observá-las a partir do contexto, de conceitos e propriedades matemáticos, e dos procedimentos envolvidos é essencial para a compreensão dos símbolos algébricos, pelo que os contributos (4) e (8) se destacam. A *perspetiva do contexto* foi amplamente usada pelos alunos ao formularem generalizações empíricas/factuais e teóricas (contextuais ou simbólicas), assim como justificações empíricas e de natureza analítica. Tanto na primeira tarefa como nas entrevistas, vimos que os alunos usaram esta perspetiva para dar significado às expressões algébricas, e consideramos que as características da experiência de ensino foram fundamentais para este resultado. Relativamente ao uso da *perspetiva dos conceitos e propriedades matemáticos* para dar significado aos símbolos algébricos, a formulação de generalizações teóricas/simbólicas assumiu um papel central. Particularmente nas entrevistas, vimos que entre a identificação de uma relação matemática e a sua representação algébrica, os alunos observaram o contexto, mobilizaram conceitos e propriedades por eles conhecidos, e refletiram sobre os significados que os símbolos poderiam assumir para expressar a relação em causa (Figura 5). Neste processo os alunos transitaram pelo menos entre as perspetivas do contexto e dos conceitos e propriedades, desenvolvendo a sua compreensão da linguagem algébrica relacionada.

Figura 5. Generalização teórica/simbólica e perspetivas usadas para dar significado aos símbolos



As justificações de carácter analítico, mesmo não apresentando a formalidade de uma prova e estando de acordo com o que está ao alcance conceitual dos alunos (Stylianides et al., 2017), também apontaram para a perspetiva dos conceitos e propriedades matemáticos para dar significado às expressões algébricas. Este tipo de justificação se mostrou importante também para que os alunos usassem a *perspetiva procedimental* para dar significado às expressões no contexto das

generalizações teóricas/simbólicas. Nas entrevistas, os três alunos referiram a aplicação da propriedade distributiva para validar a expressão algébrica criada e dois deles de facto aplicaram procedimentos para confirmar a sua validade. Os alunos valorizaram a linguagem algébrica (Arcavi et al., 2017), procurando, a partir dela, alternativas para formular justificações que não se baseassem apenas em exemplos. Neste sentido, a perspetiva procedimental, articulada às outras perspetivas, contribuiu para uma maior compreensão pelos alunos das expressões algébricas em causa. Além disso, consideramos que o uso perspectiva procedimental sem uma articulação com a perspetiva dos conceitos e propriedades matemáticos, como observamos no trabalho de alguns alunos na tarefa 1, não aponta para uma compreensão profunda das expressões algébricas relacionadas.

Assim, a formulação de conjeturas, generalizações e justificações contribuiu para que os alunos vissem cada símbolo ou expressão algébrica por diferentes perspetivas, sendo que cada perspetiva adotada “ilumina” um ou mais aspetos da expressão algébrica, promovendo a realização de novas conexões (NCTM, 2009) e o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda da linguagem algébrica (Lannin et al., 2023).

6. CONCLUSÃO

Os resultados deste estudo indicam que a formulação de conjeturas, generalizações e justificações tem um papel fundamental para que os alunos desenvolvam o uso da linguagem algébrica com compreensão. Três aspetos centrais foram beneficiados por estes processos de raciocínio matemático: a reflexão sobre os significados dos símbolos; a perceção do valor da linguagem algébrica para expressar relações matemáticas e a capacidade de criar expressões; e a atribuição de significados aos símbolos algébricos por meio de diferentes perspetivas. As generalizações teóricas/simbólicas e as justificações de carácter analítico, em particular, favoreceram o uso da perspetiva dos conceitos e propriedades matemáticos e a sua articulação com outras perspetivas para dar significado às expressões algébricas, o que é essencial para que os alunos usem a linguagem algébrica com compreensão. Estes resultados devem ser entendidos tendo em conta o reduzido número de alunos participantes. Destacamos, no entanto, que a análise profunda dos significados que estes alunos deram aos símbolos algébricos, no contexto de promoção do raciocínio matemático, contribui para um melhor conhecimento do tema da compreensão da linguagem algébrica.

A realização de uma experiência de ensino com ênfase no raciocínio matemático dos alunos e a sua análise no que tange à aprendizagem da linguagem algébrica constitui um dos principais contributos de investigação deste artigo. A análise das relações entre a formulação de conjeturas, generalizações e justificações, e o uso da linguagem algébrica com compreensão, considerando as perspetivas usadas pelos alunos para dar significado aos símbolos algébricos, tem implicações para o ensino, nomeadamente no papel dos processos de raciocínio matemático na aprendizagem da linguagem algébrica. Futuros estudos nesta temática poderão ajudar a saber em que medida os alunos se tornam autónomos na formulação de conjeturas,

generalizações e justificações para dar significado aos símbolos e expressões algébricas, e quais as implicações disso para a sua aprendizagem.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é financiado pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através da Bolsa de Doutoramento 2020.08843.BD e da UIDEF – Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação, UIDB/04107/2020, <https://doi.org/10.54499/UIDB/04107/2020>.

REFERENCIAS

- Arcavi, A., Drijvers, P., & Stacey, K. (2017). *The learning and teaching of algebra: Ideas, insights and activities*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315545189>
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto Editora.
- Carraher, D., Martinez, M., & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM-Mathematics Education*, 40(1), 3–20. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7>
- Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. Em L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3ª ed., pp. 481–503). Routledge.
- Friedlander, A., & Arcavi, A. (2017). *Tasks and competencies in the teaching and learning of algebra*. NCTM.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. Em F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805–842). NCTM.
- Hiebert, J., Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Wearne, D., Murray, H., Olivier, A., & Human, P. (2000). *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. Heinemann.
- Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96, 1–16. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>
- Lannin, J., Austin, C., & Geary, D. (2023). Developing meaning for mathematical expressions. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, 116(8), 598–603. <https://doi.org/10.5951/MTLT.2022.0234>
- Lannin, J., Ellis, A., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematics reasoning: Pre-K-Grade 8*. NCTM.
- Ministério da Educação. (2021). *Aprendizagens essenciais: Matemática*. DGE.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. NCTM.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. Em GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). APM.
- Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. ME, DGIDC.
- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática*, 7–11.

- Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70. https://doi.org/10.1207/S15327833MTL0501_02
- Sfard, A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191–228. <https://doi.org/10.1007/BF01273663>
- Stylianides, G., Stylianides, A., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. Em J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237–266). NCTM.
- White, I., Foster, M., & Lobato, J. (2023). Making sense of algebraic expressions in context. *Mathematics Teacher: Learning and Teaching PK-12*, 116(8), 604–612. <https://doi.org/10.5951/MTLT.2022.0196>

∞

Kelly Nunes Aguiar

Instituto Superior de Educação e Ciências, ISEC Lisboa (Portugal)
kelly.carvalho@iseclisboa.pt | <https://orcid.org/0000-0002-8516-9715>
Contribución: redação original, investigação.

João Pedro Mendes da Ponte

Instituto Superior de Educação e Ciências, ISEC Lisboa (Portugal)
jpponte@ie.ulisboa.pt | <https://orcid.org/0000-0001-6203-7616>
Contribución: redacción, revisión y supervisión.




Marisa Alexandra Ferreira Quaresma

Instituto Superior de Educação e Ciências, ISEC Lisboa (Portugal)
mq@edu.ulisboa.pt | <https://orcid.org/0000-0002-0861-6016>
Contribución: redacción, revisión y supervisión.

Recibido: 22 de julio de 2024

Aceptado: 10 de diciembre de 2024

Using Algebraic Language with Understanding: The Role of Conjectures, Generalizations, and Justifications

Kelly Nunes Aguiar @ , João Pedro Mendes da Ponte @ ,
Marisa Alexandra Ferreira Quaresma @ 

UIDEF, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (Portugal)

Using algebraic language to express generalizations and represent mathematical relations poses a challenge for students throughout their educational trajectory, even though these are some of the main aims of algebra teaching. Therefore, it is necessary to investigate practices that enhance students' understanding of how algebraic language underpins the communication of mathematical ideas. From this perspective, we conducted a study with grade 8 students from three schools in Portugal, seeking to answer the research question: what relationships exist between the formulation of conjectures, generalizations, and justifications and the students' use of algebraic language with understanding?

The study followed a qualitative, interpretative approach and design-based research methodology, carried out through a teaching experience. This teaching experience was designed with a set of specific characteristics to promote mathematical reasoning. Their initial conjecture is: a teaching experience based on exploratory teaching and the promotion of mathematical reasoning, namely through the formulation of conjectures, generalizations, and justifications, supports the development of the use of algebraic language with understanding in the learning of algebraic topics. Data were collected from students' written and oral responses in classroom work and in interviews. Subsequently, the data analysis focused on the mathematical reasoning processes used by students and the perspectives mobilized by them to give meaning to algebraic symbols. Regarding the latter, the perspectives considered included the task context in which the symbols emerge, the underlying mathematical concepts and properties, and the related mathematical procedures.

The results of this study indicate that the formulation of conjectures, generalizations, and justifications plays a fundamental role in enabling students to develop the use of algebraic language with understanding. Three central aspects benefited from these mathematical reasoning processes: reflection on the meanings of symbols; perception of the value of algebraic language to express mathematical relations and the ability to create expressions; and the attribution of meanings to algebraic symbols through different perspectives. Theoretical/symbolic generalizations and analytical justifications, particularly, promoted the use of the perspective based on mathematical concepts and properties and their articulation with other perspectives to give meaning to algebraic expressions, which is essential for students to use algebraic language with understanding.