AIEM

Avances de Investigación en Educación Matemática

Revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

ISSN-e 2254-4313 | (2026) 29, 49-67 | aiem.es

seiem.es

Conocimiento Especializado de Futuros Profesores de Matemáticas de Secundaria al Desarrollar Tareas sobre Demostraciones

Specialized Knowledge of Prospective Secondary Mathematics Teachers in Developing Proof-Based Tasks

Elizabeth Advíncula Clemente @ [1], Isabel Torres Céspedes @ [1], Rosa Delgado Rebolledo @ [2], Flor Hau Yon @ [3]

[1] Universidad de Lima (Perú)
[2] Universidad de Valparaíso (Chile)
[3] Universidad de Piura (Perú)

Resumen ∞ La demostración es una actividad fundamental en matemáticas y su incorporación en distintos niveles educativos, con enfoques pertinentes, es relevante. Realizar actividades con demostraciones matemáticas favorece la comprensión de las matemáticas y por ello es importante que los futuros profesores desarrollen un conocimiento sobre esta práctica. En este estudio, desde un enfoque cualitativo, se busca comprender el conocimiento que manifiestan tres futuros profesores de matemáticas de secundaria al realizar tareas sobre demostraciones. Identificamos conocimientos sobre demostraciones particulares, sobre la demostración como práctica matemática y sobre aspectos didácticos de la demostración. Resaltamos el reconocimiento que hacen los futuros profesores de matemáticas sobre la demostración como una práctica que favorece el aprendizaje de las matemáticas y, en este sentido, señalamos la importancia de incluir la demostración en la formación inicial de profesores.

Palabras clave ∞ Conocimiento especializado; Demostración matemática; Educación secundaria; Formación inicial

Abstract ∞ Proof is a fundamental activity in mathematics, and its integration across different educational levels, with appropriate approaches, is relevant. Engaging in proof-related activities enhances students' mathematical understanding, making it crucial for prospective teachers to develop a deep knowledge of this practice. In this study, using a qualitative approach, we aim to understand the knowledge of three prospective secondary mathematics teachers as they engage in proof-related tasks. We identify their knowledge about specific proofs, proof as a mathematical practice, and the didactic aspects of proof. We highlight the recognition of proof as a practice that fosters mathematical learning by these future teachers and, in this regard, emphasize the importance of including proof in initial teacher education.

Keywords ∞ Initial training; Mathematical proof; Secondary education; Specialized knowledge

Advíncula Clemente, E., Torres Céspedes, I., Delgado Rebolledo, R., & Hau Yon, F. (2026). Conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas de secundaria al desarrollar tareas sobre demostraciones. *AIEM-Avances de Investigación en Educación Matemática, 29*, 49-67. https://doi.org/10.35763/aiem29.6735

1. Introducción

La demostración es una actividad fundamental en el desarrollo de la matemática y diversas investigaciones sugieren integrarla en las clases de matemáticas de diferentes niveles educativos (e. g., Stylianides et al., 2017; Stylianides y Stylianides, 2022), con el fin de facilitar la comprensión de las matemáticas y desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes, enfatizando en la justificación de afirmaciones usando argumentos apropiados y razonamientos válidos (Hanna y De Villiers, 2008).

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003) propone incluir en el currículo de todos los niveles educativos los procesos de razonamiento y demostración, promoviendo actividades que permitan formular conjeturas y desarrollar argumentos matemáticos y demostraciones utilizando diversos métodos de demostración y tipos de razonamiento. En países como Francia, Alemania y Japón, la demostración es un contenido explícito en el currículo, mientras que en Italia y Estados Unidos se aborda de manera implícita e informal (Cabassut et al., 2011). En Perú, la demostración aparece en el currículo de matemáticas para los niveles de educación inicial, primaria y secundaria, vinculada a la capacidad *argumentar*, la cual promueve que los estudiantes elaboren afirmaciones o conjeturas sobre relaciones matemáticas y las expliquen, justifiquen, validen o refuten usando razonamientos lógicos, analogías, generalizaciones, ejemplos y contraejemplos; y lleguen a deducir propiedades y a usar demostraciones (Ministerio de Educación, 2016).

En línea con lo anterior, las investigaciones señalan que es posible trabajar la demostración en los diferentes niveles educativos, pero con características específicas para cada nivel. Hanna y De Villiers (2008) exponen que en el nivel secundario se debe poner énfasis en la incorporación de demostraciones no necesariamente estructuradas. La finalidad es ayudar a los estudiantes a comprender el origen de una teoría o el marco en el que se demuestra un teorema, garantizando una comprensión más profunda de los teoremas y su integración en el contexto. En el nivel de educación superior se espera que los estudiantes tengan experiencias con demostraciones formales. Por su parte, Stylianides y Stylianides (2022) presentan una trayectoria de enseñanza para introducir a los estudiantes en la noción de demostración que comprende dos hitos. El primero corresponde a generar la necesidad intelectual de aprender sobre la demostración, y el segundo propone el desarrollo de una conceptualización operativa y funcional de la demostración.

El amplio reconocimiento dado a la demostración en la enseñanza de las matemáticas escolares sugiere que la demostración también debería ser parte de la formación de los profesores de matemáticas. Lo anterior, debido a que los conocimientos y las creencias de los profesores condicionan su disposición para realizar demostraciones y su capacidad para apoyar a los estudiantes a realizarlas (Alfaro-Carvajal et al., 2019; Stylianides y Stylianides, 2022). En esta línea, estudios como el de Morali y Ahsen (2023) muestran que futuros profesores de matemáticas de secundaria toman decisiones incorrectas al realizar demostraciones de teoremas o las memorizan en lugar de comprenderlas. Adicionalmente, Alfaro-Carvajal y Fonseca-Castro (2024) reportan que futuros profesores de matemática de secundaria presentan dos tendencias respecto al concepto de demostración: una relacionada a aspectos formales lógico-sintácticos y matemáticos, en cuyos procesos se usan axiomas, definiciones y teoremas; y otra, que enfatiza los aspectos informales semánticos, donde se usan manipulativos, dibujos, explicaciones o aplicaciones para convencer a otros de los resultados.

Ball y Bass (2009) señalan que la demostración es una práctica fundamental en el desarrollo del conocimiento matemático de los profesores. Lesseig (2016) añade que el conocimiento de los profesores de matemáticas para enseñar la demostración implica la habilidad para utilizar métodos que representen, expliquen y establezcan conexiones entre los conceptos involucrados en la demostración, así como la capacidad de emplear ejemplos y contraejemplos para realizar justificaciones. Carrillo et al. (2018) consideran que el conocimiento de demostraciones de teoremas específicos, y el conocimiento de la demostración como práctica matemática, es parte del conocimiento especializado de los profesores de matemáticas.

Asimismo, Alfaro-Carvajal et al. (2020) reportan que futuros profesores de matemáticas de secundaria conocen diferentes métodos y tipos de demostración, como demostraciones directas, indirectas, o aquellas que consideran el tipo de cuantificador o el tipo de conectivo lógico. En una investigación más reciente, Alfaro-Carvajal y Fonseca-Castro (2024) señalan que futuros profesores de matemáticas evidencian conocimiento de las funciones de la demostración propuestas por De Villiers (1993), con predominio de las funciones de verificación y explicación. Además, los futuros profesores apuntan hacia una función de la demostración para el desarrollo de habilidades, que es la más atribuida en las matemáticas en secundaria. Estos futuros profesores manifiestan que la demostración en la enseñanza secundaria ayuda a dar sentido a las matemáticas y fomenta habilidades como argumentación, razonamiento matemático, pensamiento crítico, lógico y deductivo, formulación de conjeturas, resolución de problemas, interés, curiosidad y confianza por las matemáticas.

Por lo anterior, en esta investigación consideramos la importancia de que los futuros profesores de matemáticas de secundaria tengan un conocimiento profundo y específico de la demostración. Así, tenemos por objetivo comprender el conocimiento especializado que manifiestan futuros profesores de matemática de secundaria al desarrollar tareas sobre demostraciones.

2. Referentes teóricos

2.1. La demostración

Según Balacheff (2000), la demostración es un tipo de prueba que adopta una forma particular y lógica que se apoya en un cuerpo de conocimientos institucionalizados que incluye definiciones, teoremas y reglas de deducción, e implica rigor matemático y su validez es compartida por la comunidad matemática. De manera similar, Griffiths (2000) afirma que una demostración matemática es una línea de razonamiento formal y lógico que comienza con un conjunto de axiomas y avanza a través de pasos lógicos hasta una conclusión.

Martínez Recio (2001) señala que la utilidad de la demostración matemática es aprender a razonar en matemáticas, pues esto ayuda a los estudiantes a construir un edificio matemático lógico y no solo funcional. Stylianides (2007, citado en Stylianides y Stylianides, 2022) define la demostración en las matemáticas escolares como un argumento matemático que cumple ciertas características: se basa en un conjunto de afirmaciones aceptadas como verdaderas por la comunidad del aula, como definiciones, axiomas y teoremas; utiliza modos de razonamiento válidos y al alcance conceptual de la comunidad del aula, como las reglas lógicas de inferencia, definiciones y contraejemplos; y se comunica de manera adecuada y comprensible para la comunidad del aula, usando lenguaje oral, diagramas y representaciones tabulares. Esta definición excluye los argumentos empíricos que se basan en ejemplos y ofrecen evidencia incompleta sobre la veracidad de una proposición matemática.

Por otro lado, Schwarz et al. (2008) señalan que demostración y argumentación no son sinónimos. La argumentación es una forma de razonamiento más informal; se apoya en dibujos, ejemplos o modelos concretos y utiliza argumentos que no necesitan seguir un orden lógico estricto, mientras que la demostración es un proceso formal, detallado y riguroso que implica un conjunto de pasos lógicos y ordenados que muestran que una afirmación matemática es verdadera.

Por su parte, Duval (2016) hace referencia a la distinción entre prueba, demostración y argumento en el contexto de la validación matemática. Define la prueba como una explicación reconocida por una comunidad en relación con un sistema de validación común a los interlocutores, lo que abarca los razonamientos deductivos de los estudiantes. El autor reserva el término demostración para una secuencia de enunciados organizados de acuerdo con reglas específicas, lo que se refiere a las deducciones axiomáticas aceptadas por los matemáticos. Finalmente, señala que el argumento implica la organización de proposiciones según su valor semántico y su orden pragmático.

Stylianides et al. (2017) exploran la demostración no solo como un producto final, sino como una actividad matemática integral que involucra la generación y verificación de pruebas dentro de una práctica matemática más amplia. Señalan que las demostraciones deben ser entendidas en el contexto de una actividad matemática auténtica, que incluye tanto el proceso de prueba como el razonamiento deductivo que los estudiantes desarrollan al interactuar con conceptos matemáticos.

De acuerdo con lo que se ha expuesto, en este estudio consideramos que la demostración es una práctica matemática que incluye un proceso lógico, deductivo y riguroso que tiene como principal objetivo establecer la validez de una proposición matemática, lo cual es esencial para la construcción de resultados matemáticos.

2.2. Conocimiento especializado del profesor de matemáticas

El análisis del conocimiento de los futuros profesores de matemáticas de secundaria sobre demostración matemática lo realizamos desde el modelo Mathematics

Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) propuesto por Carrillo et al. (2018). Este modelo, de acuerdo con Climent y Montes (2022), se propone como una herramienta para analizar el conocimiento que evidencia tener un profesor de matemáticas en su actividad profesional.

El MTSK incluye tres dominios: el conocimiento matemático (MK), el conocimiento didáctico del contenido (PCK) y las creencias sobre la matemática, su enseñanza y su aprendizaje. En este trabajo nos centramos en los dominios de conocimiento, los cuales describimos a continuación, basándonos en Carrillo et al. (2018) y Carrillo et al. (2022).

El MK se divide en tres subdominios: conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de la estructura matemática (KSM) y conocimiento de la práctica matemática (KPM).

En el KoT se agrupa el conocimiento de *procedimientos*: cómo se hacen, por qué se hacen así, cuándo pueden hacerse y las características de su resultado; conocimiento de *definiciones, propiedades y sus fundamentos*, que incluye lo que caracteriza y define a un objeto y las propiedades de un objeto considerando las justificaciones de estas, que pueden ser axiomas, teoremas y demostraciones; conocimiento de *registros de representación*: gráfico, algebraico, numérico o figural; y el conocimiento de los usos, significados, modelos y la *fenomenología y aplicaciones* de un contenido.

El KSM agrupa el conocimiento de las conexiones entre los diferentes conceptos matemáticos. Las *conexiones de simplificación* y *complejización*, describen el conocimiento de cómo contenidos más simples (o más avanzados) se vinculan a contenidos más complejos (o elementales). También se incluye en este subdominio el conocimiento de las *conexiones auxiliares* que se forman cuando un contenido matemático es usado como elemento de soporte para el desarrollo de otro, y el conocimiento de *conexiones transversales* que se presentan entre contenidos diferentes que comparten características comunes.

El KPM describe el conocimiento sobre la construcción, validación y comunicación del conocimiento matemático. En el *conocimiento de la práctica de demostrar* se agrupa el conocimiento del desarrollo de demostraciones, los métodos y tipos de demostración, así como el conocimiento de funciones de la demostración como verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación. En el conocimiento de la *práctica de definir,* se expone el conocimiento de las características de una definición. En el conocimiento de la *práctica de resolver problemas* se considera el conocimiento de estrategias para resolver problemas. Y en el *conocimiento del papel del lenguaje matemático* se incluye el papel de los símbolos y el uso del lenguaje para comunicar ideas matemáticas.

El PCK se divide en tres subdominios: conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS).

El KMT incluye el conocimiento de *teorías de enseñanza de las matemáticas* que los profesores pueden construir basándose en sus experiencias (teorías personales) o teorías derivadas de la investigación en Educación Matemática (teorías institucionalizadas); el conocimiento de las características, potencialidades, beneficios o limitaciones de los *recursos didácticos* que permiten que estos se conviertan en instrumentos para la enseñanza; así como las *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* que se utilizan en la enseñanza.

El KFLM se enfoca en el conocimiento de las características inherentes al aprendizaje de las matemáticas. En este subdominio se incluye el conocimiento de *teorías de aprendizaje* personales o institucionalizadas; *fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas*, las habilidades potenciales, los posibles errores y los obstáculos asociados con el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Además, se consideran las *formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático,* en las que se incluyen tanto las estrategias típicas como las no convencionales que usan los estudiantes en el trabajo con los contenidos matemáticos. En cuanto a los *aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas,* esta categoría involucra el conocimiento de los profesores sobre los intereses y expectativas de los estudiantes respecto al contenido matemático.

Finalmente, el KMLS incluye el conocimiento de los profesores sobre aquello que debe ser enseñado de acuerdo con los currículos nacionales, grupos de investigación relevantes y asociaciones de profesores. La categoría *resultados de aprendizaje esperados* se refiere al conocimiento de los contenidos matemáticos que se espera que sean adquiridos en un curso o nivel educativo. El *nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado* agrupa el conocimiento de la profundidad con la que un contenido matemático debe ser abordado en un curso o nivel escolar específico. La categoría *secuenciación de temas* se refiere al conocimiento de la forma en que se organizan los contenidos matemáticos dentro de un curso o en relación con cursos anteriores y posteriores.

3. Metodología

En este estudio seguimos una metodología cualitativa dentro de un paradigma interpretativo. Realizamos un estudio de caso (Stake, 2005) con el objetivo de comprender el conocimiento especializado que manifiestan futuros profesores de matemática de secundaria cuando desarrollan tareas sobre la demostración.

Los participantes del estudio fueron tres futuros profesores que cursaban el octavo ciclo de la carrera de educación secundaria, con especialidad Matemática o con especialidad Matemática y Física. Los futuros profesores han aprobado las asignaturas matemáticas y la mayoría de las asignaturas didácticas de sus planes de estudio. Además, han realizado prácticas pedagógicas en instituciones escolares de educación secundaria.

Para la recolección de los datos usamos como instrumento dos tareas sobre la demostración, diseñadas a partir de una revisión bibliográfica de la demostración y considerando las categorías de los subdominios del MTSK. Las tareas fueron validadas por investigadores externos a este estudio.

Las tareas 1 y 2, que presentamos a continuación, incluyen diferentes ítems elaborados con la intención de identificar el conocimiento matemático y didáctico de los futuros profesores sobre la demostración matemática. En la tarea 1, los dos primeros ítems se relacionan con la demostración del teorema de Pitágoras y los restantes abordan la demostración de manera general.

3.1. Tarea 1

1. Demuestre la siguiente proposición:

   La suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la longitud de su hipotenusa.

2. Luego de realizar la demostración, responda lo siguiente:
   a. ¿Por qué ha elegido este tipo de demostración?
   b. ¿Conoce otras formas de demostración distintas a la que ha realizado? Explique.
   c. ¿Qué conocimientos matemáticos ha usado para realizar la demostración del Teorema de Pitágoras?
   d. ¿Cómo trabajaría la demostración del teorema de Pitágoras con estudiantes de secundaria?
3. ¿Considera importante que los estudiantes de educación secundaria realicen demostraciones? ¿Por qué?
4. ¿La demostración está incluida en el Currículo Nacional? Si está incluida, indique en qué grado(s) y qué es lo que se propone.
5. ¿Considera que realizar demostraciones matemáticas contribuye al logro de las capacidades matemáticas declaradas en el Currículo Nacional? Fundamente.
6. ¿Qué dificultades podrían presentarse en los estudiantes al realizar demostraciones matemáticas?

En los ítems 1, 2a y 2b se explora el conocimiento sobre una o varias demostraciones del Teorema de Pitágoras (KPM, *conocimiento de la práctica de demostrar*, *métodos y tipos de demostración*; KoT, *propiedades y sus fundamentos*); en el ítem 2c se indaga sobre los conocimientos matemáticos usados en las demostraciones (KoT, *definiciones, propiedades y sus fundamentos*); y en el ítem 2d se indaga el conocimiento sobre la enseñanza de la demostración del Teorema de Pitágoras en secundaria (KMT, *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*). En el ítem 3 se explora el conocimiento sobre las funciones de la demostración (KPM, *conocimiento de la práctica de demostrar*) entre las cuales se podrían identificar la función de la demostración para el desarrollo de habilidades y otras funciones más centradas en las matemáticas escolares reportadas por Alfaro-Carvajal y Fonseca-Castro (2024); en los ítems 4 y 5 se indaga sobre el conocimiento de las demostraciones en los documentos curriculares (KMLS, *resultados de aprendizaje esperados, nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado, secuenciación de temas*). Finalmente, el ítem 6 explora el conocimiento acerca de las dificultades de los estudiantes para realizar demostraciones (KFLM, *fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas*).

La tarea 2 incluye 3 ítems que, dependiendo de la profundidad en las respuestas obtenidas, podrían revelar conocimientos asociados a *métodos y tipos de demostración,* y *funciones de la demostración* (KPM, *conocimiento de la práctica de demostrar*).

3.2. Tarea 2

1. ¿Qué entiende por demostración matemática?
2. ¿Con qué términos asocia las demostraciones matemáticas? Explique.
3. ¿Conoce tipos de demostración matemática? ¿Cuáles? ¿Cómo adquirió ese conocimiento?

Para el tratamiento de los datos llevamos a cabo un análisis de contenido (Bardin, 1998), que nos permitió realizar una descripción sistemática del conocimiento especializado de los futuros profesores de matemáticas (FP) sobre la demostración. Las respuestas dadas a las tareas por los seis participantes en el estudio fueron consideradas como unidades de análisis. Estas respuestas fueron categorizadas de forma individual por cada investigadora del equipo, utilizando los dominios, subdominios y categorías del MTSK. Además, se consideró la posibilidad de identificar categorías emergentes durante el análisis de los datos. A su vez, en el análisis se tuvieron en cuenta los datos que permiten afirmar la posesión de un determinado conocimiento del profesor (evidencia) y aquellos que sugieren la existencia de un conocimiento del profesor (indicio), pero requieren más información para ser confirmados como evidencia (Climent y Montes, 2022).

Por ejemplo, para el análisis del siguiente extracto de los datos que corresponde a una respuesta del ítem 3 de la Tarea 1, la discusión estuvo centrada en la identificación del subdominio y la categoría a la cual correspondía el fragmento.

> Sí, considero que es importante porque los estudiantes pueden conocer que detrás de cada fórmula hay un procedimiento que se ha seguido. No se trata solo de aplicarla, sino de conocer las razones por las que la fórmula matemática es correcta.

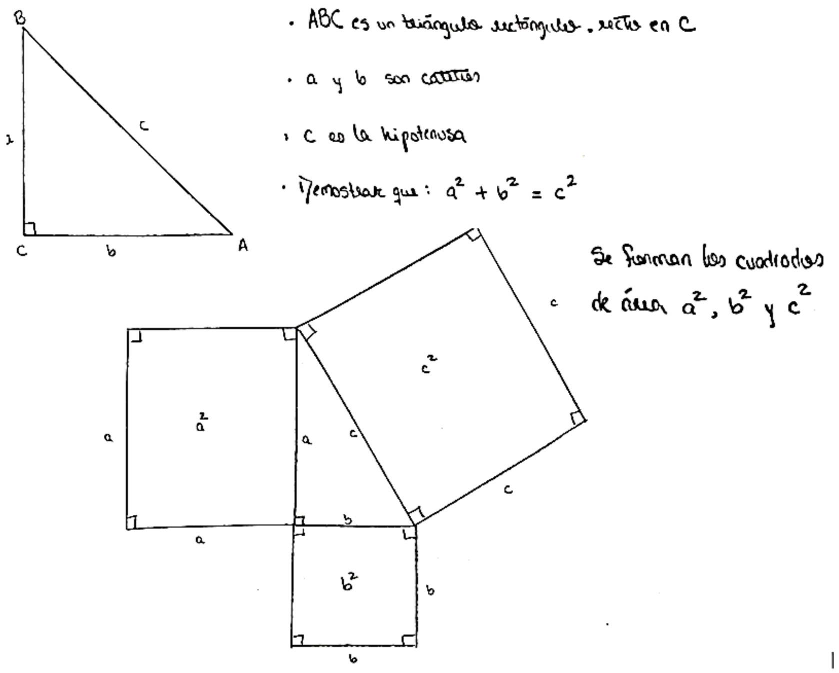
Una posición apuntaba hacia evidencias de KoT respecto al *conocimiento de procedimientos*. Otra posición apuntaba hacia indicios de KPM respecto al *conocimiento de las funciones de la demostración*. Luego de una revisión más detallada, se llegó al acuerdo de considerar el fragmento como indicios de KPM, ya que, aunque el FP no usa el término demostración, en su respuesta se refiere a conocer qué hay detrás de la fórmula y las razones por las que se puede aplicar —o no— al conocimiento de un procedimiento particular. De manera similar a lo anterior, se realizó un análisis conjunto en el que, por consenso del equipo de investigación, proveniente de una triangulación, se caracterizó el conocimiento de los FP sobre la demostración.

4. Resultados y discusión

4.1. Tarea 1

En el desarrollo del ítem 1 de la Tarea 1, se solicita una demostración del teorema de Pitágoras. El FP1 presentó la construcción de un triángulo rectángulo y tres cuadrados ubicados externamente sobre cada lado del triángulo rectángulo (KoT, *registros de representación*), como se muestra en la Figura 1. Así, el FP1 presenta una aproximación de una demostración informal que se apoya en el registro figural y hace referencia a una demostración geométrica del teorema de Pitágoras, la cual es una demostración conocida.

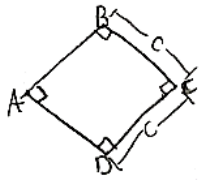
Figura 1. Respuesta del FP1 al ítem 1 de la tarea 1



Por su parte, el FP2 presenta una construcción geométrica y una secuencia de pasos parcialmente justificada. Primero, explica una construcción geométrica que incluye un cuadrado dividido en cuatro triángulos rectángulos y un cuadrado de menor lado (KoT, *procedimientos*). Luego, justifica la congruencia entre los cuatro triángulos rectángulos obtenidos (KoT, *definiciones y propiedades*). Posteriormente, plantea una equivalencia entre el área de la región cuadrada de mayor lado y la suma de las áreas de las regiones parciales en las que queda dividida dicha región (KoT, *propiedades*). Finalmente, simplifica la expresión algebraica (KoT, *procedimientos*) y concluye su demostración, como se muestra en la Figura 2.

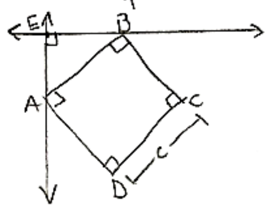
Figura 2. Respuesta del FP2 al ítem 1 de la tarea 1

1º Formamo un cuadrado ABCD, con medida del lado "c".



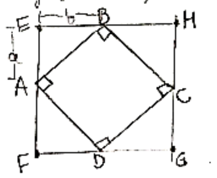
2º Construimos un triángulo rectángulo a partir de las dos rectas.

- Una de ellas es paralela a la diagonal BD, de modo que A sea uno de sus puntos.
- La otra recta es paralela a la diagonal AC, de modo que B sea uno sus puntos.



3º La intersección de las rectas, en el punto E, permite formar un triángulo rectángulo, al cual le asignamos el valor de "a" al lado AE y el valor de "b" a EB.

4º Los pasos (2º) y (3º) los replicamos para generar 3 triángulos rectángulos más, de manera que quede así:



5º Así quedaría que los lados AE, FD, GC y HB son iguales a "a" y los lados EB, AF, DG y CH son iguales a "b".

6º Ahora, se afirma que la suma de las áreas de los 4 triángulos rectángulos más el cuadrado con lado "c" es igual al área del nuevo cuadrado EFGH, con medida de lado "a+b". Realizando esta operación, se tiene lo siguiente:

$$\cancel{4}^{2}\left(\frac{a \cdot b}{\cancel{2}_{1}}\right) + c^2 = (a+b)^2$$

$$\cancel{2a \cdot b} + c^2 = a^2 + \cancel{2ab} + b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

7º Por lo tanto, se ha demostrado que la proposición cumple según el caso planteado.

El FP2 presenta una secuencia de pasos, algunos de ellos justificados, y presentan una conclusión correcta; sin embargo, la demostración expuesta es incompleta e informal. En esta línea, no tenemos la certeza de que tenga comprensión de lo que subyace a la demostración presentada o que solo haya logrado reproducirla, por ser una demostración conocida del teorema. De acuerdo con lo anterior, se evidencia su conocimiento de una demostración del teorema de Pitágoras (KoT, *propiedades y sus fundamentos*) y podríamos considerarla un indicio de su KPM respecto al *desarrollo de demostraciones*.

Por su parte, el FP3 presenta una demostración incompleta e informal del teorema de Pitágoras con una secuencia de pasos muy similar a la que fue desarrollada por el FP2. Los tres FP presentaron demostraciones incompletas del Teorema de Pitágoras, esto es, realizaron construcciones geométricas con triángulos rectángulos y cuadrados, y presentaron secuencias de pasos sin justificaciones o con justificaciones limitadas. Si bien se aproximan a la demostración solicitada, no logran presentar una demostración formal del teorema, por lo cual, resaltamos la importancia de abordar la demostración de este teorema en la formación de estos futuros profesores.

Adicionalmente, cuando preguntamos sobre los conocimientos matemáticos que han usado para realizar la demostración del Teorema de Pitágoras (Tarea 1, ítem 2c), obtenemos las siguientes respuestas:

> FP1: Conocimiento del triángulo rectángulo, [...] de la construcción de figuras geométricas.
>
> FP2: Conocimientos relacionados con las propiedades de un triángulo rectángulo, de un cuadrado y con la congruencia de triángulos.
>
> FP3: Triángulo rectángulo, catetos e hipotenusa, cuadriláteros, rectas paralelas, sistema de ecuaciones, áreas.

Los contenidos mencionados por los FP corresponden a los usados en los desarrollos presentados por ellos en el ítem 1, coincidiendo en los siguientes: triángulos rectángulos y sus propiedades, congruencia de triángulos, cuadriláteros, rectas paralelas y perpendiculares, áreas de regiones triangulares y cuadrangulares, y construcciones geométricas en el plano (KoT, *definiciones, propiedades y sus fundamentos*).

Por otra parte, cuando se les solicita a los FP comentar cómo trabajarían la demostración del Teorema de Pitágoras con estudiantes de secundaria (Tarea 1, ítem 2d), obtenemos las siguientes respuestas:

> FP1: Primero sería fundamental que yo como docente sea capaz de manejar la demostración. Luego, escoger la demostración que se considere será más fácil de comprender para los estudiantes. Desarrollarla a la par con ellos, de forma reflexiva, planteando preguntas.
>
> FP2: Podría ser utilizando lápiz y papel, siguiendo el procedimiento presentado en la parte superior. Lo trabajaría como parte de una clase en la que se plantee el teorema de Pitágoras. En ese momento podría plantear la pregunta: ¿cómo se demuestra el teorema de Pitágoras? Durante unos minutos recogería los comentarios de los estudiantes y les pediría que intenten realizarlo.

Los FP expresan su intención de facilitar la comprensión de la demostración y clarificar el razonamiento empleado. Así, señalan que abordarían la demostración con los estudiantes principalmente usando preguntas como *estrategias de enseñanza* (KMT) y haciendo uso del lápiz y papel como *recursos didácticos* (KMT).

En consonancia con lo anterior, cuando cuestionamos a los FP, ¿por qué ha elegido este tipo de demostración? (Tarea 1, ítem 2a), encontramos respuestas como la siguiente:

> FP1: Me hubiera gustado realizar una demostración más formal, pero elegí esta manera informal porque recordaba con más claridad esta forma de demostración, la cual, dicho sea de paso, es una manera en la que los estudiantes de secundaria comprenderían adecuadamente.

A través de esta intervención, evidenciamos el conocimiento del FP1 sobre la demostración como *estrategia de enseñanza* (KMT), al diferenciar una demostración formal de una informal y resaltar que las demostraciones informales ayudan a la comprensión de los estudiantes. En relación con lo anterior, como respuesta a la Tarea 1, ítem 6, los FP muestran su conocimiento de las dificultades de los estudiantes al realizar demostraciones (KFLM, *fortalezas y debilidades en el aprendizaje de las matemáticas*). Un ejemplo de ello es la siguiente intervención:

> FP1: Los estudiantes pueden afrontar dificultades como la falta de experiencia sobre ello [la demostración], la abstracción, la organización de ideas, el uso correcto de las notaciones matemáticas, el tiempo necesario, el miedo al error y la dificultad para ver las conexiones entre los pasos.

Adicionalmente, cuando se les pregunta sobre la presencia de la demostración en el Currículo Nacional (Tarea 1, ítem 4), obtenemos respuestas similares a la siguiente:

> FP1: Sí está incluida, en la capacidad de "Argumenta afirmaciones sobre relaciones geométricas" desde el planteo y contraste de afirmaciones. Aparece desde 3.º, de la siguiente manera: Comprueba o descarta la validez de la afirmación mediante ejemplos, propiedades geométricas, y razonamiento inductivo o deductivo. Para 5.º, cambia un poco: Comprueba la validez de una afirmación opuesta a otra, o de un caso especial, mediante contraejemplos, conocimientos geométricos, y razonamiento inductivo o deductivo. En 1.º y 2.º solo está la justificación con ejemplos y sus conocimientos geométricos.

En la respuesta anterior, el FP1 muestra su conocimiento de las capacidades declaradas en el Currículo Nacional para el área de matemática, específicamente relacionada con las demostraciones (KMLS, *resultados de aprendizaje esperados*).

Por otro lado, en la Tarea 1, ítem 3, cuestionamos a los FP si consideran importante que los estudiantes de educación secundaria realicen demostraciones y obtuvimos las siguientes respuestas:

> FP1: Sí, porque es una manera de demostrar su comprensión de los objetos matemáticos y de emplear su conocimiento para armar una demostración. Esto no significa que tenga que ser 100 % rigurosa en lenguaje matemático, pero que muestre una idea clara de lo que va a demostrar.

FP2: Sí, considero que es importante porque los estudiantes pueden conocer que detrás de cada fórmula hay un procedimiento que se ha seguido. No se trata solo de aplicarla, sino de conocer las razones por las que la fórmula matemática es correcta.

FP3: Sí, considero importante que los estudiantes de educación secundaria realicen demostraciones, ya que les ayuda a desarrollar habilidades de razonamiento, pensamiento crítico y comprensión profunda de conceptos matemáticos y científicos. Además, fomenta la claridad en la comunicación y la confianza en su capacidad para resolver problemas.

De acuerdo con lo anterior, los FP consideran que es importante conocer y realizar demostraciones matemáticas en la educación secundaria porque ayudan a desarrollar el razonamiento matemático y la comprensión de los conceptos; sin embargo, mencionan que estas demostraciones no deben ser rigurosas, sino que deben permitir comprender las razones que justifican la validez de un teorema o una fórmula. Estos hallazgos coinciden con los obtenidos por Alfaro-Carvajal y Fonseca-Castro (2024) cuando los FP manifiestan que la demostración en la escuela ayuda a dar sentido a la matemática y sirve para fomentar habilidades de argumentación, razonamiento y resolución de problemas.

Adicionalmente, el FP3, al señalar que hay razones que justifican la veracidad de las fórmulas matemáticas, da indicios de un conocimiento de la demostración en su función de verificación (KPM, *funciones de la demostración*). Además, al afirmar que a través de la demostración se pueden conocer las razones por las que la fórmula matemática es correcta, da indicios de un conocimiento de la función de explicación de la demostración (KPM, *funciones de la demostración*). En las intervenciones, los FP no hacen referencia a otras funciones de la demostración (De Villiers, 1993), como por ejemplo la función de comunicación, reportada en otras investigaciones (Delgado-Rebolledo y Espinoza-Vásquez, 2019). Por lo anterior, consideramos necesario abordar con estos FP las demostraciones matemáticas, enfatizando la comprensión de ellas como un medio no solo para validar el conocimiento matemático, sino para explicarlo y comunicarlo.

Por otra parte, resaltamos la respuesta dada por uno de los FP cuando se le pregunta si considera que realizar demostraciones contribuye al logro de las capacidades matemáticas declaradas en el currículo (Tarea 1, ítem 5):

FP1: Las demostraciones matemáticas son esenciales para el desarrollo de las capacidades matemáticas de los estudiantes, ya que promueven el pensamiento crítico, la comprensión profunda, la expresión de ideas de manera clara, coherente y secuenciada. También, al ser un problema complejo, ganan confianza en sus habilidades matemáticas si logran resolverlo.

En esta intervención, el FP1 señala que la demostración es una práctica que favorece el aprendizaje de las matemáticas y que realizar demostraciones está relacionado con la capacidad de argumentar, lo cual es acorde con el currículo. Lo anterior da muestras de un conocimiento del FP1 sobre los *resultados de aprendizaje* (KMLS). Ante esta última respuesta, coincidimos con Schwarz et al. (2008) en que los FP deben utilizar actividades de demostración para profundizar el conocimiento matemático de los estudiantes. Esto incluye no solo la comprensión de los teoremas y proposiciones matemáticas, sino también cómo estos se integran en una estructura lógica más amplia. En tal sentido, los FP deben ser capacitados sobre cómo integrar demostraciones en su enseñanza, lo que implica presentar y discutir demostraciones de manera efectiva en el aula.

4.2. Tarea 2

Al cuestionar a los FP, ¿qué entienden por demostración? (Tarea 2, ítem 1), obtenemos las siguientes respuestas:

> FP1: Es un procedimiento matemático en el que, a partir de propiedades, axiomas, etc. Se demuestra la validez de cierta proposición en términos generales, siendo que se cumple para todos los casos posibles.
>
> FP2: Una demostración se refiere a un proceso lógico en el que se presentan argumentos y evidencia para establecer la validez de un teorema, proposición o afirmación matemática. Se comienza con axiomas o propiedades anteriores que se toman como verdaderos y se avanza con el uso de una serie de pasos lógicos hasta llegar a una conclusión que demuestra la afirmación en cuestión.
>
> FP3: Lo entiendo como un procedimiento que se sigue para explicar cómo se llegó a una determinada afirmación.

A partir de lo expuesto, observamos que los FP coinciden en que la demostración es un procedimiento matemático o un proceso lógico que involucra una secuencia de pasos que deben ser debidamente justificados, usando propiedades matemáticas. Esto muestra que tienen una noción de demostración matemática, lo que consideramos un indicio de KPM (*conocimiento de la práctica de demostrar*).

Asimismo, al solicitar a los FP que expliquen los términos a los cuales asocian la demostración (Tarea 2, ítem 2), obtenemos las siguientes respuestas:

> FP1: La asocio con los términos de axiomas, propiedades, "para todo", pues creo que son términos que se usan a la hora de demostrar. Asimismo, lo relaciono con los verbos demuestra, sustenta, afirma, ya que son propios de la argumentación.
>
> FP2: Asoció las demostraciones con términos como argumentación lógica, razonamiento inductivo o deductivo, secuencia justificada, axiomas, formalidad e informalidad lógica.
>
> FP3: Razones, procedimientos, explicaciones.

De acuerdo con lo anterior, los FP exponen que la demostración está relacionada principalmente con los axiomas, la argumentación, la justificación y la explicación. Observamos que no realizan distinción entre argumentación matemática y demostración, aspecto que consideramos necesario reforzar en el desarrollo de su KPM sobre *la práctica de demostrar*. Otro aspecto importante por reforzar es la identificación de los tipos de razonamientos presentes en una demostración y los métodos de demostración que se pueden usar. Todo esto con el fin de involucrar a los FP en prácticas matemáticas que les permitan desarrollar una comprensión profunda de los conceptos matemáticos.

Además, al preguntar a los FP sobre los tipos de demostración que conocen y cómo adquirieron dicho conocimiento (Tarea 2, ítem 3), obtenemos lo siguiente:

> FP1: Sí, conozco la demostración por inducción matemática, por contraejemplo, por el absurdo. Lo adquirí en los cursos de la especialidad [de matemáticas].
>
> FP2: El tipo de demostración que mejor conozco es el de inducción matemática. Esto lo aprendí en mi primer ciclo de estudios generales en el curso Fundamentos del cálculo.
>
> FP3. Intuitiva, contraejemplo, reducción al absurdo. Los conocí durante mi formación universitaria.

Los FP mencionan algunos métodos de demostración como la inducción matemática y la reducción al absurdo e indican que los conocieron durante su formación en cursos de matemáticas. También se refieren a los contraejemplos, como forma de *desarrollar demostraciones* (KPM).

5. Conclusiones

En este trabajo consideramos importante que los FP de matemáticas no solo conozcan las definiciones, proposiciones o teoremas, sino las formas de proceder en la matemática para obtenerlos. Coincidimos entonces con Carrillo et al. (2018) en la importancia que tiene el conocimiento de la demostración como práctica matemática en el conocimiento especializado de los profesores.

Los resultados de la investigación muestran que los FP manifiestan conocimiento de *definiciones, propiedades, registros de representación y procedimientos* (KoT) asociados a la demostración del Teorema de Pitágoras, así como conocimiento de *estrategias* y *recursos didácticos* (KMT) para la enseñanza del teorema. Los tres FP que participaron en la investigación intentan reproducir demostraciones conocidas del teorema de Pitágoras, pero lo hacen de manera incompleta, mostrando sus dificultades para trabajar con este teorema, lo cual reporta Calle et al. (2023) en el caso de profesores de matemáticas de secundaria. A su vez, la forma en que los FP presentan las demostraciones sugiere que podrían haberlas memorizado en vez de comprenderlas. Lo anterior es un resultado similar al obtenido por Morali y Ahsen (2023), cuando FP de matemáticas desarrollan otro tipo de demostraciones. Así, a pesar de los conocimientos matemáticos de los FP en relación con el Teorema de Pitágoras, consideramos que es necesario que realicen demostraciones evidenciando la comprensión de esta práctica (KPM) y que no solo las reproduzcan (KoT). En este sentido, consideramos necesario incluir ítems que permitan que los FP manifiesten su KPM o profundizar en los indicios de este conocimiento a través de entrevistas a los FP. Respecto a lo anterior, reflexionamos sobre lo complejo que resulta obtener información del KPM de los profesores.

Por otra parte, resaltamos que el FP1 considera que las demostraciones pueden ser usadas como *estrategia de enseñanza* (KMT) de las matemáticas en secundaria, ya que las considera como una práctica que favorece el aprendizaje de las matemáticas (KPM, *roles de la demostración*). Lo anterior se relaciona con su conocimiento de la demostración desde la propuesta curricular (KMLS), reconociendo las dificultades de los estudiantes para realizar y comprender demostraciones (KFLM), ante lo cual señala que preferiría usar demostraciones menos formales en las clases (KMT). Los otros FP del estudio también recurren a demostraciones informales, lo que nos lleva a cuestionar si los FP precisan los conocimientos matemáticos vinculados a los *métodos y tipos de demostración* (KPM), de los cuales no encontramos evidencias en este estudio.

En esta línea, consideramos que es necesario que los FP adquieran un conocimiento sobre la práctica de demostrar, dado que este aporta a la construcción de su conocimiento matemático y didáctico del contenido. Coincidimos con Alfaro-Carvajal et al. (2019) cuando señalan que los profesores de matemáticas deben poseer un saber específico sobre qué es una demostración matemática para ejercer su práctica. De allí que señalamos la necesidad de abordar las demostraciones en la formación de FP de matemáticas de secundaria (Hanna y De Villiers, 2011; Stylianides y Stylianides, 2022).

Asimismo, los resultados nos llevan a insistir en el planteamiento de tareas de demostraciones como una práctica fundamental en la formación docente, que promuevan la adquisición y uso del lenguaje matemático para expresar y comunicar ideas matemáticas como definiciones, propiedades o procedimientos. Así, esta investigación abre la posibilidad de continuar con trabajos que aporten a la construcción del conocimiento de la práctica de demostrar en futuros profesores de secundaria, a través de tareas de demostración estructuradas en forma gradual.

Agradecimiento

Esta investigación ha sido financiada por el Instituto de Investigación Científica de la Universidad de Lima del Perú (código AC.06.007.2023) y dirigida por Elizabeth Advíncula, investigadora de la misma casa de estudios. El equipo investigador pertenece a la Red MTSK y el trabajo está vinculado al proyecto PID2021-122180OB-I00, del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades del Gobierno de España.

Referencias

Alfaro-Carvajal, C., Flores-Martínez, P., & Valverde-Soto, G. (2019). La demostración matemática: Significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia*, *33*(2), 55–75. https://doi.org/10.15359/ru.33-2.5

Alfaro, C., Flores, P., & Valverde, G. (2020). Conocimiento especializado de profesores de matemática en formación inicial sobre aspectos lógicos y sintácticos de la demostración. *PNA*, *14*(2), 85–117. https://doi.org/10.30827/pna.v14i2.9363

Alfaro-Carvajal, C., & Fonseca-Castro, J. (2024). Specialized knowledge of prospective mathematics teachers on the concept of mathematical proof. *Uniciencia*, *38*(1), 1–16. https://doi.org/10.15359/ru.38-1.5

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Una empresa docente. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520133/document

Ball, D. L., & Bass, H. (2009). *With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures*. Paper presented at The 2009 Curtis Center Mathematics and Teaching Conference.

Bardin, L. (1998). *L'analyse de contenu*. Presses Universitaires de France.

Cabassut, R., Conner, A., İşçimen, F. A., Furinghetti, F., Jahnke, H. N., & Morselli, F. (2011). Conceptions of proof in research and teaching. En G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 169–190). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_7

Calle, E., Breda, A., & Font, V. (2023). Significados parciales del teorema de Pitágoras usados por docentes en la creación de tareas en el marco de un programa de formación continua. *Uniciencia*, *37*(1), 1–23. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.1

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher´s specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Carrillo, J., Montes, M., & Climent, N. (2022). *Investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino*. Dykinson.

Climent, N., & Montes, M. (2022). El modelo MTSK: Antecedentes y estructura. En J. Carrillo, M. A. Montes, & N. Climent (Eds.), *Investigación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino* (pp. 27–34). Dykinson. https://doi.org/10.2307/j.ctv2zp4vp1.6

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, 26, 15–30.

Delgado-Rebolledo, R., & Espinoza-Vásquez, G. (2019). El conocimiento del profesor de matemáticas sobre la demostración y sus roles en la enseñanza de las matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 253–262). SEIEM.

Duval, R. (2016). El funcionamiento cognitivo y la comprensión de los procesos matemáticos de la prueba. En R. Duval & A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 95–125). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Griffiths, P. A. (2000). Mathematics at the turn of the millennium. *American Mathematical Monthly*, *107*(1), 1–14. https://doi.org/10.2307/2589372

Hanna, G., & De Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM-Mathematics Education*, *40*(2), 329–336. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0073-4

Hanna, G., & De Villiers, M. (2011). Aspects of proof in mathematics education. En G. Hanna & M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 1–10). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_1

Lesseig, K. (2016). Investigating mathematical knowledge for teaching proof in professional development. *International Journal of Research in Education and Science*, 2(2), 253–270. https://doi.org/10.21890/ijres.13913

Martínez Recio, A. (2001). La demostración en matemática: Una aproximación epistemológica y didáctica. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas, & J. D. Godino (Eds.), *Investigación en Educación Matemática: Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 27–44). Autor.

Ministerio de Educación (2016). *Programa curricular de educación secundaria.* http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/programa-*curricular*-educacion-*secundaria*.pdf

Morali, H. S., & Ahsen, F. (2023). Incorrect theorems and proofs: An analysis of pre-service mathematics teachers' proof evaluation skills. *Journal of Pedagogical Research*, 7(3), 248–262. https://doi.org/10.33902/JPR.202318840

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática* (SAEM Thales, Trad.). SAEM Thales.

Schwarz, B., Leung, I. K. C., Buchholtz, N., Kaiser, G., Stillman, G., Brown, J., & Vale, C. (2008). Future teachers' professional knowledge on argumentation and proof: A case study from universities in three countries. *ZDM-Mathematics Education*, *40*, 791–811. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0150-8

Stake, R. E. (2005). *Investigación con estudio de casos.* Morata.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2022). Introducing students and prospective teachers to the notion of proof in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, *66*, Article 100957. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100957

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237–266). National Council of Teachers of Mathematics.

∞

Elizabeth Advíncula Clemente

Universidad de Lima (Perú)
eadvincu@ulima.edu.pe | https://orcid.org/0000-0003-3941-3139
Contribución: conceptualización, curación de datos, análisis formal, adquisición de fondos, investigación, metodología, administración del proyecto, recursos, supervisión, visualización, redacción – borrador original, redacción – revisión y edición.

Isabel Torres Céspedes

Universidad de Lima (Perú)
lztorres@ulima.edu.pe | https://orcid.org/0000-0002-0673-8984
Contribución: conceptualización, curación de datos, análisis formal, adquisición de fondos, investigación, metodología, recursos, visualización, redacción – borrador original, redacción – revisión y edición.

Rosa Delgado Rebolledo

Universidad de Valparaíso (Chile)
rosa.delgado@uv.cl | https://orcid.org/0000-0003-3162-314X
Contribución: análisis formal, investigación, metodología, visualización, redacción – borrador original, redacción – revisión y edición.

Flor Hau Yon

Universidad de Piura (Perú)
flor.hauyon@udep.edu.pe | https://orcid.org/0000-0003-3764-6502
Contribución: conceptualización, curación de datos, análisis formal, investigación, metodología, visualización, redacción – borrador original, redacción – revisión y edición.

Recibido: 20 de marzo de 2024
Aceptado: 8 de octubre de 2024

Specialized Knowledge of Prospective Secondary Mathematics Teachers in Developing Proof-Based Tasks

Elizabeth Advíncula Clemente @ [1], Isabel Torres Céspedes @ [1], Rosa Delgado Rebolledo @ [2], Flor Hau Yon @ [3]

[1] Universidad de Lima (Perú)
[2] Universidad de Valparaíso (Chile)
[3] Universidad de Piura (Perú)

Proof is a fundamental activity in mathematics, and its integration across different educational levels, with appropriate approaches, is relevant. Engaging in proof-related activities enhances students' mathematical understanding, making it crucial for prospective teachers to develop a deep knowledge of this practice.

This study employs a qualitative approach within an interpretive paradigm with the objective of understanding the specialized knowledge manifested by three prospective secondary mathematics teachers when engaging in proof-related tasks. To achieve this objective, the study worked with a group of three prospective secondary mathematics teachers (PTs), each with a specialty in mathematics, at the penultimate stage of their initial training. The data were derived from two tasks that involved the construction of mathematical proofs, including the proof related to the Pythagorean theorem. The responses of the participants were subjected to analysis using the Mathematics Teacher Specialized Knowledge (MTSK) model, with particular emphasis on two of its domains: mathematical knowledge and pedagogical content knowledge.

The findings of the study indicate that the PTs demonstrate an understanding of the definitions, properties, representation registers, and procedures associated with the proof of the Pythagorean Theorem, as well as knowledge of the didactic strategies and resources for teaching the theorem. The three PTs who participated in the research initially attempted to reproduce known demonstrations of the Pythagorean theorem, but they were unable to do so in a complete manner, thereby demonstrating their difficulties in working with this theorem. In light of these considerations, it is essential that PTs demonstrate a comprehension of the practice of proving, rather than merely replicating established proofs. Nevertheless, the prospective teachers acknowledged the significance of promoting mathematical proof development in their students, emphasizing its role in fostering reasoning abilities. Furthermore, they recognized that in certain cases, informal proof techniques may be more appropriate for instructional purposes than formal proofs.

The paper concludes by emphasizing the necessity of integrating proof practice into the training of prospective secondary mathematics teachers as a pedagogical practice that facilitates learning and comprehension of mathematical concepts. This suggests a need for a more comprehensive examination of the methods and types of proofs, the types of reasoning that can be pursued, and their productive integration into the classroom. Furthermore, the present study offers suggestions regarding potential avenues for future research. For instance, the design of training tasks to enhance teachers' comprehension of proofs and facilitate their pedagogical applications.