AIEM

Avances de Investigación en Educación Matemática

Revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

ISSN-e 2254-4313 | (2025) 28, 55-75 | aiem.es

seiem.es

La formulación de problemas integrada en un proceso de estudio sobre la construcción de sólidos

Problem Posing Integrated into a Study Process on the Construction of Solids

Carlos Rojas Suárez @ [1], Tomás Ángel Sierra Delgado @ [2], Josep Gascón Pérez @ [3]

[1] Université de Sherbrooke (Canadá)
[2] Universidad Complutense de Madrid (España)
[3] Universitat Autònoma de Barcelona (España)

Resumen ∞ En este estudio, desarrollado en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, presentamos y discutimos el potencial que tienen los Recorridos de Estudio e Investigación como medio didáctico de una modalidad de estudio que, regida por el paradigma de la modelización matemática, favorece la integración de la formulación de problemas en la actividad matemática de los estudiantes globalmente considerada. Trabajando con alumnos de tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria, estudiamos el problema espacial del diseño de envases dentro del ámbito de la determinación y construcción de sólidos geométricos. Analizamos el papel determinante que han tenido los mapas de cuestiones y respuestas, elaborados por los estudiantes, como evidencias del planteamiento de nuevos problemas y mostramos algunas restricciones institucionales que dificultan la implantación de esta nueva modalidad de estudio.

Palabras clave ∞ Teoría Antropológica de lo Didáctico; Formulación de problemas; Recorrido de estudio e investigación; Modalidad de estudio; Mapas de cuestiones y respuestas

Abstract ∞ In this study, developed within the framework of the Anthropological Theory of Didactics, we present and discuss the potential of Study and Research Paths as didactic means of a modality of study that, governed by the paradigm of mathematical modelling, promotes the integration of problem posing in the mathematical activity of students considered globally. Working with students in the third year of compulsory secondary education, we study the spatial problem of packaging design within the field of determination and construction of geometric solids. We analyse the crucial role played by the questions and answers maps elaborated by the students as evidence of the posing of new problems, and we show some institutional constraints that hinder the implementation of this new modality of study.

Keywords ∞ Anthropological Theory of the Didactics; Problem posing; Study and research path; Modality of study; Question and answer maps

Rojas Suárez, C., Sierra Delgado, T. A., & Gascón Pérez, J. (2025). La formulación de problemas integrada en un proceso de estudio sobre la construcción de sólidos. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática, 28*, 55-75. https://doi.org/10.35763/aiem28.7559

1. Introducción

Tanto la resolución como el planteamiento de problemas son de gran interés para la investigación en didáctica de las matemáticas desde hace varias décadas. Liljedahl y Cai (2021) realizan una revisión histórica del estado del arte de las investigaciones sobre la resolución y planteamiento de problemas y señalan que, aunque la investigación en torno a la resolución de problemas surge anteriormente, puede considerarse que es el capítulo de Kilpatrick (1987) —sobre la formulación de problemas— el que proporciona los primeros argumentos para una investigación que se centre en analizar cómo los alumnos puedan plantearse problemas en diferentes situaciones. Kilpatrick aboga de modo explícito en favor de que la experiencia de descubrir y crear los propios problemas matemáticos forme parte de la educación de todos los alumnos.

Guy Brousseau afirma que, para hacer matemáticas, plantearse buenas cuestiones es tan importante como buscar sus posibles respuestas:

> Solo hacemos matemáticas cuando nos enfrentamos a problemas, pero a veces olvidamos que resolver un problema es solo una parte del trabajo; encontrar buenas cuestiones es tan importante como hallar sus soluciones. Una reproducción fiel de una actividad científica por parte del alumno exigiría que produjera, formulara, demostrara y construyera modelos, lenguajes, conceptos y teorías; que los intercambiara con otras personas; que reconociera los que se ajustan a la cultura; que tomara prestados los que le son útiles. (Brousseau, 1997, p. 22, traducción propia)

Bosch y Winsløw (2015) también señalan la relevancia de las investigaciones sobre el planteamiento de problemas:

> Así pues, identificar, afinar y desarrollar preguntas matemáticas es una parte integral e importante de la actividad matemática. La idea de que esto también debería hacerse en el entorno escolar ordinario ha motivado a varios estudiosos a examinar las posibilidades y beneficios del "planteamiento de problemas" como parte de la actividad matemática de los alumnos. (Traducido de Bosch y Winsløw, 2015, p. 370)

Cai y Rott (2024), al mismo tiempo que realizan una amplia revisión de los trabajos sobre el planteamiento de problemas, describen un primer modelo que permita analizar y estudiar la formulación de problemas. El modelo, desarrollado de forma similar al modelo de etapas elaborado por Pólya (1965) para la resolución de problemas, consiste en cuatro fases: orientación, conexión, generación y reflexión. Dichos autores concluyen que en educación matemática aún se necesitan más estudios que permitan comprender los procesos desarrollados en el planteamiento de problemas.

Hartmann et al. (2021), de una parte, argumentan que es interesante proponer a los estudiantes que formulen problemas en torno a situaciones de la vida real porque dicho enfoque de enseñanza puede ayudar a potenciar las actividades de modelización matemática en la escuela; y de otra, señalan la escasez de trabajos de investigación donde se propongan actividades de modelización a través del planteamiento de problemas.

Así, la formulación de problemas puede proponerse como un estímulo explícito para favorecer el estudio de problemas de modelización basados en una situación del mundo real antes de resolverlos (Hartmann et al., 2023). Pero también, tal como pretendemos en nuestro trabajo, la búsqueda de respuestas a una tarea de modelización puede implicar, de forma natural, actividades de planteamiento de problemas y de cuestiones sin necesidad de hacerlo explícito (Hansen y Hana, 2015).

En este sentido, uno de los objetivos que se propone el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en España es conseguir que los estudiantes puedan identificar cuáles son los problemas que pueden ser abordados con las herramientas que proporcionan los diferentes campos del conocimiento científico, con el fin de que puedan concebirlo como un saber integrado. En el caso de la enseñanza de las matemáticas, el currículo hace bastante hincapié en que, para que el alumno llegue a adquirir la competencia matemática, debe saber resolver problemas en diferentes contextos. Dicho currículo considera que la resolución de problemas es una de las más importantes maneras de aprender matemáticas, considerándolo como el eje vertebrador de dicho aprendizaje (Ministerio de Educación y Formación Profesional [MEFP], 2022). Asimismo, cuando se tratan las competencias específicas de las matemáticas, se considera que:

> Por otro lado, el planteamiento de problemas es otro componente importante en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas y se considera una parte esencial del quehacer matemático. Implica la generación de nuevos problemas y preguntas destinadas a explorar una situación determinada, así como la reformulación de un problema durante el proceso de resolución del mismo. (MEFP, 2022, p. 143)

Nuestra propuesta persigue, tal como propone ahora el nuevo currículo, articular la formulación de problemas con el resto de los componentes del proceso de estudio de las matemáticas, globalmente considerado. Concretamente, mostramos, mediante una experiencia de aula, el desarrollo de una modalidad de estudio que integra el trabajo con los problemas matemáticos (planteamiento y resolución de las cuestiones) con la formulación y el contraste de conjeturas, el desarrollo de pruebas, la construcción de modelos utilizando diferentes lenguajes, y la utilización de conceptos y teorías de diferentes tipos. En definitiva, pretendemos evitar que los problemas aparezcan aislados y descontextualizados.

En lo que sigue, presentamos muy brevemente algunos elementos de la *teoría antropológica de lo didáctico* (TAD) utilizados en este trabajo. Formulamos el problema de investigación abordado y la metodología utilizada. Describimos la experimentación realizada y terminamos con un breve análisis de los resultados obtenidos y algunas conclusiones.

2. Marco teórico: una modalidad de estudio regida por el paradigma de la modelización matemática

Denominamos *modalidad de estudio* de cierto ámbito de conocimientos, a una forma particular de interpretar dicho ámbito, acompañada de una manera específica de organizar su estudio en una institución determinada. La TAD identifica la didáctica como *la ciencia del estudio*:

> Lo didáctico se identifica así con todo lo que tiene relación con el estudio y con la ayuda al estudio de las matemáticas, identificándose entonces los fenómenos didácticos con los fenómenos que emergen de cualquier proceso de estudio de las matemáticas, independientemente de que dicho proceso esté dirigido a utilizar las matemáticas, a aprenderlas, a enseñarlas o a crear matemáticas nuevas. La didáctica de las matemáticas se define, por tanto, como la ciencia del estudio de las matemáticas. (Chevallard et al., 1997, p. 47)

Por tanto, una parte importante de su dominio empírico lo constituyen las modalidades de estudio vigentes (o posibles) en las instituciones escolares. Una modalidad de estudio (de cierto ámbito de conocimientos en una institución didáctica) es un *sistema empírico* y, por tanto, su análisis requiere trabajar con un modelo de este. En nuestro caso, tomaremos como modelo de una modalidad de estudio un sistema complejo, que denominamos *paradigma didáctico*, integrado por tres subsistemas: un *modelo epistemológico*, que constituye una representación (o interpretación) del ámbito en cuestión y que, en la TAD, se describe en términos de una arborescencia de praxeologías (Chevallard, 1992); unos *fines didácticos* o fines del estudio; y unos *medios didácticos* que se proponen para alcanzar dichos fines (Gascón, 2024; Gascón y Nicolás, 2021).

La TAD asume, a nivel disciplinar (matemático), una modalidad de estudio regida por el *paradigma de la modelización matemática* (Gascón y Nicolás, 2021) que es coherente con el *paradigma del cuestionamiento del mundo* (Chevallard, 2013). El paradigma de la modelización matemática interpreta la actividad matemática globalmente considerada como una actividad de modelización, propugna como medios didácticos los *recorridos de estudio e investigación* (REI) (Chevallard, 2006), e incluye entre sus fines didácticos la construcción y utilización de los procesos de modelización encaminados a responder a las cuestiones problemáticas que surgen en todo tipo de sistemas (matemáticos o extramatemáticos).

Los REI se caracterizan porque parten de una cuestión suficientemente viva y rica que genera el proceso de estudio, denominada *cuestión generatriz*. El estudio de dicha cuestión, para la que no se dispone de una respuesta inmediata, provoca la necesidad de estudiar diversos ámbitos de conocimientos (curriculares o extracurriculares), lo que da lugar a múltiples *cuestiones derivadas* cuyo estudio conduce, a su vez, a la búsqueda de respuestas y así sucesivamente. Podemos sintetizar este proceso de indagación mediante un *mapa de cuestiones y respuestas* (MCR) que contiene las posibles trayectorias a recorrer (o recorridas) y que han sido generadas a partir de la cuestión generatriz.

Los REI recuperan así la relación genuina entre cuestiones y respuestas (o planteamiento y resolución de problemas) que se materializa en los procesos de modelización que involucran (Barquero et al., 2011; Bosch, 2018; Florensa et al., 2020; García et al., 2006). Dada una cuestión (formulada con los elementos de cierto sistema), se recurre a la construcción de un modelo de dicho sistema y es el trabajo en el modelo el que permite responder (indirectamente) a dicha cuestión.

Con más precisión, el proceso de modelización matemática, tal como se caracteriza en la TAD, contiene cuatro estadios: a) se inicia con la formulación de una cuestión de tipo extra o intramatemática y se determina (construye) un sistema al que la cuestión alude; b) se constata que dicha cuestión no puede ser respondida directamente con los elementos del sistema, lo que comporta la construcción de un posible modelo matemático del sistema (que tiene estructura praxeológica); c) se trabaja en el modelo elaborado para responder (indirectamente) a la cuestión y se realiza una interpretación, en términos del sistema, de los resultados obtenidos; y d) se formulan nuevas cuestiones, lo que suele comportar la puesta en marcha de un nuevo proceso de modelización (Florensa et al., 2020; García et al., 2006; Gascón, 1994).

3. Problema de investigación

El análisis del objeto de estudio que proponen los libros de texto con relación a los sólidos geométricos (Rojas, 2024) muestra claramente que el estudio de dicho ámbito en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) se reduce al tratamiento de un conjunto de tareas bastante estereotipadas, directamente relacionadas con el cálculo de áreas y volúmenes, y al uso de unas técnicas que se materializan en fórmulas que se utilizan como algoritmos aritméticos. Los medios didácticos escolares, así como los correspondientes fines del estudio escolar de los sólidos geométricos, están muy condicionados por esa forma de recortar e interpretar el objeto de estudio, esto es, por el citado modelo epistemológico de dicho ámbito. Podemos concluir que la modalidad de estudio vigente en la ESO en torno a los sólidos geométricos está regida por un paradigma didáctico con fuertes rasgos *tecnicistas* (Gascón y Nicolás, 2021).

En esta modalidad de estudio vigente es previsible que emerjan diferentes fenómenos didácticos, relacionados entre sí e indeseables desde la perspectiva de la TAD. En particular, los alumnos tienen dificultades para formular problemas por propia iniciativa y, especialmente, para formular problemas abiertos o inversos. En la actividad matemática escolar apenas se relacionan los sólidos geométricos ni con los *problemas espaciales* (Salin, 2004) ni con la determinación y construcción efectiva de sólidos. No se construyen modelos matemáticos de los sólidos como instrumentos para responder a las cuestiones problemáticas que aparecen y raramente se utilizan parámetros para representar y para estudiar familias de sólidos.

Como respuesta a dichos fenómenos, nos planteamos el siguiente problema de investigación didáctica: *¿cómo diseñar, implementar y evaluar una modalidad de estudio en la ESO, basada en la indagación, que permita evitar los fenómenos didácticos emergentes en el estudio escolar de los sólidos geométricos y que integre el planteamiento y la resolución de problemas en la actividad matemática de los estudiantes?* Forma parte de nuestro problema de investigación el análisis de su dimensión ecológica, es decir, de las condiciones y restricciones de la implementación de dicha modalidad de estudio.

La modalidad de estudio que proponemos como hipótesis tentativa empieza por ampliar y transformar el objeto de estudio escolar de los sólidos geométricos, incluyendo nuevos tipos de tareas, como las relativas a las relaciones entre la determinación de la forma y del volumen de un sólido, a su construcción efectiva, y a la relación entre los problemas espaciales y los conocimientos geométricos; nuevas técnicas matemáticas, como las técnicas algebraicas y gráfico-funcionales que se utilizan en los procesos de modelización; y nuevos discursos justificativos de esta práctica, nuevos argumentos considerados válidos, como los que se apoyan en la coherencia entre el sistema y el modelo. Esto constituye una reinterpretación del ámbito matemático en cuestión, un modelo epistemológico alternativo. Postulamos que los REI constituyen un medio didáctico adecuado de esta nueva modalidad de estudio, puesto que, tal como hemos argumentado, incluyen procesos de modelización matemática que son instrumentos de articulación de la actividad matemática (García et al., 2006). Y, en definitiva, permitirán alcanzar los fines del estudio perseguidos, entre los que se encuentra el de evitar los fenómenos didácticos emergentes en el estudio escolar de los sólidos geométricos.

4. Metodología

La investigación que presentamos es de tipo cualitativo y para ilustrar el funcionamiento de la nueva modalidad de estudio de los sólidos geométricos presentamos una experimentación en la que la cuestión generatriz del REI que hemos elegido hace referencia a un tipo de problemas espaciales relativos al diseño y la construcción de un envase con ciertas propiedades predeterminadas. Para abordarlo se utilizará inicialmente la *modelización espacio-geométrica*; a lo largo del proceso de estudio será necesario utilizar la *modelización algebraica*, y, en última instancia, sería especialmente útil la *modelización funcional* (aunque los alumnos no la llegaron a utilizar por iniciativa propia) (Rojas, 2024). Hemos implementado un REI cuya cuestión generatriz es la siguiente:

Q: *¿Cómo diseñar y construir un envase con una capacidad o volumen determinado*?

En general, responder a una cuestión de este tipo comportará, necesariamente, estudiar diversos ámbitos matemáticos (curriculares o extracurriculares) en torno a la determinación y construcción de sólidos. Y, recíprocamente, el estudio de dichos ámbitos requerirá plantear y resolver diferentes tipos de problemas y tareas de todo tipo.

En nuestro caso particular, dicho estudio incluyó tres grandes tipos de tareas, caracterizados por su complejidad creciente, que designamos mediante:

T_1: adivina cuál es el envase;

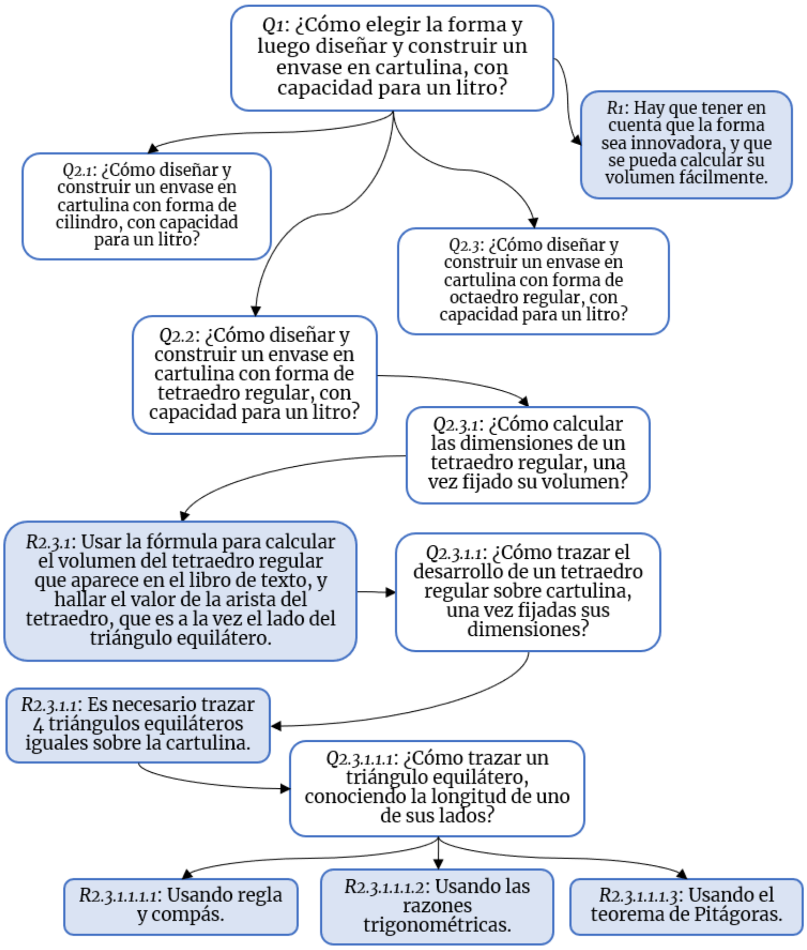
T_2: diseño de un envase con capacidad para un litro;

T_3: diseño de un envase para un perfume.

Entre dichas tareas se incluyen algunas abiertas e inversas. Por *tarea abierta* entendemos aquella en la que los datos y las incógnitas no están prefijados, por lo que una parte importante de la tarea consistirá en elegir las variables que se tomarán en consideración. En el caso de las *tareas inversas*, los datos y las incógnitas suelen estar intercambiados con relación a la función que desempeñan habitualmente en los problemas escolares (Bosch et al., 2004; Rojas y Sierra, 2021).

A lo largo del desarrollo del REI, propusimos a los estudiantes que elaborasen un MCR con el objetivo de ir recopilando las cuestiones problemáticas y sus posibles respuestas surgidas durante el proceso de resolución. Dado que desconocían dicha herramienta, les presentamos un ejemplo de MCR que fue elaborado por otro grupo de alumnos en una primera implementación del REI (Figura 1).

Figura 1. Mapa de cuestiones y respuestas presentado a los estudiantes



5. DESARROLLO DE LA MODALIDAD DE ESTUDIO DISEÑADA

La experimentación del REI fue implementada con 7 estudiantes del Instituto de Educación Secundaria (I.E.S) Cardenal Cisneros, de Madrid (España), en el marco de una asignatura optativa denominada *Ampliación en matemáticas*, ofrecida a los estudiantes de 3.º de ESO. Por tanto, el trabajo con los estudiantes se llevó a cabo a lo largo de 27 sesiones de 55 minutos cada una, entre el 1 de noviembre del 2018 y el 27 de abril del 2019, ambas fechas incluidas. Los tres grandes tipos de tareas que propusimos fueron, como hemos dicho, el análisis de algunos envases comerciales (sesiones 1 a 5), el diseño de un envase con capacidad para un litro (sesiones 6 a 9) y el diseño de un envase para un perfume (sesiones 10 a 26). Estas tareas se abordaron, generalmente, en dos grupos de estudiantes: grupo *A* (estudiantes E_1, E_2 y E_3) y grupo *B* (estudiantes E_4, E_5, E_6 y E_7).

La estructura de trabajo seguida durante la experimentación consistió en las tres fases siguientes: presentación de la cuestión inicial por parte del profesor investigador (*P*), trabajo en grupo, y balance con puesta en común. Los datos tomados durante el desarrollo de estas tareas provienen de los registros audiovisuales de las sesiones, de los cuadernos de trabajo de los estudiantes y del diario de campo del investigador. A continuación, describimos cada uno de los tipos de tareas propuesto y presentamos los MCR elaborados por los estudiantes, haciendo énfasis en las cuestiones derivadas de la cuestión o tarea inicial propuesta.

5.1. Primer tipo de tarea: adivina cuál es el envase

Aunque en este trabajo no trataremos su desarrollo, se propuso a cada grupo: a) elegir y describir por escrito un envase de la Figura 2, para responder al otro grupo que debía averiguar de qué envase se trataba; y b) escribir las preguntas necesarias para adivinar qué envase había elegido el otro grupo. El objetivo era que los estudiantes se cuestionasen sobre las posibles formas de los envases utilizados y cómo caracterizarlas.

Figura 2. Fotografía de los envases usados en el primer tipo de tarea

5.2. Segundo tipo de tarea: ¿cómo determinar y construir un envase de litro?

La consigna fue la siguiente:

> En la compañía envasadora de zumos naturales de España, Zumoluna, se nos ha pedido un tipo nuevo de envase con capacidad para un litro, porque quieren renovar su forma de envasar. Por tanto, el departamento de producción nos ha propuesto que diseñemos y construyamos un prototipo de envase. Nosotros

como empresa consultora, debemos entregar junto con el prototipo del envase, un informe donde: (a) se especifique por qué se ha elegido dicho envase y las características de su diseño, (b) se incluyan los planos del envase, (c) se sugiera su proceso de construcción, y (d) se argumente por qué dicho envase puede contener un litro de zumo.

En este caso, antes de que los estudiantes se reunieran para abordar la tarea propuesta, propiciamos una discusión de todo el grupo de clase sobre cómo plantearse el diseño y construcción del envase. Así, emergieron cuestiones acerca de la forma del envase y de sus medidas, ya que la capacidad estaba establecida en un litro. También se cuestionaron sobre la relación entre la forma del envase y las herramientas necesarias para el trazado de su desarrollo sobre la cartulina. Así, uno de los estudiantes indicó:

> E_5: Depende también de la forma, porque [...] si el envase es cilíndrico, puedes necesitar un compás.

Durante el trabajo grupal, con el objeto de complementar la etapa del diseño, emergió la pregunta sobre la posibilidad de incorporar el uso de un software de diseño gráfico para visualizar cómo quedaría el envase al final, ya que algunos alumnos estaban siguiendo un curso de Tinkercad en la asignatura de Tecnología.

Un momento importante de esta tarea surgió cuando los estudiantes se preguntaron sobre cómo calcular las medidas del envase, ya que de ello dependía el trazado de su desarrollo. Dicha tarea resultó ser muy problemática, ya que, además de ser abierta, es una tarea inversa con respecto a las que habitualmente se les propone en el texto escolar. En la tarea habitual que se plantea en los manuales escolares, se proporcionan las medidas de las longitudes de las aristas, o el área de alguna de las caras del sólido en cuestión, y se pide calcular su volumen. Sin embargo, aquí surge la tarea de determinar la forma de dicho envase y, dado el volumen, construir dicho envase, para lo que se requiere calcular las medidas de los elementos necesarios que dependen de la forma elegida.

Así, los estudiantes se enfrentaron a una tarea inversa de la habitual y abierta porque se debe elegir la forma y, dependiendo de esta, comprobar si el volumen determina o no el sólido a construir. Debido a la dificultad que presentaba este tipo de tarea, los alumnos intentaron su resolución mediante ensayo y error, probando con distintas medidas de las aristas del ortoedro, como se puede ver en el siguiente diálogo del grupo B, cuando el profesor investigador preguntó a los estudiantes por la manera en que habían llevado a cabo esta tarea:

> E_5: Lo que hacía era, mil dividido entre números y decía: si esto mide veinticinco, por ejemplo, divido mil entre veinticinco y me da tal número. Y luego eso, puedo dividir, puedo hacer que sea rectangular [Refiriéndose a que el número resultante era la medida del área de la base del envase]. Dos números, por ejemplo, me dio cuarenta. La base me daba cuarenta veces, y era ocho por cinco [...] centímetros [...]. Y me daba cuarenta, y luego de cuarenta hay que llegar a mil, pero también me daba una altura muy grande. [...] Porque [...] cada vez que hacía la... altura más pequeña, la base me daba mucho más grande y... me quedaba la base muy grande.

Aquí, el grupo se planteó seguir probando la técnica de ensayo y error para ir consiguiendo que la altura se fuera reduciendo y el área de la base tampoco fuera demasiado grande. Pero como dicha técnica les provocaba inseguridad, los estudiantes decidieron tomar las medidas de un envase comercial con forma de ortoedro, para guiarse en su diseño.

En el grupo A, los estudiantes afrontaron la misma problemática usando también la fórmula del volumen de un ortoedro para calcular las medidas mediante la técnica de ensayo y error, intentando dar valores que encajasen bien para el volumen de un litro.

Luego, durante el trazado de los desarrollos de los envases, los estudiantes se plantearon otras cuestiones problemáticas relativas a cómo ensamblar el envase. Esto muestra que el tipo de tareas propuesto favorece que los estudiantes formulen nuevos problemas y que estos emerjan de manera interconectada y como consecuencia de la búsqueda de una posible solución al problema planteado.

En lo referente a la elaboración de los planos del envase, los estudiantes se cuestionaron, por ejemplo, cómo aplicar la noción de escala:

> E_7: ¿Deben ser reales?
>
> E_1: ¡No, porque ponemos una escala de uno partido de dos, y sería la mitad! ¡Viste qué cálculos matemáticos!
>
> E_4: ¿Pero eso es reducción o aumento...?
>
> E_7 y E_1: ¡Reducción!

En resumen, en el grupo A, el cuestionamiento sobre la forma del envase, presentado en el MCR (Figura 3), se concretó en tres preguntas: sobre el material, sobre la capacidad y sobre las medidas del envase.

Como hemos indicado antes, en ambos grupos los estudiantes se decantaron por una forma de ortoedro. Sin embargo, como los estudiantes del grupo B optaron por guiarse por las medidas de un envase comercial con capacidad de un litro (Figura 4), esta situación dio origen a una discusión sobre si dichas medidas coincidían exactamente con la capacidad deseada, y sobre las posibles causas que hacen que este tipo de envases efectivamente sean un poco mayores de lo esperado para disminuir la presión del líquido que podrían contener. Así, cuando en el grupo surgió el cuestionamiento sobre la capacidad del envase diseñado, los estudiantes respondieron:

> E_4: ¡Qué faltará! [refiriéndose a que la capacidad fuese menor a un litro].
>
> E_5: ¡Claro! Por eso supongo que se hará también lo de los tetrabriks, que se hace un poco más grande porque si solo ocupa un litro es que está muy...
>
> E_4: Justo.
>
> E_5: Justo, y tiene demasiada presión.

Figura 3. Mapa de cuestiones y de respuestas de la segunda tarea elaborado por el grupo A

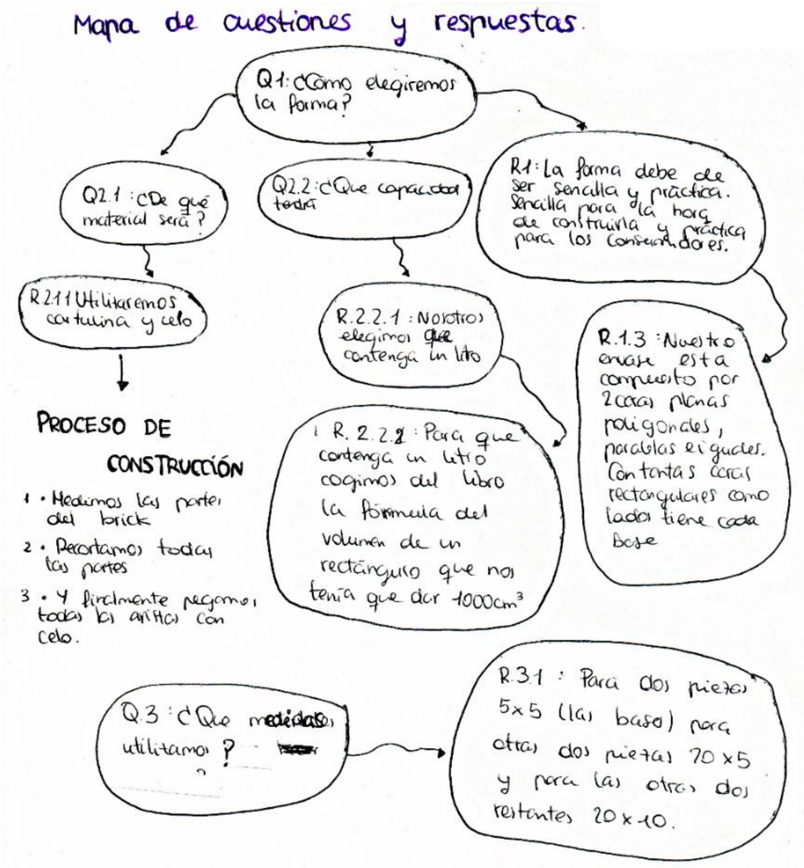
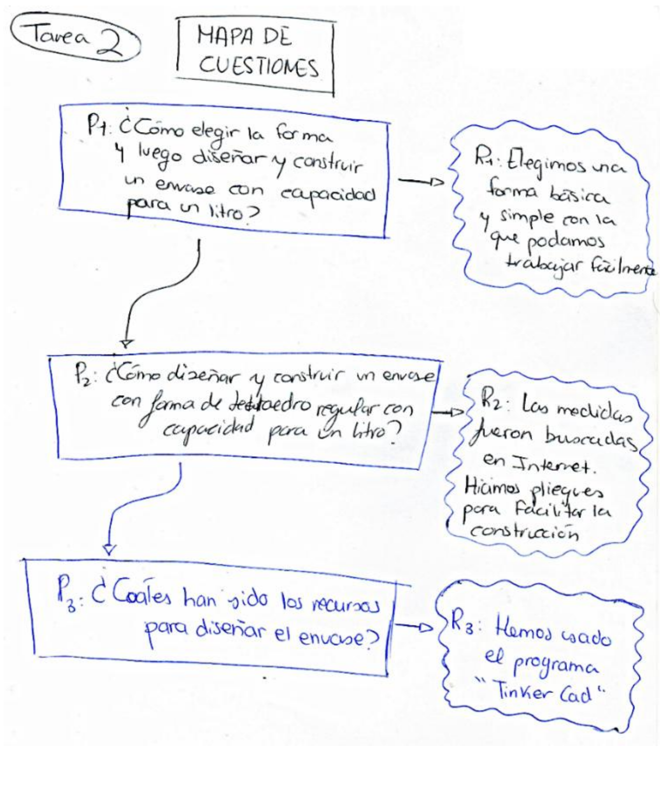


Figura 4. Mapa de cuestiones y de respuestas de la segunda tarea elaborado por el grupo B



5.3. Tercer tipo de tareas: ¿Cómo determinar y construir un envase para un perfume?

La consigna fue:

> En la compañía de perfumes *Afrodita* se ha decidido lanzar una nueva fragancia con ocasión de su décimo cuarto aniversario. Para ello, se quiere diseñar un envase atractivo y eficiente para dicho perfume. Nosotros, que ya hemos tenido nuestra primera experiencia como empresa consultora para la compañía envasadora de zumos naturales de España, Zumoluna, ahora vamos a diseñar para la compañía Afrodita el envase que necesitan. Por tanto, como empresa consultora que somos, debemos entregar junto con el diseño del envase, un informe donde: (a) se especifique por qué se ha elegido dicho envase y las características de su diseño, (b) se incluyan los planos del envase, y (c) se argumente porqué dicho envase es el mejor que podemos sugerir a la compañía de perfumes.

Antes de que los estudiantes abordasen esta tarea, hicimos un recuento de las tareas precedentes, a fin de remarcar los puntos esenciales durante la resolución de cada una de ellas. En este momento, los estudiantes ya tenían claro que la elección de la forma del envase determinaría sus dimensiones. La situación propuesta era más abierta, pues los estudiantes debían definir, además de la forma, su capacidad. De otra parte, la consigna acentuaba la variable forma en tanto que demandaba un envase atractivo. Con lo cual, los estudiantes tendrían que tomar decisiones.

En el grupo A, los estudiantes, después de una búsqueda en internet, eligieron un envase esférico con una capacidad de 100 *ml*, como puede verse en su MCR (Figura 5). Buscaron en internet si había un envase con esa capacidad y forma para poder consultar sus medidas y no lo encontraron. En el transcurso de dicha búsqueda, decidieron cambiar a una capacidad de 125 *ml* porque pensaban que era más estético que el envase fuera un poco más alargado que una esfera. El cambio de capacidad del envase se acompañó de un cambio de la forma, de modo que estaría constituido por dos semiesferas y un cilindro, con una de las semiesferas sin un casquete esférico, para que el envase tuviera una base estable.

Este ir y venir entre la forma y la capacidad les condujo: (1) a la búsqueda de un conjunto de fórmulas que les permitiesen determinar las dimensiones del envase; y (2) a cuestionar la validez de las fórmulas que aparecen en los manuales escolares. Así, por ejemplo, decidieron analizar cómo se calcula el volumen de un sólido a partir del principio de Cavalieri.

Encontraron las fórmulas del volumen de una esfera ($\frac{4}{3}\pi R^3$) y de un cilindro ($\pi R^2 H$) en el texto escolar de 3.º de ESO y el de un casquete esférico ($\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$) en internet. El hecho de que la forma del envase fuera un conglomerado de sólidos, hizo que los alumnos se plantearan encontrar una fórmula para calcular el volumen de todo el envase y de nuevo cambiaron la capacidad del envase, esta vez a 150 *ml* (asignando un volumen de 50 *ml* a cada parte del envase). Los alumnos calcularon las dimensiones de un envase con forma compuesta de semiesfera, cilindro y zona esférica (semiesfera a la que se le ha quitado un casquete esférico) y volumen de 150 cm^3, donde el radio de la semiesfera, el radio de la base del cilindro y el radio mayor de la zona esférica son iguales a R.

La resolución de dicha tarea requiere calcular los posibles valores de R, H, r y h (donde R es el radio de la esfera, H es la altura del cilindro, r es el radio del casquete esférico o el radio menor de la zona esférica y h es la altura del casquete esférico) con las ecuaciones:

$$\frac{2}{3}\pi R^3 + \pi R^2 H + \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h) = 150$$

$$R = \frac{r^2 + h^2}{2h}$$

El estudiante, E_1, del grupo A, propuso lo siguiente para calcular la fórmula de dicho envase:

> E_1: Pues sumando $\frac{4}{3}\pi R^3 + \pi R^2 H$. Lo primero es hallar el radio R. Si descubrimos el radio ya podemos empezar a despejar. Y después de tener el radio, calculamos la altura H.

La propuesta de E_1 apunta hacia la suma de las fórmulas para calcular el volumen de la esfera y del cilindro. Sin embargo, después de proponer que tratasen de unificar dichas fórmulas en una sola, los alumnos optaron por resolver la tarea por trozos, simplificando e intentando cerrar la tarea y considerar que cada parte tendría un volumen de 50 *ml*.

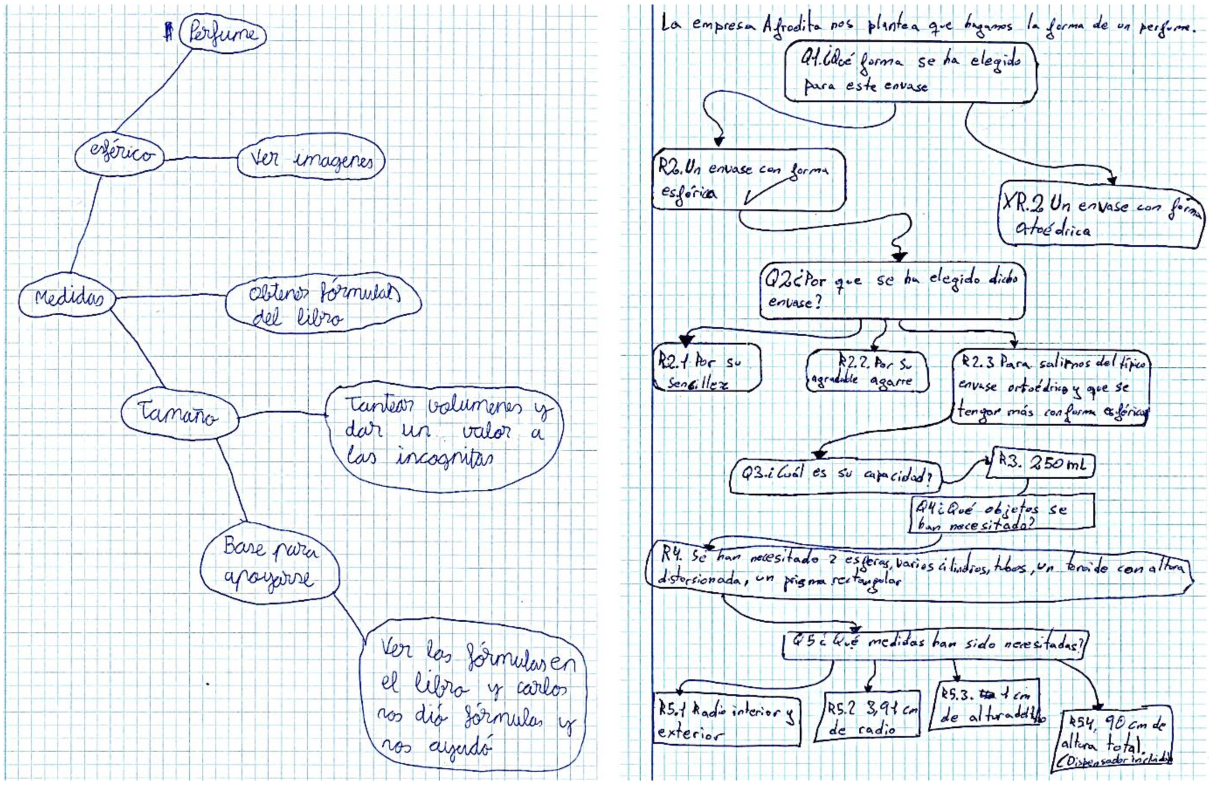
> P: ¿Cómo haríamos para obtener el radio de la esfera y la altura del cilindro?
>
> E_1: [...] Despejando equis y encontraríamos el radio [señalando la expresión $\frac{4}{3}\pi x^3 = 100$ escrita en su cuaderno]. Y, después de encontrar el radio R, ya podríamos hacer $V = \pi R^2 H$ [señalándola en el manual], y despejaríamos H. O sea, sería π por el radio [conseguido de $\frac{4}{3}\pi x^3 = 100$], al cuadrado, y pondríamos $50 = \pi R^2 H$. Entonces pondríamos la altura como equis, y despejaríamos.

El proceso de obtención de las diferentes medidas del envase ha sido descrito en (Rojas y Sierra, 2021, pp. 54-57).

En resumen, para resolver el tipo de tarea propuesto, se ha partido de un sistema formado por diferentes envases. Una vez elegida la forma de uno de ellos, se ha construido un modelo geométrico y se han estudiado sus características, definiendo las diferentes variables a considerar. Los estudiantes han trabajado en este modelo. Han utilizado las fórmulas como ecuaciones algebraicas con más de una variable. Como los alumnos no disponían de herramientas necesarias para resolver dichas ecuaciones, han decidido simplificar su tarea. Para ello, han convertido la resolución de una ecuación con varias incógnitas en varias ecuaciones con una sola incógnita.

Los alumnos han utilizado modelos geométricos y algebraicos, como hemos podido observar en la construcción de una técnica que les permitiera obtener las medidas del envase elegido.

Figura 5. Mapas de cuestiones y respuestas de la tercera tarea (grupo A izda.) (grupo B dcha.)



Los estudiantes del grupo B se plantearon dos opciones para el envase: una con forma de ortoedro y otra con forma esférica. Optaron por la segunda opción, ya que la otra les parecía muy típica y querían hacer algo más original. Esgrimieron argumentos sobre la sencillez y sobre lo agradable que resulta agarrar un envase con forma esférica (Figura 5). Para el cálculo de las medidas, consideraron el grosor de las paredes del envase y partieron de la fórmula que aparecía en su libro de texto para calcular el volumen de una esfera que igualaron a 250 *ml* (i.e., $\frac{4\pi r^3}{3} = 250$).

Como el diseño de su envase incluía una base surgida del corte de un pequeño casquete esférico, se preguntaron por el impacto que esto podría tener en el uso de la fórmula que habían empleado. Su respuesta fue:

> *E*5: Lo que hemos pensado es que dentro sea una esfera completamente, y así no nos tenemos por qué preocupar por si está cortado o no, para buscar una fórmula.

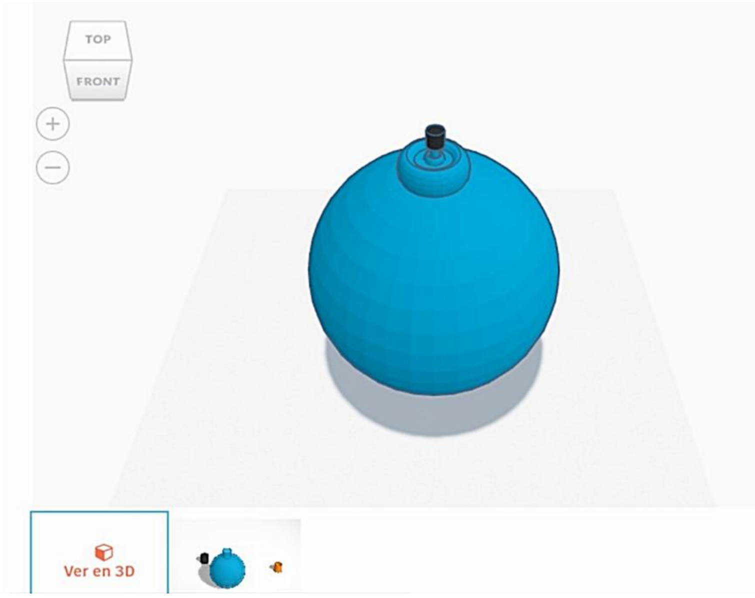
Para calcular las dimensiones del envase, los estudiantes explicaron:

> E4: Aquí despejamos la ecuación, y finalmente nos dio el radio, 3,91. Y el diámetro, pues al ser el doble, 7,82. Y esto sería la esfera del interior [del envase]. O sea, lo que ocuparía. Y luego, ya hemos pensado en que, la esfera exterior tendría 0,5 más de grosor.

En este caso, los estudiantes han simplificado la situación del cálculo de las dimensiones de su envase, modelándolo mediante dos esferas: una interior, con capacidad para 250 *ml*, y otra exterior, cuyo radio es 0,5 *cm* mayor que el de la esfera interior.

Por último, como se puede apreciar en el MCR de este grupo (Figura 5), los estudiantes se han cuestionado por los objetos que han necesitado para el diseño de su envase. Dicho cuestionamiento está vinculado directamente con el modelo tridimensional creado en Tinkercad, y con las herramientas que este software ofrece para el trazado de sólidos (Figura 6).

Figura 6. Captura de pantalla del modelo del envase diseñado en Tinkercad



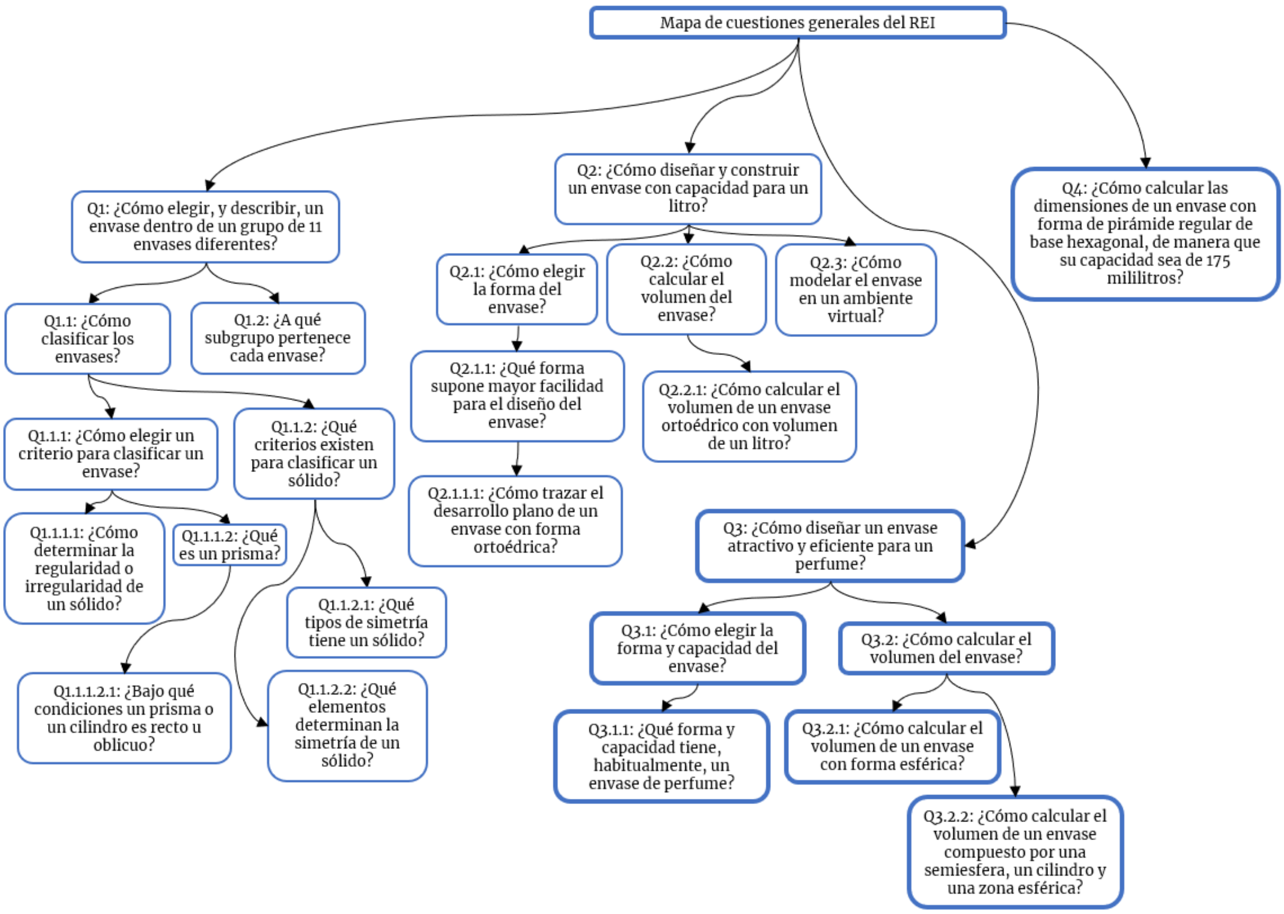
En este caso, los estudiantes dentro del sistema de posibles envases han elegido el modelo geométrico de la esfera y han estudiado sus características, definiendo las diferentes variables a considerar: el radio, el grosor de las paredes y una base para apoyar el envase. Han trabajado en el modelo. Han utilizado la fórmula del volumen como una ecuación algebraica para calcular el radio de la esfera. En definitiva, han elaborado un modelo geométrico y otro algebraico para obtener la medida del radio de la esfera que les va a permitir construir el envase deseado.

6. Análisis de los resultados obtenidos y primeras conclusiones

Como hemos visto, los MCR elaborados por los estudiantes muestran que, durante la búsqueda de soluciones para las tareas propuestas en el REI, emergen nuevas cuestiones derivadas de las cuestiones iniciales que, de una parte, dotan de sentido el estudio de varios ámbitos de las matemáticas que actualmente se proponen en el currículo escolar en torno al sentido espacial y, de otra, favorecen las condiciones para que sean los mismos estudiantes los que se planteen y busquen la solución de nuevos problemas. Estas condiciones no se dan en la modalidad de estudio escolar vigente, ya que los diferentes contenidos del currículo se presentan como *respuestas sin preguntas* (Bosch y Winsløw, 2015). En la matemática escolar, los problemas se proponen como aplicación de los saberes que se pretende enseñar.

La modalidad de estudio propuesta va más allá en la medida que impulsa a los estudiantes a formular MCR de manera coherente, a plantear conjeturas y a intentar probarlas. Prioriza que surjan de los alumnos cuestiones que les van a ayudar a comprender mejor las posibles respuestas que obtengan (Hansen y Hana, 2015). Permite articular los restantes componentes del estudio de las matemáticas y todo ello con el objetivo de encontrar una posible solución a la cuestión generatriz planteada. Además, hemos podido mostrar cómo aparecen, a lo largo del REI, tareas abiertas e inversas, lo que provoca la necesidad de utilizar modelos algebraicos. Aunque, como era de prever, los estudiantes tienen dificultades porque no están habituados a enfrentarse a estos tipos de tareas, su estudio ha mostrado el surgimiento espontáneo de cuestionamientos valiosos. Así, lo podemos observar en el siguiente mapa resumen de las principales cuestiones abordadas en el desarrollo del REI, derivadas de los MCR elaborados por los estudiantes (Figura 7).

Figura 7. Mapa de cuestiones del REI implementado (Rojas y Sierra, 2021, p. 50)



Cada una de estas preguntas, que ha ido surgiendo de manera interconectada y secuencial, se corresponden con varios de los ámbitos que posteriormente se han propuesto como objeto de estudio en el currículo escolar de secundaria (aunque no se traten habitualmente en las aulas) como *el estudio y la clasificación de figuras geométricas de tres dimensiones, y la determinación y construcción de figuras geométricas con diferentes herramientas* (MEFP, 2022). También ha surgido la necesidad de estudiar *las características de las figuras planas* y de establecer *relaciones entre las* *geometrías 2D y 3D* en el momento de construir el envase en cartulina a partir de su desarrollo plano.

El valor de las cuestiones que aparecen en el mapa radica en que han sido planteadas por los estudiantes y que han sido formuladas como consecuencia de un proceso de estudio que las ha provocado de manera coherente y las ha integrado en un proceso contextualizado. Por tanto, el potencial de esta modalidad de estudio radica en que, cuando los estudiantes asumen, analizan, trazan e intentan construir una posible solución a la cuestión generatriz del REI, plantean explícitamente nuevas cuestiones que derivan en nuevos problemas. Al mismo tiempo, los estudiantes profundizan en el estudio de diversos ámbitos (curriculares y no curriculares) que no están completamente determinados a priori.

Esta forma en la que han procedido los estudiantes está relacionada con el proceso de modelización descrito por Hartmann et al. (2023), en el que, a partir de una situación real, se pone en marcha un proceso específico de planteamiento y resolución de problemas que relaciona un dominio extramatemático con uno matemático, durante el cual el desarrollo de las actividades de simplificación y estructuración de la información juegan un papel importante. Además, “la matematización y el trabajo matemático podrían estimularse durante el desarrollo de un posible plan para resolver los problemas autogenerados” (traducido de Hartmann et al., 2023, p. 6), que es justamente lo que reflejan los MCR elaborados por los estudiantes.

En resumen, podemos afirmar que la nueva modalidad de estudio ha permitido evitar, en gran medida, los fenómenos didácticos indeseables que emergen habitualmente en el estudio escolar de los sólidos geométricos. En concreto, los estudiantes: a) han tenido menos dificultades para formular problemas por propia iniciativa; b) han relacionado de manera funcional (con el objetivo de resolver un problema) los sólidos geométricos con los problemas espaciales; c) han abordado el problema de la determinación y construcción efectiva de sólidos; y d) han construido determinados modelos matemáticos de sólidos (principalmente modelos gráficos y algebraicos) para responder a las cuestiones problemáticas.

En cuanto a las dificultades de la implementación de la nueva modalidad de estudio de los sólidos geométricos, podemos decir que a lo largo del proceso de estudio se pusieron de manifiesto restricciones institucionales de todo tipo. Así, como era de esperar, afloraron dificultades para encontrar respuestas a las tareas abiertas e inversas. Estas requerían la construcción de técnicas nuevas que no surgían de modo inmediato. Ello provocó que los alumnos tuvieran tendencia a convertir dichas tareas en tareas cerradas y directas, con el fin de poder utilizar las fórmulas como técnicas de cálculo aritmético, de modo similar a como proponía el libro de texto. El planteamiento de tareas abiertas e inversas requiere, y, por tanto, favorece, el uso de las fórmulas como modelos algebraicos (lo que los estudiantes hicieron parcialmente). Sin embargo, cuando se trata de caracterizar las relaciones que deben darse entre las variables para determinar las posibles soluciones y, sobre todo, para expresar gráficamente dichas relaciones, entonces los modelos funcionales son especialmente útiles. Las restricciones que impidieron que los alumnos utilizaran, por iniciativa propia, este tipo de modelos son múltiples. Cabe destacar que, tratándose de alumnos de tercero de ESO, carecían de la noción de relación funcional y, por otra parte, tampoco formaba parte de los objetivos de la implantación de la nueva modalidad de estudio orientar el trabajo de los estudiantes en esa dirección.

En los libros de texto, las tareas que se proponen suelen ser cerradas y directas porque proporcionan exactamente los datos que se requieren, la solución es única y se obtiene aplicando una técnica que se conoce de antemano. De hecho, la ausencia escolar de tareas abiertas e inversas dificulta la formulación de problemas y obstaculiza el cuestionamiento y la justificación de las técnicas. En última instancia, esta ausencia es coherente con la escasa presencia de la modelización en la matemática escolar, que puede ser considerada como una restricción a nivel disciplinar (matemático). En el nivel pedagógico, de organización general de la modalidad de estudio, se solventaron muchas restricciones gracias al carácter local y optativo de su implementación. El nuevo reparto de responsabilidades que comportó la nueva organización de la clase (trabajo en grupo, formulación de cuestiones y puesta en común de los resultados obtenidos) fue progresivamente aceptado por los alumnos.

La modalidad de estudio experimentada, regida por el paradigma de la modelización matemática, pretende constituirse como un tránsito hacia el paradigma del cuestionamiento del mundo. En este paradigma, los saberes no deben ser estudiados como si ya se supiera cuál es su razón de ser, sino que deben ser elaborados como respuesta a verdaderos problemas.

En definitiva, este trabajo nos lleva a considerar que para que los estudiantes se vean en la tesitura de tener que formular problemas en torno a su objeto de estudio, y para que lo hagan de manera funcional —esto es, de forma integrada en un proceso de estudio— es necesario un cambio de paradigma didáctico (tanto en el nivel pedagógico como en los niveles disciplinar y subdisciplinar). En este nuevo paradigma, la modelización matemática de sistemas de todo tipo desempeñará un papel central, los estudiantes plantearán y resolverán problemas cuyas respuestas no estarán dadas de antemano y deberán asumir una parte importante de la responsabilidad del proceso de estudio.

Agradecimientos

Trabajo elaborado en el marco de los proyectos PID2021-126717NB-C31 y PID2021-126717NB-C32 del Ministerio de Ciencia e Innovación (Agencia Estatal de Investigación) MCIN/ AEI/10.13039/501100011033/ y “FEDER Una manera de hacer Europa”.

Referencias

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(3), 339–352. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n3.519

Bosch, M. (2018). Study and research paths: A model for inquiry. En B. Sirakov, P. N. de Souza, & M. Viana (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematics* (Vol. 3, pp. 4001–4022). https://doi.org/10.1142/9789813272880_0210

Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 24*, 1-47.

Bosch, M., & Winsløw, C. (2015). Linking problem solving and learning contents: The challenge of self-sustained study and research processes. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 35*(3), 357–401.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.

Cai, J., & Rott, B. (2024). On understanding mathematical problem-posing processes. *ZDM – Mathematics Education, 56*, 61–71. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01536-w

Chevallard, Y. (1992). Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach. En R. Douady & A. Mercier (Eds.), *Recherches en Didactique des Mathématiques* (Selected Papers, pp. 131–167). La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)* (pp. 21–30). FUNDEMI-IQS.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: Alegato a favor de un contraparadigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education,* 2(2), 161–182. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE(UB)-Horsori. http://hdl.handle.net/2445/174473

Florensa, I., García, F. J., & Sala, G. (2020). Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática. Estudios de caso en distintos niveles educativos. *AIEM, 17*, 21–37. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.31

García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM Mathematics Education, 38*(3), 226–246.

Gascón, J. (1994). El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática, 6*(3), 37–51.

Gascón, J. (2024). Contributions of the anthropological theory of the didactic to the epistemological programme of research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 56*(6), 1319–1330. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01563-1

Gascón, J., & Nicolás, P. (2021). Incidencia de los paradigmas didácticos sobre la investigación didáctica y la práctica docente. *Educación Matemática, 33*(1), 7–40. https://doi.org/10.24844/EM3301.01

Hansen, R., & Hana, G. M. (2015). Problem posing from a modelling perspective. En F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 35–46). Springer.

Hartmann, L.-M., Krawitz, J., & Schukajlow, S. (2021). Create your own problem! When given descriptions of real-world situations, do students pose and solve modelling problems? *ZDM Mathematics Education, 53*(4), 919–935.

Hartmann, L.-M., Krawitz, J., & Schukajlow, S. (2023). Posing and solving modelling problems—extending the modelling process from a problem posing perspective. *Journal Für Mathematik-Didaktik, 44*(2), 533–561.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 123–147). Lawrence Erlbaum Associates.

Liljedahl, P., & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: A look at the state of the art. *ZDM Mathematics Education, 53*, 723–735. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w

Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022). Real Decreto 2017/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. https://www.boe.es/eli/es/rd/2022/03/29/217/con

Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (J. Zugazagoitia, Trad.). Trillas. (Obra original publicada en 1945)

Rojas, C. (2024). *Análisis de procesos didácticos sobre la determinación y construcción de sólidos en la educación secundaria* [Tesis doctoral sin publicar]. Universidad Complutense de Madrid. https://hdl.handle.net/20.500.14352/108277

Rojas, C., & Sierra, T. (2021). Restricciones institucionales que dificultan la modelización espacio-geométrica en la enseñanza secundaria. *AIEM, 20*, 41–63. https://doi.org/10.35763/aiem20.4031

Salin, M. H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la enseñanza elemental. En C. Chamorro (Ed.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 37–80). MEC.

∞

Carlos Rojas Suárez

Université de Sherbrooke (Canadá)
carlos.rojas.suarez@usherbrooke.ca | https://orcid.org/0000-0002-8689-8549

Tomás Ángel Sierra Delgado

Universidad Complutense de Madrid (España)
tomass@edu.ucm.es | https://orcid.org/0000-0003-2731-0028

Josep Gascón Pérez

Universitat Autònoma de Barcelona (España)
josep.gascon@uab.cat | https://orcid.org/0000-0001-5570-1144

Recibido: 4 de diciembre de 2024
Aceptado: 6 de junio de 2025

Problem Posing Integrated into a Study Process on the Construction of Solids

Carlos Rojas Suárez @ [1], Tomás Ángel Sierra Delgado @ [2], Josep Gascón Pérez @ [3]

[1] Université de Sherbrooke (Canadá)
[2] Universidad Complutense de Madrid (España)
[3] Universitat Autònoma de Barcelona (España)

In this study, developed within the framework of the Anthropological Theory of the Didactics (ATD), we present and analyse the potential of Study and Research Paths as didactic means of a modality of study that, governed by the paradigm of mathematical modelling, favours the integration of problem posing in the students' mathematical activity.

With this modality of study, proposed and implemented with third-year students of Compulsory Secondary Education, we aimed to: (1) broaden and transform the school object of study of geometric solids, starting from the search for possible solutions to a spatial problem that reasonably lead to the use of algebraic and graphic-functional techniques, and that prompt students to construct coherent arguments that justify these techniques; and (2) avoid certain undesirable didactic phenomena (from the perspective of the ATD) that arise from the way the study of geometric solids is generally approached at the school level, such as the difficulty of formulating problems independently (particularly open and inverse problems), the algorithmization of the mathematical activity carried out, and its disconnection from other mathematical and extra-mathematical domains.

We have implemented a Study and Research Path whose generative question gives rise to a type of spatial problem related to the design of packaging through the determination and construction of geometric solids. In this context, we proposed three main types of tasks: one involving the analysis of commercial packaging, and the other two characterised by their open and inverse nature and by their increasing complexity. During the study process, we asked students to produce a questions and answers map, aiming at revealing the genuine relationship between problem posing and problem-solving as it materialised in the modelling process carried out.

During the implementation of this new modality of study, various types of institutional constraints have arisen, and some of the undesirable didactic phenomena that commonly emerge in the school-based study of geometric solids have begun to be addressed. Specifically, students: (a) experienced fewer difficulties in formulating problems on their own initiative; (b) established functional relationships between geometric solids and spatial problems (with the aim of solving a problem); (c) engaged with the problem of effectively determining and constructing solids; and (d) constructed specific mathematical models of solids (mainly graphical and algebraic models) in order to respond to the questions posed.

Ultimately, this work leads us to consider that, for students to find themselves in the position of having to formulate problems—and to do so as an integral part of a study process—a didactic paradigm shift will be necessary, both at the pedagogical level and at the disciplinary and subdisciplinary levels.