

La invención de sentencias e historias matemáticas como medio para evidenciar el desarrollo del pensamiento algebraico

Inventing Numerical Sentences and Stories to Evidence the Development of Algebraic Thinking

Eder Pinto @ ¹, Cristina Ayala-Altamirano @ ², Marta Molina @ ³,
María C. Cañadas @ ⁴

¹ Universidad de O'Higgins (Chile)

² Universidad de Málaga (España)

³ Universidad de Salamanca (España)

⁴ Universidad de Granada (España)

Resumen ∞ En este artículo nos proponemos responder a qué conocimientos algebraicos se evidencian cuando un grupo de estudiantes de 9-10 años inventan sentencias numéricas e historias matemáticas, y qué aportes ofrecen estas tareas al desarrollo del pensamiento algebraico desde las dimensiones estructural y analítica. Analizamos las respuestas de estudiantes de estas edades, prestando atención a las operaciones y propiedades involucradas, los significados del signo igual y cómo se refieren y razonan sobre cantidades desconocidas. Los resultados muestran que el alumnado inventa sentencias que involucran números y cantidades desconocidas, apoyándose en diferentes propiedades de las operaciones y evidenciando comprensiones relacionales del signo igual. Al inventar historias, relacionan las cantidades desconocidas con situaciones cotidianas y plantean historias coherentes con la ecuación dada. Discutimos el rol que tiene la invención de problemas en la construcción del pensamiento algebraico en los primeros cursos de la educación primaria.

Palabras clave ∞ Educación matemática; Estudiantes de primaria; Álgebra

Abstract ∞ In this article, we aim to address the following research questions: What algebraic understandings are evidenced when a group of 9–10-year-old students invent numerical sentences and mathematical stories? And what contributions do these tasks make to the development of algebraic thinking from both structural and analytical perspectives? We analyse students' responses by focusing on the operations and properties involved, the meanings attributed to the equal sign, and the ways in which students refer to and reason about unknown quantities. The results show that students invent sentences involving numbers and unknown quantities, drawing on different properties of operations and demonstrating relational understandings of the equal sign. When inventing stories, they relate unknown quantities to everyday situations and construct narratives that are coherent with the given equation. We discuss the role of problem invention in the construction of algebraic thinking in the early years of primary education.

Keywords ∞ Mathematics Education; Primary students; Early algebra

Pinto, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M., & Cañadas, M. C. (2025). La invención de sentencias e historias matemáticas como medio para evidenciar el desarrollo del pensamiento algebraico. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática*, 28, 77-96. <https://doi.org/10.35763/aiem28.7544>

1. INTRODUCCIÓN

La invención de problemas es considerada una actividad matemática auténtica que, a la vez, constituye una oportunidad para acceder al pensamiento matemático de estudiantes de diferentes niveles educativos (Cai y Hwang, 2020; Fernández-Millán y Molina, 2016). Desde hace décadas, la comunidad científica ha destacado la importancia que supone prestar atención a las ideas matemáticas del estudiantado, ya que centrar la enseñanza en dichas ideas genera oportunidades para un aprendizaje más profundo (Walkoe et al., 2022). En esta línea, entendemos que los problemas inventados por los estudiantes se presentan como una vía especialmente valiosa para explorar su pensamiento matemático. Sin embargo, y a pesar del reconocimiento del potencial de la invención de problemas, aún es necesario desarrollar un marco teórico más sólido que permita analizar su impacto en distintos contextos (Cai y Hwang, 2020; Ruthven, 2020). En este artículo nos centramos en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra en educación primaria, destacando que, aunque la investigación ha estudiado ampliamente cómo estudiantes de 6 a 12 años resuelven problemas algebraicos (Kieran, 2022), la invención de problemas ha recibido escasa atención.

Adoptamos la idea de Cai y Hwang (2020) sobre la invención de problemas, la cual involucra diversas actividades interrelacionadas que requieren inventar (o reformular) y expresar un problema o una tarea matemática en un contexto particular. Para estos autores, los términos problema y tarea son interpretados en sentido amplio para incluir cualquier pregunta matemática que pueda plantearse y cualquier tarea matemática que pueda realizarse basándose en la situación problemática. En el ámbito de la investigación sobre la invención de problemas algebraicos, los estudios previos se han centrado principalmente en la invención de patrones (Báró, 2024) o en la invención de problemas verbales a partir de una representación simbólica inicial (Cañadas et al., 2018). En este trabajo nos interesamos específicamente en la invención de historias matemáticas a partir de una expresión algebraica dada. Asimismo, exploramos un contexto escasamente tratado en la literatura: la invención de igualdades y sentencias numéricas, con el objetivo de ampliar los conocimientos que emergen al inventar problemas algebraicos en educación primaria.

La enseñanza del álgebra escolar tiene como propósito central el desarrollo del pensamiento algebraico (Kieran, 2022). Conceptualmente, entendemos que el pensamiento algebraico va más allá de la manipulación de símbolos, pues el foco está puesto en cómo estudiantes expresan la estructura y propiedades de los números, las operaciones y las relaciones (dimensión estructural); y los modos en que tratan las cantidades desconocidas como si fueran conocidas (dimensión analítica) (Kieran, 2022). Aunque ambas dimensiones teóricas han sido ampliamente estudiadas de forma independiente en el contexto de la resolución de problemas, no se han explorado de manera conjunta ni tampoco en el contexto de la invención de problemas. Esto constituye la principal contribución de este artículo. En concreto, nos proponemos explorar por separado ambas tareas de invención de problemas (historias matemáticas e invención de sentencias a igualdades numéricas), que

representan un primer acercamiento a la invención de problemas algebraicos en educación primaria. Desde un enfoque exploratorio y descriptivo, este estudio busca dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿Qué conocimientos algebraicos se evidencian cuando un grupo de estudiantes de 9-10 años inventan sentencias numéricas e historias matemáticas?, y ¿Qué aportes ofrecen estas tareas al desarrollo del pensamiento algebraico desde las dimensiones estructural y analítica? Dos objetivos nos permitirán abordar estas preguntas:

1. Identificar y caracterizar las estructuras matemáticas y las formas de referirse a cantidades indeterminadas que evidencian los estudiantes al inventar sentencias numéricas e historias matemáticas.
2. Reflexionar, a partir del análisis realizado, sobre las potencialidades de las tareas de invención introducidas (sentencias numéricas e historias matemáticas) para favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes.

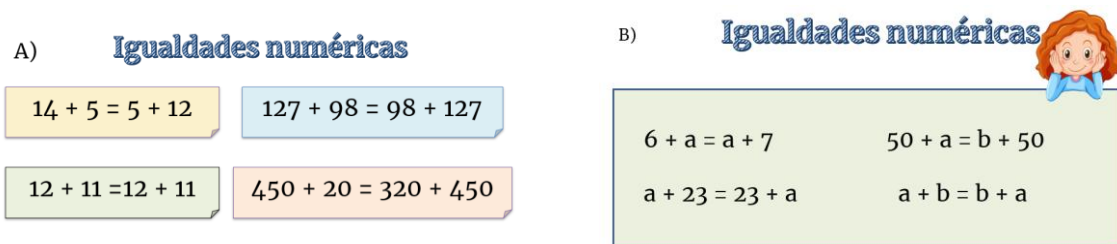
2. PENSAMIENTO ALGEBRAICO

Conceptualmente, entendemos que el pensamiento algebraico se organiza a través de tres dimensiones teóricas: (a) analítica, que, entre otras cosas, se centra en tratar con lo desconocido como si fuera conocido; (b) estructural, que se relaciona con ver y expresar estructuras y propiedades de números, operaciones y expresiones; y (c) funcional, que se centra en la generalización de relaciones funcionales a través de diferentes representaciones (Kieran, 2022). En esta investigación nos enfocamos en las dos primeras dimensiones.

2.1. Sentencias e igualdades numéricas

Las igualdades y sentencias numéricas son fundamentales en el aprendizaje de la aritmética y en el desarrollo del pensamiento algebraico, ya que permiten a los estudiantes comprender la estructura del sistema numérico y la relación entre las operaciones matemáticas (Molina, 2006). En particular, las igualdades numéricas abiertas, como $6 + 4 = ___ + 5$, favorecen la comprensión relacional del signo igual, aspecto clave en el desarrollo del pensamiento algebraico. Asimismo, las sentencias numéricas verdaderas o falsas ayudan a los estudiantes a reflexionar sobre la veracidad de las expresiones, promoviendo estrategias de justificación y argumentación (Carpenter et al., 2003). La Figura 1 muestra ejemplos de estas sentencias empleadas en este estudio dentro del contexto de la resolución de problemas.

Figura 1. Igualdades y sentencias numéricas



Fuente: (Pinto et al., 2023, p. 155)

En tareas de inventar sentencias para discutir su veracidad o falsedad, desde nuestro posicionamiento teórico, la *dimensión estructural* tiene relación con que estudiantes atiendan a las operaciones y propiedades involucradas en las sentencias y justifiquen la veracidad o falsedad de estas sin la necesidad de recurrir a cálculos aritméticos. Por ejemplo, un conocimiento de la propiedad conmutativa de la adición llevaría a reconocer que la expresión $14 + 5 = 5 + 12$ es falsa, pues no están los mismos sumandos en ambos lados del signo igual. En cambio, $a + 23 = 23 + a$ es verdadera. Además, este tipo de tarea permite explicitar cómo es comprendido el signo igual. Molina y Ambrose (2008) identifican tres etapas en la comprensión del signo igual:

- *Estímulo para una respuesta*: el signo igual se interpreta como un símbolo operacional de izquierda a derecha, lo que implica que actúa como una orden para dar la respuesta a las operaciones expresadas en el lado izquierdo, situándose la respuesta justo a la derecha del signo igual.
- *Expresión de una acción*: refiere a una interpretación operacional del signo igual más flexible al aceptar que el resultado de la operación que contiene la sentencia puede aparecer tanto en un miembro como en otro. En este caso se resuelven exitosamente sentencias que contienen operaciones solo en uno de los miembros.
- *Equivalencia numérica*: el signo igual es interpretado como un símbolo relacional y se resuelven exitosamente sentencias con símbolos operacionales en ambos miembros.

La *dimensión analítica* se pone de manifiesto cuando estudiantes razonan con cantidades indeterminadas (como el caso de las letras en figura 1b) y las suman, restan, multiplican o dividen, como si fueran conocidas. Esta dimensión no requiere necesariamente de símbolos alfanuméricos, estudiantes pueden razonar con cantidades indeterminadas a través de, por ejemplo, dibujos, palabras o materiales manipulativos.

2.2. Ecuaciones e historias matemáticas

Desde la perspectiva del pensamiento algebraico, el trabajo con ecuaciones busca desarrollar una comprensión relacional del signo igual, así como razonar con expresiones, establecer la equivalencia entre distintas expresiones en términos generales, y plantear y resolver ecuaciones (Blanton et al., 2018). Según Radford (2022), el trabajo con ecuaciones en la educación primaria suele ser abordado a través de igualdades aritméticas abiertas (p. ej., $5 + \underline{\quad} = 16$), ecuaciones alfanuméricas (p. ej., $5 + x = 16$) o a través de historias matemáticas, que son narrativas que permiten dar significados contextuales a las expresiones matemáticas simbólicas. Por ejemplo, en la Figura 2 presentamos dos historias que introdujimos al inicio de una sesión de trabajo dentro del contexto de la resolución de problemas (Pinto et al., 2023). También incluimos la ecuación que refleja su estructura.

Figura 2. Historias matemáticas para representar ecuaciones



Fuente: Pinto et al. (2023, p. 162).

En las tareas en las que hay que inventar una historia matemática dada una ecuación, la *dimensión estructural* también se puede relacionar con la comprensión del signo igual, así como con la transformación y generación de expresiones equivalentes (Kieran, 2022). En los ejemplos de la figura 2 se expresan las historias con lenguaje natural y simbólico. Si bien ambas expresiones tienen diferentes formas, son equivalentes. Otro aspecto que se relaciona con esta dimensión es el significado de las operaciones implicadas (las estructuras semántica y sintáctica del problema) (Molina y Cañadas, 2018).

La *dimensión analítica* se interesa por la manera en que los estudiantes dan significados a las cantidades indeterminadas (incógnitas o variables) dado un determinado contexto (Kieran, 2022). Si la tarea de inventar historias se complementa con la de resolver la ecuación, esta dimensión además involucraría el pensamiento relacionado con las transformaciones de equivalencia en las cuales se puede observar el uso de las propiedades de la igualdad u otras propiedades matemáticas que permiten mantener la relación de verdad entre los miembros de la ecuación que se encuentran a cada lado de la igualdad con el objetivo de encontrar el valor de la incógnita.

2.3. Invención de problemas en el contexto del álgebra escolar

Desde la perspectiva del álgebra escolar, la invención de problemas impulsa la exploración de patrones y estructuras matemáticas, favoreciendo la transición del pensamiento aritmético al algebraico y promoviendo la argumentación y el uso de representaciones algebraicas (Báro, 2023; Christou et al., 2005).

Diversas investigaciones han abordado cómo los estudiantes inventan y expresan con lenguaje natural una situación a partir de una representación dada: una ecuación o un gráfico. Por ejemplo, Cañadas et al. (2018) y Fernández-Millán y Molina (2016) atendieron a cómo estudiantes de secundaria daban sentido al simbolismo algebraico y las dificultades que encontraron, dependiendo de las características de las expresiones algebraicas dadas. Coincidieron con otros autores en destacar la utilidad de las tareas de invención para evaluar el conocimiento conceptual más que el procedimental. Otros estudios han explorado la invención de patrones o problemas funcionales. Báro (2023) mostró que estudiantes de 13-14 años, al inventar secuencias con fósforos, identificaron y generalizaron patrones,

diferenciando enfoques aritméticos y algebraicos. Wilkie (2024) trabajó con estudiantes de 15-16 años en la invención de patrones asociados a funciones cuadráticas, evaluando tanto la generalización como la creatividad en su invención.

A pesar de los avances en el estudio de la invención de problemas en el álgebra escolar, aún quedan áreas por explorar. Es necesario investigar su relación con la aritmética generalizada y la generalización de propiedades matemáticas, así como integrar distintos enfoques y contenidos, ya que la mayoría de los estudios se centran en un solo aspecto. Además, la investigación se ha focalizado principalmente en educación secundaria, por lo que resulta fundamental analizar su impacto en contextos educativos diversos, especialmente en educación primaria.

3. MÉTODO

Este trabajo es parte de un proyecto de investigación más amplio que siguió las directrices de la investigación de diseño y tuvo como propósito desarrollar una propuesta de enseñanza que guíe a estudiantes chilenos de 9-10 años a expresar y justificar ideas matemáticas generales al trabajar con distintos contenidos de carácter algebraico (para más información, ver Pinto et al., 2023). Diseñamos e implementamos diez sesiones de trabajo virtual con los estudiantes. En esas sesiones, los estudiantes, principalmente, resolvieron problemas. Además, en tres instancias particulares inventaron problemas; foco de análisis de este artículo. De este modo, desde la perspectiva de la investigación de diseño, perseguimos contribuir a la creación y análisis de nuevas posibilidades de enseñanza y aprendizaje en contextos reales (Molina, 2021).

3.1. Participantes

Los 21 participantes, de 9 y 10 años de edad, habían finalizado 4.º curso de educación primaria. Fueron seleccionados con la ayuda de sus maestros, considerando tres criterios: (a) interés en participar en una actividad extracurricular en verano, (b) diversidad de intereses y rendimiento en matemáticas, y (c) paridad de género. Sus conocimientos previos se centraban en la fluidez en las operaciones aritméticas básicas, sin experiencia en invención de problemas. En álgebra, habían trabajado con patrones numéricos y ecuaciones simples mediante ensayo y error o la operación inversa.

Todos los niños participaron voluntariamente en la investigación, con el consentimiento informado de sus familias y su propio asentimiento informado, garantizando el tratamiento ético de sus respuestas. El manejo de los datos fue supervisado por el Comité de Ética Institucional de la universidad del primer autor.

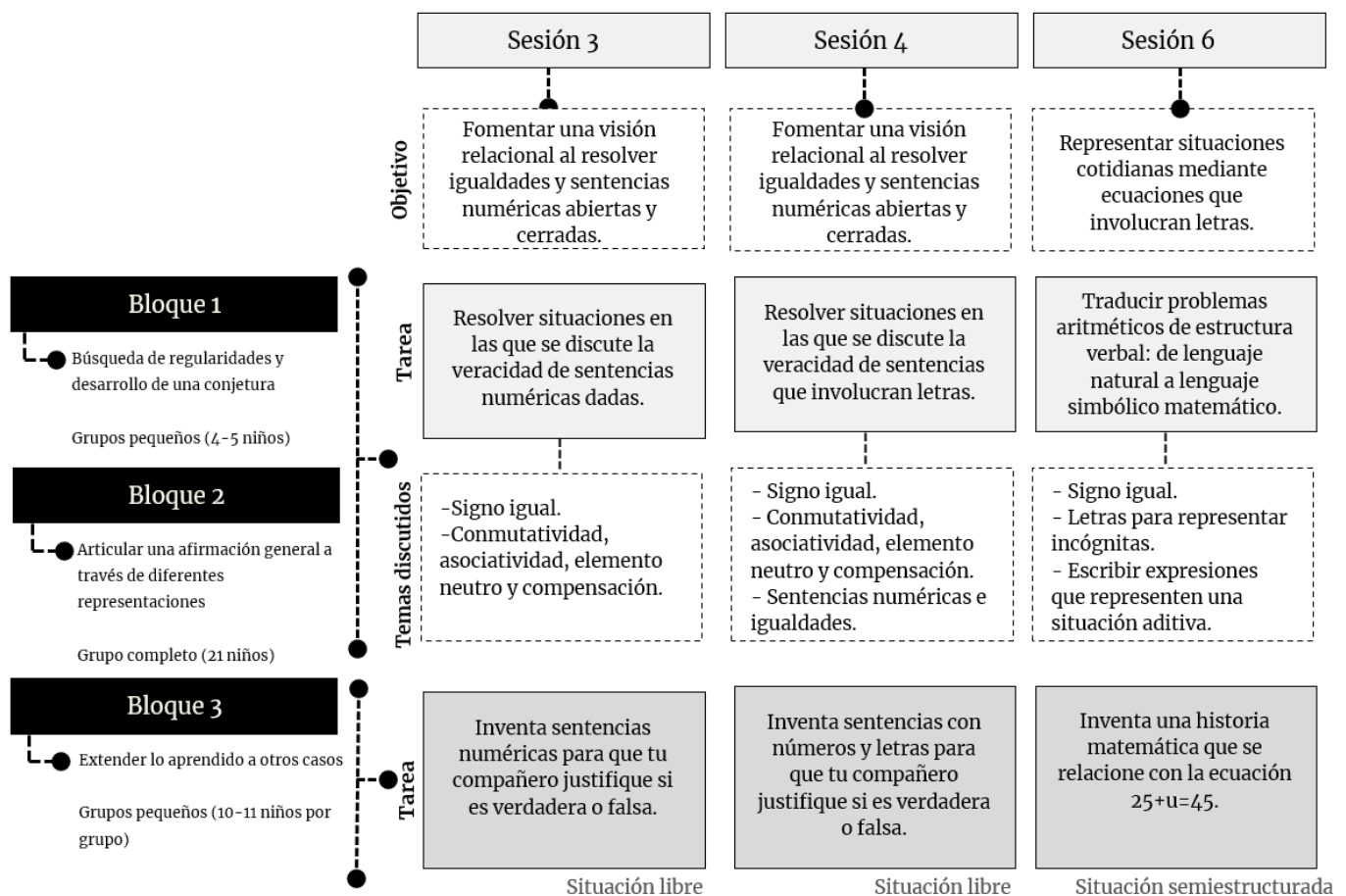
3.2. Instrumentos y recolección de datos

Presentamos tres tareas de invención de problemas a los estudiantes en el tercer y último bloque de las sesiones 3, 4 y 6. Durante los dos primeros bloques, los estudiantes resolvieron problemas diseñados por el equipo de investigación (ver Figuras 1 y 2). En el tercer bloque, les propusimos distintas actividades para aplicar los conocimientos trabajados; entre ellas, las tareas de invención. Con la finalidad de

atender a la diversidad en el aula y garantizar momentos en que todos los estudiantes pudieran expresar sus ideas, les agrupamos de diferentes formas durante la sesión: en grupos de 4-5 en el primer bloque, en gran grupo en el segundo bloque y en 10-11 en el tercer bloque. Esta agrupación es compatible con el carácter exploratorio de esta investigación. Además, cada uno de los bloques fue dirigido por un docente-investigador, quien procuró la participación de todo el grupo.

En la Figura 3 resumimos el diseño de las tres sesiones en las cuales presentamos las tareas de invención, las cuales fueron presentadas de manera oral y visual.

Figura 3. Estructura de las sesiones 3, 4 y 6



Siguiendo a Stoyanova y Ellerton (1996), propusimos situaciones de invención libres (sesiones 3 y 4) y semiestructuradas (sesión 6). En las sesiones tercera y cuarta, les pedimos a los estudiantes que inventaran igualdades o sentencias numéricas cerradas sin y con letras, sin indicarles que estas fueran verdaderas o falsas. Posteriormente, les pedimos justificar su veracidad o falsedad. En la sexta sesión, les solicitamos que inventaran una historia matemática dada una ecuación.

3.3. Análisis de datos

A partir de los objetivos de investigación, definimos como unidad de análisis las respuestas del grupo completo de estudiantes a las tareas de invención propuestas, lo que nos permitirá profundizar en la comprensión y exploración de los datos más allá de las particularidades. Las fuentes de información de este estudio fueron las videograbaciones de las sesiones y sus respectivas transcripciones, así como las respuestas escritas de los estudiantes que registraban en pizarras y mostraban a través de las cámaras. Empleamos un análisis de contenido de tipo deductivo, sustentado en referentes teóricos, para identificar ideas algebraicas del alumnado. Las categorías analíticas utilizadas se detallan en la Tabla 1.

Tabla 1. Categorías analíticas

Tarea de invención	Categorías según la dimensión teórica del pensamiento algebraico (Kieran, 2022)	
	Estructural	Analítica
Igualdades y sentencias numéricas (sin y con letras)	- Propiedades de las operaciones involucradas. - Comprensiones que evidencian sobre el signo igual (Molina y Ambrose, 2008).	- Modo en el que se refieren a las letras y razonan sobre estas.
Historias matemáticas	- Estructura sintáctica (Duvall, 2006). - Estructura semántica (Carpenter y Mosser, 1983). - Comprensiones que evidencian sobre el signo igual (Molina y Ambrose, 2008).	- Modo en el que se refieren y razonan sobre cantidades desconocidas.

En el caso de las igualdades numéricas, por ejemplo, al analizar la sentencia $107 + a = 50 + 50 + 7 + a$ identificamos la presencia de la propiedad asociativa y una comprensión del signo igual asociada a la equivalencia numérica (dimensión estructural). Además, notamos el uso de una misma letra al finalizar cada miembro de la sentencia (dimensión analítica), la cual es referida como una cantidad desconocida operando con ella como si fuera una cantidad conocida.

Para el análisis de las historias matemáticas, las traducimos al simbolismo algebraico respetando, cuando fue posible, un orden de izquierda a derecha. Comparamos la traducción con la ecuación original, evaluando su congruencia según Duvall (2006), quien establece tres criterios: correspondencia semántica entre unidades significativas, univocidad semántica entre registros, y mantenimiento del orden en la organización de dichas unidades. Cuando no se cumple alguno de estos criterios, las representaciones se consideran no congruentes, aunque pueden ser referencialmente equivalentes. Tanto las expresiones congruentes como las equivalentes se aceptaron como respuestas correctas.

Asociamos la perspectiva analítica con el modo en que los niños se refieren y razonan sobre cantidades desconocidas, examinando sus discusiones orales y

registros escritos en busca de términos como adjetivos indefinidos y frases que indicaran referencia a cantidades desconocidas, tales como “es un número que no conocemos” o “es el número que quieras”. Por ejemplo, la historia inventada por un estudiante ante la ecuación $25 + u = 45$ fue “María recogió 25 manzanas rojas y algunas verdes. Y en total tiene 45. ¿Cuántas manzanas verdes tiene María?”. Después de traducir esta historia a simbolismo algebraico ($25 + u = 45$) y notar la equivalencia con la ecuación dada, interpretamos en su respuesta el significado asociado al signo igual “estímulo para una respuesta” y una historia de cambio-aumento.

Para garantizar la confiabilidad de las codificaciones, los autores realizaron un proceso de calibración que incluyó discusiones conjuntas sobre las categorías y sus alcances. Posteriormente, el primer y segundo autor codificaron de forma independiente un tercio de las respuestas, logrando un acuerdo interjuez superior al 94 %, por encima del mínimo aceptable (León y Montero, 1998). Los desacuerdos los resolvimos mediante consenso, y el primer autor codificó los dos tercios restantes.

4. RESULTADOS

En este apartado exponemos los conocimientos algebraicos que emergen de las respuestas del alumnado, centrados en las estructuras matemáticas empleadas y en cómo aluden a cantidades indeterminadas.

4.1. Estructuras matemáticas evidenciadas

Las sentencias numéricas generadas por el grupo de estudiantes (ver Tabla 2) muestran un predominio de expresiones aditivas, lo que se relaciona con el tipo de expresiones trabajadas en clases. Además, las expresiones poseían estructuras variadas que incluyen dos o tres sumandos en el lado izquierdo y entre dos y cuatro en el derecho. Además, identificamos un uso de diversos rangos numéricos en las expresiones sin letras, a diferencia de las expresiones con letras, en las cuales los valores numéricos involucrados tienden a ser menores (p. ej., $b + 32 = a + 31$).

Las propiedades de las operaciones identificadas en las sentencias, con letras y sin letras, corresponden principalmente a la conmutatividad y la asociatividad, siendo esta última la más frecuente. Esto coincide con los ejemplos previamente trabajados en la resolución de problemas, así como con los contenidos abordados en sus clases habituales. El uso de la propiedad asociativa sugiere también una comprensión estructural del número basada en la descomposición y reagrupación de sumandos.

En algunas sentencias numéricas identificamos la propiedad conmutativa y la relación de compensación, aunque son escasas respecto al total de respuestas. La baja presencia de sentencias que evidencian la compensación podría atribuirse a la falta de familiarización con esta propiedad, dado que no fue estudiada antes de las sesiones de analizadas aquí. Por otro lado, aunque la propiedad del elemento neutro fue abordada en los problemas previos, no se observó en las expresiones creadas por los estudiantes.

Tabla 2. Propiedades identificadas en las sentencias numéricas inventadas

Propiedad	Sin letras	Con letras
Asociativa	$1500+2000=1000+500+2000$	$1234+a=10000+200+40+3+a$
	$1000000+7=500000+500000+7$	$80+b=a+40+40$
	$1500+4122=1000+500+4000+122$	$x+1.200+145=145+1.000+200+x$
	$1000+2500=1000+1000+1500$	$a+14=a+10+4$
	$7+24=4+7+20$	$1235+d=1000+200+30+5+d$
	$195+51=51+95+100$	$80+b=a+40+40$
	$124+12=100+24+12$	$x+1200+145=145+1000+200+x$
	$2100+300+1000=3000+400$	$x+21=20+1+x$
Conmutativa	$48+57=57+48$	$107+a=50+50+7+a$
		$a+23=23+a$
Compensación	$48+57=57+48$	$30+40+25+c=40+25+30+c$
	$100+28=26+100$	$b+32=a+31$
No se observa	$8000+9960=9950+8000$	$63+a=62+a$
	$1975+1853=1785+2043$	$309+b=390+b$
	$11=99+100$	$a+342+24+2+4=x2+3343+42+4+n+e$
	$22+44=60+6$	$16+a=86+x$
	$1970+1200=1790+1200$	$a+1+35=34+8+x$
		$27+b+17=12+b$
		$34+a+b=5+5$

Si bien en algunas sentencias numéricas no identificamos una propiedad específica, estas podrían asociarse con las relaciones de magnitud, en el sentido de que se basan en el efecto de las operaciones sobre los números y en la comparación de sus magnitudes relativas (Molina y Ambrose, 2008). Por ejemplo, en el caso de $11 = 99 + 100$, es evidente que la suma en el segundo miembro da un resultado mucho mayor que el primer miembro, lo que permitiría descartar la igualdad sin necesidad de realizar cálculos exactos.

Sobre la comprensión del signo igual, la mayoría de las sentencias, así como las posteriores intervenciones, evidencian el significado de equivalencia numérica, donde el signo igual se interpreta como un símbolo relacional que indica una relación de equilibrio entre los términos de ambos lados. Un ejemplo de esta comprensión es la respuesta de Sara¹, quien analizó la sentencia $1970 + 1200 = 1790 + 1200$:

1. Sara: Es falsa, porque en la primera sale 1970 y en la otra sale 1790, se cambian los 900 por 700.
2. Profesor: Y, ¿por qué te fijaste solamente en esos números?
3. Sara: Porque lo demás lo veo súper bien, porque 1000 está con 1000, el resto está igual, el primer número de los 1000 también, lo dos empiezan con 1000.

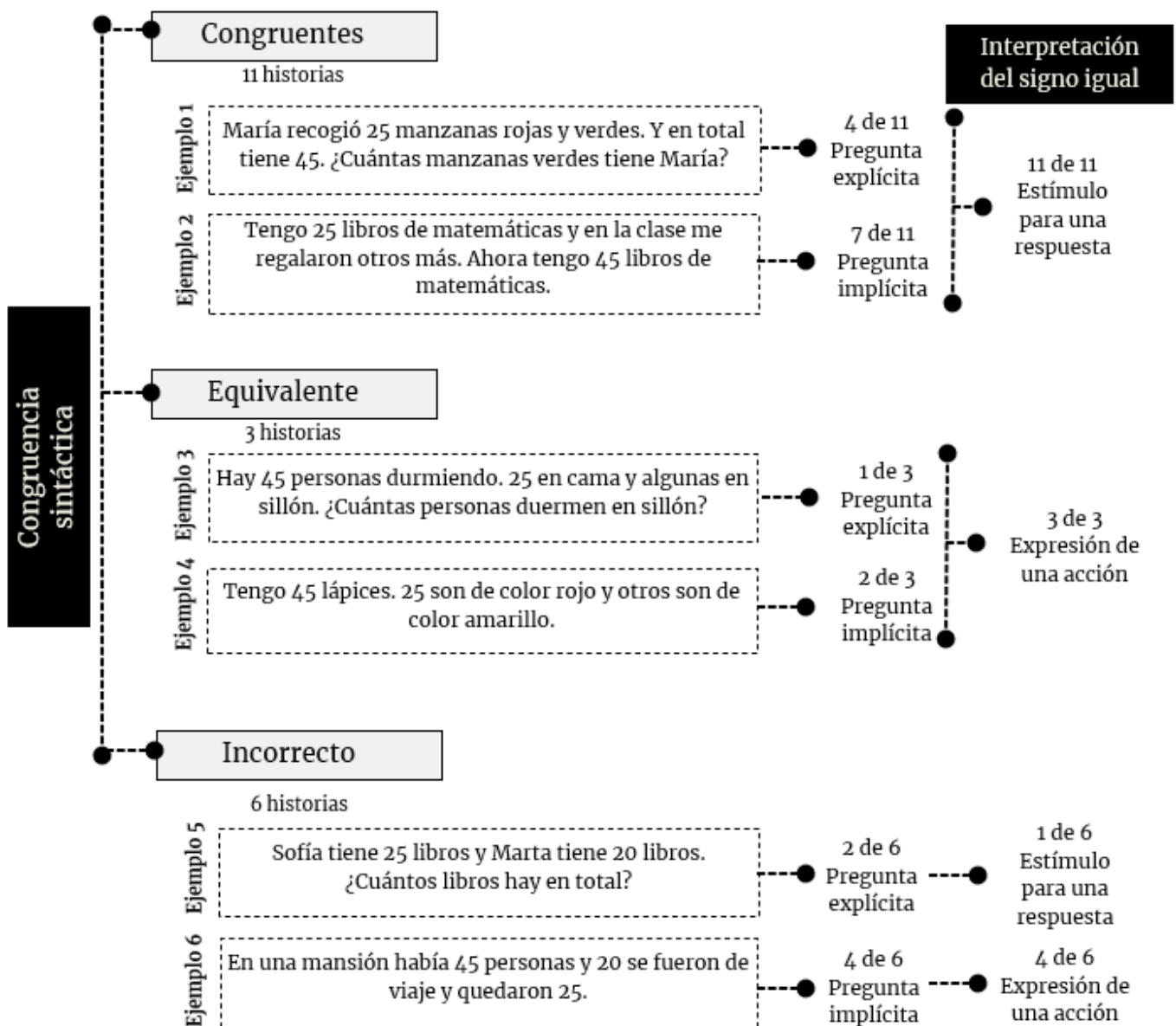
En el extracto anterior, Sara descompone los números y razona a partir de la comparación entre 1970 y 1790 (línea 1), lo que refleja una comprensión relacional de la igualdad. Este tipo de justificación muestra que algunos estudiantes comprenden que no es necesario calcular ambos lados de la igualdad para determinar su validez, sino que pueden hacerlo razonando a partir de su estructura (línea 3). Por otra

¹ Empleamos nombres ficticios para garantizar el anonimato del alumnado.

parte, identificamos una expresión que refleja el significado del signo igual como expresión de una acción: $11 = 99 + 100$. En esta expresión de equivalencia errónea, el signo igual se interpreta de manera operacional de derecha a izquierda, aceptando que el resultado del cálculo pueda estar en uno u otro miembro.

En el caso de la tarea de invención de historias matemáticas, la dimensión estructural se evalúa considerando la correspondencia entre la ecuación dada y las historias propuestas, analizando tanto su estructura sintáctica como su estructura semántica. Con respecto a la estructura sintáctica, los criterios de Duval (2006) nos permitieron clasificar las producciones de los estudiantes en tres niveles, tal como se muestra en la Figura 4.

Figura 4. Ejemplos representativos de historias inventadas



Observamos que la mayoría de las historias son congruentes con la ecuación dada, mientras que solo algunas se consideraron equivalentes al variar el orden en la ecuación que representa su estructura (como $45 = 25 + u$ o $45 = u + 25$). Finalmente, emergieron historias cuya estructura no guarda relación con la ecuación original, en las que identificamos variaciones: (a) en la operación utilizada (p. ej. “Carla compró 45 dulces y 25 paletas y las repartió entre 20 amigos, pero no sabe cuántos dulces debe dar a cada amigo.”); (b) la inclusión de información adicional (p. ej. “Tenemos un dinosaurio que tiene 25 dulces. Luego llega otro dinosaurio y le da un número indefinido de dulces. Luego los cuenta y se da cuenta que tiene 45 dulces. Y llega otro y le pide 25 y termina con 20.”); (c) o la omisión de elementos esenciales para representar la relación matemática planteada (p. ej. “En un supermercado había 25 osos de peluche y también unos peluches de gatos, pero no se sabe cuántos hay de gatos en el supermercado. También hay 45 personas que quieren saber cuánto peluches de gatos hay en el supermercado.”). Este análisis permitió identificar el nivel de correspondencia estructural que el alumnado fue capaz de establecer entre lenguaje natural y simbólico, y resultó clave para valorar cómo perciben y representan la estructura algebraica involucrada en la tarea.

En cuanto a la invención de preguntas dentro de las historias, identificamos dos tendencias principales. En una parte de las producciones, las historias no tienen una pregunta explícita, estructurándose como relatos descriptivos de situaciones matemáticas, (ver Figura 4, ejemplos 2, 4 y 6). Otra parte del grupo incorporó preguntas dentro de sus historias, estructurándolas en función de la incógnita planteada en la ecuación (ver Figura 4, ejemplos 1, 3 y 5).

En relación con los significados asociados al signo igual en las historias matemáticas, la mayoría de las respuestas reflejan el signo igual como un “estímulo para una respuesta” (ver Figura 4, ejemplos 1, 2 y 5). Este era el significado esperado si se generaba una historia congruente con la ecuación dada. En menor medida, aparecen historias que evidencian una comprensión del signo igual como “expresión de una acción” (ver Figura 4, ejemplos 3, 4 y 6). Esta segunda interpretación sugiere que parte del alumnado podría organizar las cantidades de forma flexible, lo que podría suponer un avance en la comprensión del signo igual. Sin embargo, este hallazgo resalta la necesidad de interpretar con cautela las producciones del alumnado, ya que una historia formalmente incorrecta puede evidenciar una comprensión sofisticada de otros conceptos algebraicos. En este caso, se presentan historias que, a pesar de no cumplir plenamente los criterios de congruencia estructural, reflejan una interpretación del signo igual más rica que algunas de las producciones clasificadas como congruentes.

En la Tabla 3 presentamos una clasificación de las historias matemáticas inventadas por el alumnado según su estructura semántica.

Tabla 3. Clasificación de las historias inventadas según estructura semántica identificada

Tipo de invención	N.º	Estructura semántica del problema inventado					
		Cambio de aumento		Cambio de disminución		Combinación	Otros
		In. en cantidad inicial	In. en cambio	In. en cantidad final	Sin In.	In. en una parte	
Correcta	14	3	4			7	
Incorrecta	6				1	2	1 2

*Nota. In=incógnita.

En relación con la estructura semántica identificada en las historias, en la mayoría identificamos una estructura semántica de cambio o combinación (ver Tabla 3), en concordancia con las historias presentadas en los primeros bloques de la sesión 6 (ver Figura 2). En algunas de estas historias matemáticas inventadas identificamos una adaptación a los problemas iniciales; conservaron tanto el contexto como la estructura de cambio de aumento del primer problema, mientras que otro mantuvo el contexto y la estructura de combinación del segundo. Por otro lado, en otras respuestas identificamos la presencia de un contexto completamente nuevo, manteniendo la coherencia con la ecuación dada.

4.2. Formas de referirse a las cantidades indeterminadas

En el caso de las sentencias numéricas, observamos que los estudiantes suelen usar una misma letra en ambos lados de la igualdad (p. ej., $a + 14 = a + 10 + 4$). En algunos casos, los estudiantes utilizaron dos letras distintas en una misma expresión, como en $a + 1 + 35 = 34 + 8 + x$, aunque esto es menos común. La posición de las letras suele ubicarse al inicio de la expresión o en el lado izquierdo de la igualdad, mientras que en menos ocasiones se encuentran distribuidas en ambos lados.

Observamos casos en los que el estudiantado interpretó las letras como cantidades desconocidas y operó con ellas como si las conocieran. Comprendieron que la veracidad de una ecuación depende de los valores asignados a las variables, lo cual ejemplificamos en un fragmento de la sesión en el que se discute sobre la veracidad de la expresión $29 + a = 30 + b$, que mostramos a continuación.

4. José: Yo opino que es falso porque, aunque los números son cercanos, las letras no son iguales y los números tampoco, así que es falso.

5. Profesor: ¿Estás de acuerdo, Hugo?

6. Hugo: Sí estoy de acuerdo, porque está todo... así como diferente. Entonces... al estar diferente le pasa eso. Aunque si la a o la b fueran la misma, igual sería falsa porque el 29 y el 30 no son iguales.

7. Profesor: ¿Qué dices, Alonso?

8. Alonso: Depende de cuánto valga el número. Por ejemplo, si la a vale uno más que b , entonces sería verdadera. Pero como no sabemos, yo puse que es falsa, aunque puede estar bien.

Observamos que los niños establecieron una equivalencia entre las expresiones en términos generales. José y Hugo argumentaron que es falsa, estableciendo relaciones entre los términos de cada expresión. Las siguientes intervenciones (líneas 6 y 8) son más precisas, al cuestionar cuáles son los valores de las cantidades desconocidas: Hugo reconoce la posibilidad de que las letras tengan el mismo valor pese a ser diferentes y Alonso considera que puedan diferir en una unidad, permitiendo que la sentencia sea verdadera

En el caso de las historias matemáticas inventadas, todos los estudiantes que respondieron correctamente se refirieron a cantidades indeterminadas. A diferencia de la tarea previa, en este caso el desafío estaba en expresar el significado de la cantidad desconocida en un contexto cotidiano. Los estudiantes emplearon diferentes expresiones, tales como: “no sabe cuántos tiene”, “un número indefinido de”, “otros”, “algunos”, “una” y “hartos [muchos]”. Previamente —en las sesiones de trabajo— habíamos explicado que las letras representaban un número que no conocemos y las palabras clave empleadas en los problemas propuestos fueron “otras”, “algunas” y “muchas”. La ampliación de esta lista de palabras demuestra que el alumnado comprendió el significado y usó otros términos igualmente válidos.

La invención de historias y la justificación de su coherencia permitió describir la comprensión de las cantidades indeterminadas. Un ejemplo de historia es la inventada por Lucas: “Tengo una caja con 45 queques [magdalenas]. Unos de vainilla y 25 de chocolate. ¿Cuántos queques de vainilla tengo?”. A Martín le preguntamos si la historia que inventó Lucas contaba lo mismo que la ecuación. Él dijo que sí. En su argumento, reconoció que la letra debía estar asociada a un número desconocido: “trae el número que no sabemos, que es la u , trae el 25 y el 45 que son los números que conocemos”.

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

5.1. Conocimientos algebraicos evidenciados en la invención de sentencias numéricas e historias matemáticas

Una de las contribuciones de este trabajo es ampliar las formas de acceso al conocimiento algebraico en estudiantes de educación primaria —tradicionalmente abordado desde la resolución de problemas—, y extender la investigación sobre la invención de problemas algebraicos, la cual se ha centrado principalmente en la educación secundaria (por ejemplo, Cañadas et al., 2018; Wilkie, 2024).

En concreto, analizamos el conocimiento algebraico de los estudiantes desde las dimensiones estructural y analítica (Kieran, 2022). El abordaje conjunto de ambas dimensiones para analizar las respuestas constituye otra contribución original del estudio, dado que en investigaciones previas se habían considerado de manera separada y nos permite comprender con mayor profundidad las ideas algebraicas

vinculadas a cada contenido abordado. Desde la dimensión estructural, las respuestas evidencian diferentes saberes algebraicos en cada una de las tareas de invención, lo que refleja diversidad en la interpretación y en los niveles de comprensión. Por ejemplo, en el caso de las sentencias numéricas, evidenciamos el uso de propiedades aritméticas, en particular la asociativa. Sin embargo, la escasa presencia de la propiedad de compensación y la ausencia de la propiedad del elemento neutro sugieren que estas propiedades requieren un tratamiento didáctico más específico. Esto coincide con estudios previos (Molina y Ambrose, 2008), que indican que ciertas propiedades matemáticas pueden no emerger espontáneamente en los estudiantes, sino que requieren experiencias de instrucción explícita. Asimismo, la comprensión del signo igual sugiere un predominio de la interpretación relacional, en la que los estudiantes reconocen la igualdad como relación de equivalencia. Esto es relevante, ya que estudios previos identifican la interpretación operacional como un obstáculo para el desarrollo del pensamiento algebraico (Molina y Ambrose, 2008).

En el caso de las tareas sobre invención de historias matemáticas, el análisis de la dimensión estructural desde una doble perspectiva —sintáctica y semántica— permitió comprender cómo el alumnado otorga significado a las expresiones algebraicas, al vincularlas con contextos narrativos cotidianos. La capacidad de expresar cantidades indeterminadas en historias matemáticas sugiere que el uso de contextos narrativos puede ser una estrategia efectiva para favorecer la transición desde el pensamiento aritmético hacia el algebraico. Desde el plano sintáctico, la clasificación basada en los criterios de Duval (2006) fue útil para clasificar las historias según su nivel de congruencia con la ecuación dada. Esta tipología evidenció que la mayoría de las historias fueron congruentes o equivalentes, lo que sugiere que los estudiantes lograron establecer relaciones estructuradas entre el lenguaje simbólico y el lenguaje natural, aun cuando algunas reorganizaciones afectaron a la forma sin comprometer el fondo. Estas producciones reflejan formas iniciales de reconocimiento estructural que son fundamentales para el desarrollo del pensamiento algebraico. En cuanto a la estructura semántica, los participantes crearon historias coherentes con la ecuación dada y propusieron principalmente historias aditivas de cambio creciente y de combinación (Carpenter y Mosser, 1983), siguiendo las estructuras semánticas de los problemas previamente resueltos. Esta consistencia sugiere que los estudiantes utilizan esquemas semánticos familiares para dar sentido a las ecuaciones, lo que refuerza la importancia de trabajar con una diversidad de estructuras semánticas en la enseñanza del álgebra inicial.

En relación con la comprensión del signo igual, en la tarea de inventar historias, la riqueza de significados estuvo condicionada por la ecuación propuesta. Si bien predominó una interpretación operacional, también emergieron historias que revelan comprensiones más relacionales. Estas historias relacionales fueron clasificadas como equivalentes o incluso incorrectas en términos de su congruencia sintáctica. Este hallazgo subraya la necesidad de interpretar con cautela las producciones del alumnado: una historia que no cumple completamente con los criterios de congruencia puede, sin embargo, evidenciar una comprensión algebraica sofisticada del significado del signo igual. No obstante, es importante matizar el alcance

de los hallazgos asociados a la invención de historias: en este estudio solo se trabajó con un tipo de ecuación ($25 + u = 45$), lo que limita la posibilidad de generalizar los resultados.

Sobre la dimensión analítica, los resultados muestran que los estudiantes atribuyen distintos significados a las cantidades indeterminadas y las emplean de distintos modos, dependiendo de la tarea o contexto involucrado. Esto coincide con la amplia investigación que refuta la creencia de que los estudiantes de primaria no son capaces de interactuar con lo indeterminado (incluyendo el uso de letras) para expresar sus ideas (Blanton et al., 2018). En el caso de las sentencias numéricas inventadas, estas permitieron expresar estas cantidades mediante la notación algebraica, mientras que las historias matemáticas requerían el uso del lenguaje cotidiano. La invención de sentencias evidencia que el alumnado aceptó el uso de la letra para expresar de modo general las propiedades de la adición. En la invención de historias, a diferencia de la tarea anterior, observamos cómo interpretaron y relacionaron cantidades desconocidas con contextos cotidianos, utilizando diversos marcadores textuales. La variedad de expresiones en lenguaje natural sugiere una comprensión intuitiva de las cantidades indeterminadas y su generalización más allá de los ejemplos previos, reforzando el valor de los contextos narrativos para el desarrollo del pensamiento algebraico en educación primaria.

5.2. Potencialidades de las tareas de invención para el desarrollo del pensamiento algebraico

Las respuestas del grupo de estudiantes muestran que, independientemente del tipo de tarea, fueron capaces de razonar sobre estructuras matemáticas y trabajar con cantidades indeterminadas. Este hallazgo reafirma el valor de la invención de problemas como estrategia para la identificación y generalización de relaciones algebraicas (Báró, 2023; Molina, 2006) y se suma a una creciente literatura que destaca su utilidad para hacer visible el conocimiento conceptual del alumnado (Cai y Hwang, 2020).

La invención de sentencias numéricas —con y sin letras— permitió a los estudiantes interactuar simultáneamente con propiedades aritméticas, la noción de igualdad y el uso de cantidades desconocidas. Estas tareas favorecen una comprensión relacional del signo igual y promueven el uso flexible de notación simbólica para representar generalizaciones. Por su parte, las historias matemáticas ofrecieron un espacio para traducir expresiones algebraicas al lenguaje natural y contextualizado, fortaleciendo la conexión entre estructuras simbólicas y situaciones significativas para los estudiantes.

5.3. Implicaciones para la docencia, proyecciones y limitaciones que se desprenden del estudio

Desde una perspectiva didáctica, los hallazgos de este estudio destacan la importancia de diseñar experiencias de aprendizaje que promuevan la invención de problemas como una estrategia para favorecer el desarrollo del pensamiento algebraico. Dado el carácter exploratorio de este estudio, reconocemos que la invención

de problemas requiere ir más allá del análisis de la respuesta escrita del estudiante. Es necesario prestar especial atención a cómo los estudiantes representan sus ideas algebraicas, argumentan sobre ellas y razonan en torno a las regularidades que identifican, tanto de manera individual como colectiva. En este sentido, resulta conveniente implementar tareas de invención no solo de forma individual, sino también en grupos pequeños y medianos, con el fin de potenciar diversas formas de participación y promover la construcción colectiva del conocimiento.

Aunque nuestro estudio se centró en dos contenidos algebraicos —ecuaciones y aritmética generalizada—, una de sus limitaciones es que no analiza las tareas de invención de manera simultánea ni aborda otros contenidos propios del álgebra escolar, como las funciones o los patrones. La relación entre diferentes tareas y la inclusión de otros contenidos permitiría avanzar hacia una comprensión más integral del pensamiento algebraico en contextos de invención de problemas.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación se enmarca en los proyectos: FOVI240238, financiado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID) del Gobierno de Chile, y Proyectos PID2020-113601GB-I00 y PID2024-157106NB-I00, financiados por la Agencia Estatal de Investigación de España (MCIN/AEI/10.13039/501100011033)

REFERENCIAS

- Báro, E. (2023). Exploring students' algebraic thinking through problem-posing activities. En I. Papadopoulos & N. Patsiala (Eds.), *Proceedings of the 22nd conference on Problem Solving in Mathematics Education – ProMath 2022* (pp. 165-178). Faculty of Education, Aristotle University of Thessaloniki.
- Blanton, M., Brizuela, B., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A., Stroud, R., Fonger, N., & Stylianou, D. (2018). Implementing a framework for early algebra. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (pp. 27-49). Springer.
- Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102, 101391. <https://doi.org/10.1016/J.IJER.2019.01.001>
- Cañadas, M. C., Molina, M., & del Río, A. (2018). Meanings given to algebraic symbolism in problem-posing. *Educational Studies in Mathematics*, 98(1), 19-37. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9797-9>
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.
- Carpenter, T., & Mosser, J. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics: concepts and processes* (pp. 7-44). Academic Press.
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM – Mathematics Education*, 37(3), 149-158. <https://doi.org/10.1007/s11858-005-0004-6>

- Duval, R. (2006). Cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103-131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Fernández-Millán, E., & Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las Ciencias*, 34(1), 53-71. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1455>
- Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM – Mathematics Education*, 54(6), 1131-1150. <https://doi.org/10.1007/S11858-022-01435-6/FIGURES/4>
- León, O., & Montero, I. (1998). *Diseño de investigaciones*. Mcgraw Hill.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Educación Primaria* [Tesis Doctoral sin publicar]. Universidad de Granada.
- Molina, M. (2021). Investigación de diseño educativa: un marco metodológico en evolución. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo, & D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 83-97). SEIEM.
- Molina, M., & Ambrose, R. (2008). From an operational to a relational conception of the equal sign: Third graders' developing algebraic thinking. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 30(1), 61-80.
- Molina, M., & Cañadas, M. C. (2018). La noción de estructura en early algebra. En P. Flores, J. L. Lupiáñez, & I. Segovia (Eds.), *Enseñar matemáticas, homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 129-141). Atrio.
- Pinto, E., Ayala-Altamirano, C., Molina, M., & Cañadas, M. C. (2023). Desarrollo del pensamiento algebraico a través de la justificación en educación primaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 41(1), 149-173. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5835>
- Radford, L. (2022). Introducing equations in early algebra. *ZDM – Mathematics Education*, 54(6), 1151-1167. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01422-x>
- Ruthven, K. (2020). Problematising learning to teach through mathematical problem posing. *International Journal of Educational Research*, 102, 101455. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.07.004>
- Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing. En P. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518-525). Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Walkoe, J., Walton, M., & Levin, M. (2022). Supporting teacher noticing of moments of algebraic potential. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 32(3), 271-286. <https://doi.org/10.29275/jerm.2022.32.3.271>
- Wilkie, K. J. (2024). Creative thinking for learning algebra: Year 10 students' problem solving and problem posing with quadratic figural patterns. *Thinking Skills and Creativity*, 52, 101550. <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2024.101550>

∞

Eder Pinto

Universidad de O'Higgins (Chile)

eder.pinto@uoh.cl | <https://orcid.org/0000-0003-1911-4158>

Cristina Ayala-Altamirano

Universidad de Málaga (España)

cristina.ayala@uma.es | <https://orcid.org/0000-0002-9165-9470>

Marta Molina

Universidad de Salamanca (España)

martamolina@usal.es | <https://orcid.org/0000-0002-1213-6162>

María C. Cañadas

Universidad de Granada (España)

mconsu@ugr.es | <https://orcid.org/0000-0001-5703-2335>

Recibido: 29 de noviembre de 2024

Aceptado: 9 de julio de 2025

Inventing Numerical Sentences and Stories to Evidence the Development of Algebraic Thinking

Eder Pinto @ ¹, Cristina Ayala-Altamirano @ ², Marta Molina @ ³,
María C. Cañadas @ ⁴

¹ Universidad de O'Higgins (Chile)

² Universidad de Málaga (España)

³ Universidad de Salamanca (España)

⁴ Universidad de Granada (España)

Problem posing is recognised as an authentic mathematical activity and a valuable opportunity to access students' mathematical thinking across educational levels (Cai & Hwang, 2020). Although previous research has highlighted the importance of attending to students' ideas to foster deeper learning (Walkoe et al., 2022), the specific contribution of problem posing tasks—particularly in early algebra—remains underexplored. This article examines the algebraic thinking of 9–10-year-old students when engaging in two problem posing tasks: inventing numerical sentences and inventing mathematical stories based on given equations. We aim to investigate the types of algebraic knowledge that emerge from these tasks and to reflect on their potential to support algebraic thinking from both structural and analytical dimensions (Kieran, 2022).

Adopting a design-based research approach, the study involved 21 Chilean students who had completed 4th year of primary school. Across ten virtual sessions focused on algebraic problem-solving, students engaged in three targeted problem posing tasks. These included the creation of numerical sentences and equalities—both with and without unknowns—and the invention of contextualised stories based on symbolic equations. Data sources included video recordings, transcriptions, and students' written responses.

Content analysis guided by established theoretical frameworks identified students' use of arithmetic properties (mainly associativity and commutativity), relational understandings of the equal sign, and ways of expressing unknown quantities. The structural dimension was evident in students' ability to decompose and reorganise expressions and justify equivalence without relying solely on computation. In mathematical stories, structural understanding was assessed by the congruence between students' stories and the given equations, analysed through syntactic and semantic lenses.

The analytical dimension emerged when students treated unknowns as known quantities, reasoning about them through symbolic notation or natural language. Their interpretations of variables included informal markers such as “some,” “a lot,” or “a number we don't know,” demonstrating flexibility in transitioning between symbolic and narrative representations.

Findings highlight the dual potential of these tasks. Inventing numerical sentences supported generalisation and manipulation of expressions, while mathematical stories enabled students to contextualise algebraic structures meaningfully. Both tasks provided insight into students' evolving conceptions of the equal sign and their ability to reason with indeterminate quantities. Importantly, the study shows that young learners are capable of engaging meaningfully with core algebraic ideas when tasks are thoughtfully designed.

This research contributes to the growing body of literature on early algebra and underscores the value of integrating problem posing tasks into primary mathematics instruction. It suggests directions for further research and curriculum development that consider the complementary roles of symbolic manipulation and contextual understanding in the development of algebraic thinking.