

Formulación de problemas matemáticos en la formación del profesorado de Secundaria. Aportaciones del uso de GeoGebra

*Problem Posing in Pre-service Secondary Mathematics Teacher Education:
Insights of using GeoGebra*

Alexánder Hernández Hernández @ , Aitana Martín Ferraz @ ,
Matías Camacho Machín @ 

Universidad de La Laguna (España)

Resumen ∞ Esta investigación analiza cómo el uso de GeoGebra fortalece la capacidad de futuros profesores para reformular problemas. Se utilizó una metodología cualitativa basada en el uso de cuatro fases para el proceso de formulación (orientación, conexión, generación y reflexión), y las categorías establecidas por Baumanns: reformular para resolver el problema y para indagar o investigar; formular para generar nuevos problemas o para diseñarlos con fines didácticos. Los resultados muestran que GeoGebra desempeñó un papel clave, principalmente en la fase de conexión, y permitió evaluar ideas previas y comprobar la viabilidad de los problemas planteados por los participantes. Además, la visualización y las aproximaciones dinámicas influyeron tanto en la reformulación como en la formulación de nuevos problemas.

Palabras clave ∞ Formulación de problemas; Resolución de problemas; Formación de profesorado; GeoGebra

Abstract ∞ This research analyzes how the use of GeoGebra strengthens future teachers' ability to reformulate problems. A qualitative analysis is applied, based on four phases of the problem formulation process (orientation, connection, generation and reflection), along with the categories established by Baumanns: reformulating to solve the problem and to inquire or investigate; formulating to generate new problems or to design them for didactic purposes. The results show that GeoGebra enabled participants to evaluate prior ideas and assess the feasibility of the problems they proposed. Additionally, visualization and dynamic approaches influenced both the reformulation and the formulation of new problems.

Keywords ∞ Problem-posing; Problem-solving; Teacher Education; GeoGebra

Hernández, A., Martín-Ferraz, A., & Camacho-Machín, M. (2025). Formulación de problemas matemáticos en la formación del profesorado de Secundaria. Aportaciones del uso de GeoGebra. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática*, 28, 117-141. <https://doi.org/10.35763/aiem28.7550>

1. INTRODUCCIÓN

Hace ya diez años que Cai et al. (2015), plantearon varias preguntas de interés para avanzar en la investigación en el ámbito de la formulación de problemas¹. Una de ellas propone analizar el rol de la tecnología en el ámbito. En aquel momento, señalaron cómo su uso contribuye a extender la resolución de problemas, especialmente, para generar nuevas preguntas que surgen en la exploración. Nuestra experiencia, que involucra a la formación del profesorado de Educación Secundaria, ha puesto de manifiesto que las afirmaciones hechas por Cai et al. (2015) se pueden considerar válidas. Hemos reportado cómo el uso del Sistema de Geometría Dinámica (SGD) GeoGebra, contribuye al planteamiento de preguntas que llevan a aproximarse a la solución de problemas. Las relaciones matemáticas que emergen durante el desarrollo de actividades centradas en la resolución de problemas son más diversas y enriquecedoras que en los casos de lápiz y papel (Camacho-Machín et al., 2019; Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2013). Esto nos ha llevado a conjeturar que esta misma diversidad y ampliación de posibilidades se podría conseguir con el desarrollo de actividades dirigidas a la formulación de problemas matemáticos (Hernández et al., 2023).

Esta hipótesis está apoyada por estudios que señalan que la utilización de herramientas digitales, como GeoGebra, se presenta como una oportunidad para enriquecer las estrategias didácticas del profesorado a la hora de formular problemas matemáticos (Santos-Trigo, 2024). En este contexto, la formación inicial del profesorado de matemáticas es clave, ya que los futuros docentes deben ser conscientes de las oportunidades que les ofrece la tecnología y deben estar preparados para integrarla en sus prácticas pedagógicas. Según Santos-Trigo (2024):

El profesorado necesita experimentar por sí mismo diferentes formas de usar las tecnologías digitales para trabajar tareas matemáticas e identificar estrategias de enseñanza que permitan a sus estudiantes interiorizar el uso de aplicaciones digitales como un instrumento para comprender conceptos y para planear y formular problemas matemáticos. (p. 219)

Esta investigación analiza una serie de problemas formulados por profesores de matemáticas de Educación Secundaria en formación. Los problemas propuestos por los estudiantes surgieron de una actividad centrada en la formulación de problemas matemáticos, precedida por la resolución de dos situaciones en las que se requería utilizar una aproximación dinámica utilizando GeoGebra.

2. MARCO CONCEPTUAL

El marco conceptual se estructura en torno a las siguientes preguntas: ¿Qué entendemos por problema matemático? ¿Qué aspectos involucra la actividad de formulación de problemas? ¿Cuáles son los aspectos más relevantes cuando se resuelven y formulan problemas con herramientas digitales?

Para abordar estas cuestiones se adopta un enfoque en el cual la resolución de problemas se concibe como un eje central de las actividades de enseñanza y

¹ Problem posing.

aprendizaje de las matemáticas. En esta perspectiva, Santos-Trigo et al. (2022) señalan que la concepción de la enseñanza basada en la resolución de problemas:

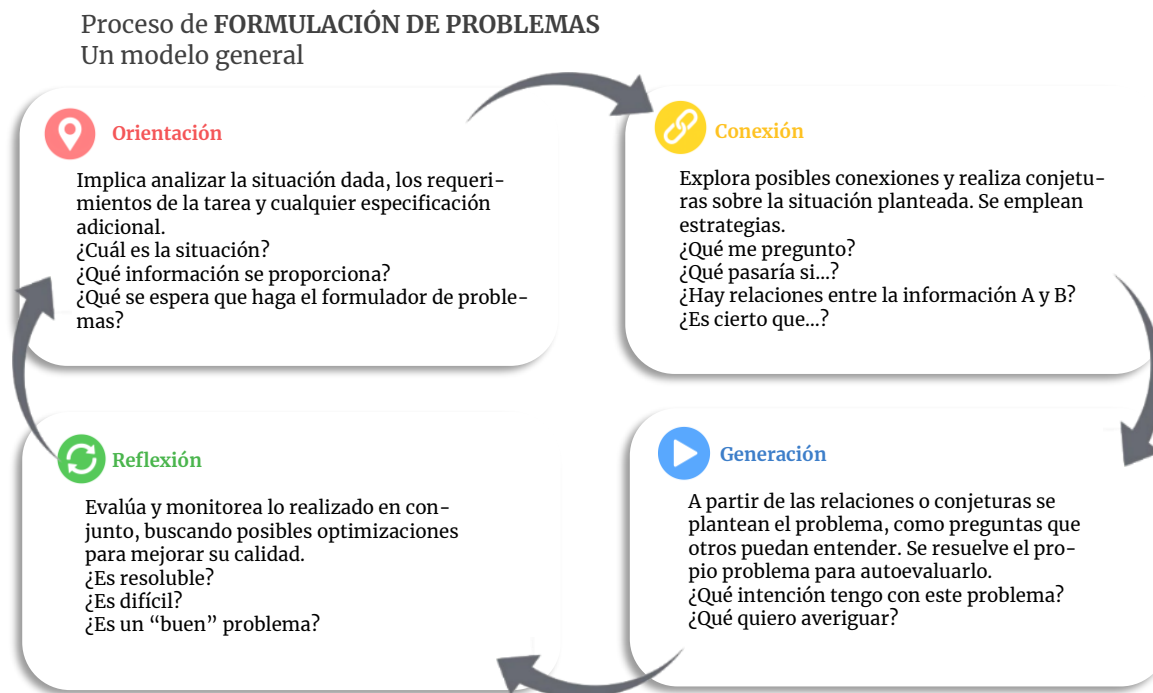
Se basa en conceptualizar la disciplina como un conjunto de dilemas que los estudiantes deben aclarar y resolver en términos del uso de conceptos matemáticos, recursos y estrategias. Por lo tanto, se alienta a los estudiantes a que continuamente planteen y persigan preguntas como medio para profundizar en los conceptos y resolver problemas. (p. 32)

2.1. Concepción de problema matemático y proceso de formulación

El término de problema matemático puede abordarse desde distintas perspectivas dependiendo del contexto y del individuo que lo afronta. Schoenfeld (1985) señala que una tarea es percibida como un problema cuando representa un desafío para quien la resuelve; de lo contrario, se considera un ejercicio rutinario. Este enfoque subraya la importancia del contexto y la experiencia personal en la percepción de una tarea como problema. Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) señalan que la introducción de herramientas digitales puede modificar el contexto de un ejercicio rutinario, convirtiéndolo en un conjunto de actividades que lo amplían hasta transformarlo en un problema. De acuerdo con Santos-Trigo (2014), un problema matemático puede caracterizarse por: la ausencia de una solución inmediata, es decir, que no se dispone de un procedimiento o regla previamente identificada que garantice la obtención de la respuesta; la posibilidad de múltiples aproximaciones a su solución, desde perspectivas algebraicas, geométricas, numéricas, dinámicas, entre otras; la existencia de interés, donde una persona o un grupo manifiesta la necesidad de encontrar una solución; y un conjunto de acciones dirigidas a su resolución.

En síntesis, la concepción de problema matemático está ligada al proceso de su resolución por parte de un individuo o colectivo. En esta investigación, consideramos una analogía en el proceso de formulación, es decir, se busca un problema matemático que no sea identificable como tarea rutinaria; que permita aproximaciones desde diversas perspectivas para fomentar la indagación matemática; que haya un interés por parte de una persona o un grupo para plantearlo; y que exista un conjunto de acciones dirigidas a su formulación.

Un análisis sobre los procesos de formulación de problemas matemáticos en revistas de alto impacto realizado por Cai y Rott (2024) permitió identificar que, al contrario que para el proceso de resolución de problemas (Mason et al., 1982; Pólya, 1945; Schoenfeld, 1985), no hay un consenso en lo que se refiere al proceso de formulación. Una de las propuestas que proporciona un marco estructurado, divide el proceso en las etapas de selección, transformación, asociación y reflexión, enfatizando la importancia de la metacognición y la flexibilidad en el proceso (Cruz, 2006). Esta propuesta influyó directamente en el modelo general que proponen Cai y Rott (2024), quienes, realizando una analogía a la propuesta de Polya (1945) para la resolución de problemas, estructuran el proceso de formulación en un modelo dividido en cuatro fases: *orientación*, *conexión*, *generación* y *reflexión* (Figura 1).

Figura 1. Proceso general de formulación de problemas Cai y Rott (2024)

La *orientación* hace referencia a la comprensión de la tarea, que se divide en: (1) la situación presentada que daría un contexto, (2) las instrucciones concretas para formular. Durante la fase de *conexión*, se organiza la información recibida y se buscan relaciones o conjeturas que permitan idear un problema. Lo que ocurre en estas fases, así como al principio de la siguiente, se relaciona con procesos cognitivos que no tienen por qué dejar evidencias. Es durante la fase de *generación*, donde se presenta la primera evidencia clara: el problema planteado de la manera solicitada y para que lo puedan entender otros, en esta fase también pueden aparecer pruebas de acercamiento a la solución. La última fase, es el momento de reflexión sobre el proceso realizado y el producto obtenido.

Para ilustrar este proceso, tomemos un ejemplo propuesto a estudiantes del grado en Educación Primaria (Figura 2).

Figura 2. Ejemplo de actividad extraído de García-Alonso et al. (2022)

Actividad 1. Formular tres problemas, de diferente dificultad, en los que aparezcan los números $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{8}$. Cada uno de estos números puede ser un dato o una solución. Puedes añadir cualquier tipo de información (numérica, de contexto...).

Se comienza con la fase de *orientación* en la que hay que reconocer: (1) el contexto, que los números $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{8}$ formen parte del enunciado o su solución; y (2) las instrucciones, escribir tres problemas de diferente dificultad, pudiendo añadir otra información. Luego, durante la fase de *conexión*, hay que darse cuenta de la

posibilidad de usar los números como fracciones de un total. Esta relación parte-todo puede aplicarse considerando que, al conocer el total, es posible determinar la parte y viceversa. Una respuesta reportada en García-Alonso et al. (2022) ilustra ambas posibilidades dentro del mismo problema formulado por el estudiante (Figura 3).

Figura 3. Enunciado propuesto por un estudiante

Problema 1.

Antonio tiene 50 años. Pedro, su hijo, tiene $\frac{1}{4}$ la edad de su padre.
¿Cuántos años tiene Pedro? La edad de Pedro es $\frac{3}{8}$ la edad de su tía
Ariadna. ¿Cuántos años tiene Ariadna?

Nota: Antonio tiene 50 años. Pedro, su hijo, tiene $\frac{1}{4}$ la edad de su padre. ¿Cuántos años tiene Pedro? La edad de Pedro es $\frac{3}{8}$ la edad de su tía Ariadna. ¿Cuántos años tiene Ariadna?

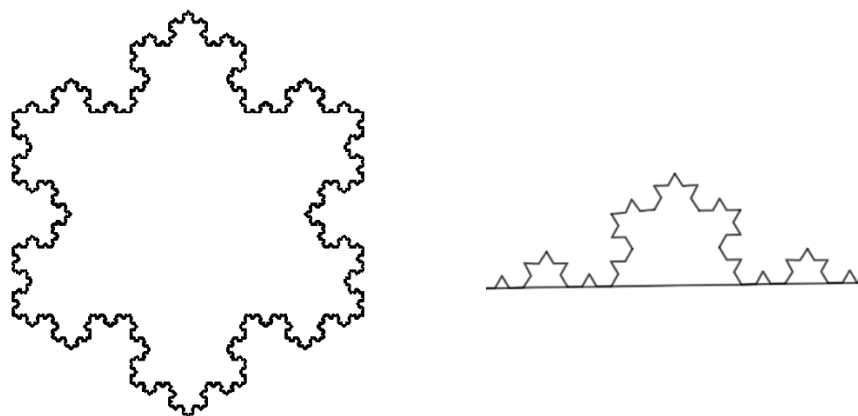
Transformar las ideas consideradas y elaborar el enunciado del problema formulado marcan el comienzo de la fase de *generación*. Verificar si es plausible y adecuado para el público al que va dirigido, son tareas que surgen durante esta fase. Finalmente, durante la fase de *reflexión*, el o la futura maestra debería revisar los tres problemas propuestos, verificando si son resolubles y si tienen una dificultad creciente. Además, al ser una tarea de indagación matemática, pueden surgir otras reflexiones: ¿Podría repetir el proceso y generar otros problemas? ¿Qué hay que tener en cuenta para nivelar la dificultad de situaciones donde intervengan fracciones? ¿Qué significado de fracción he utilizado?

Este modelo general se ha tenido en cuenta para el análisis de los datos y ha permitido organizar el trabajo de los participantes en torno a las diferentes fases. Asimismo, ha facilitado una mirada crítica sobre la investigación, desde la perspectiva general que dicho modelo propone.

2.2. Actividad de formulación de problemas

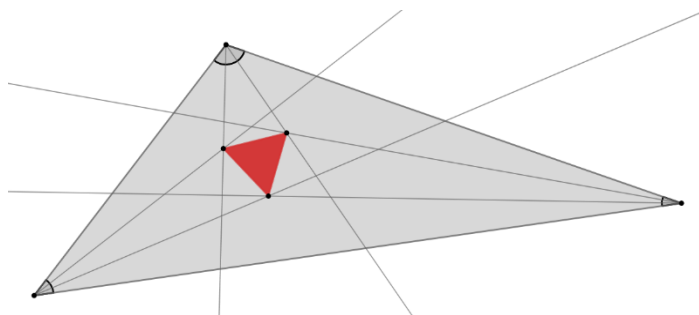
Desde un punto de vista de la actividad de formulación de problemas, Baumanns (2022, pp. 35–66) propone cuatro categorías no disjuntas para clasificar las situaciones que dan lugar a que personas o grupos de personas consigan:

Reformular un problema dado para resolverlo. Comprende las prácticas en las que se simplifica un problema dado para hacerlo más accesible y encontrar una vía para su solución. Esta forma de proceder recoge la heurística de plantear un problema auxiliar dentro de la resolución de problemas (Pólya, 1945; Schoenfeld, 1985). Por ejemplo, supongamos que se desea obtener el área de un copo de nieve (Figura 4a), que está delimitado por tres curvas de Koch construidas sobre los lados de un triángulo equilátero en su sexta iteración. Un camino para la resolución del problema es plantear un caso más simple, por ejemplo, ¿cuál es el área bajo la curva de Koch en la tercera iteración sobre uno de los lados del triángulo? (Figura 4b).

Figura 4. (a) Copo de nieve de Koch (b) Curva de Koch (3ª iteración)

Reformular un problema para indagar. Se relaciona con la transformación de un problema ya resuelto para estudiar relaciones matemáticas más amplias. Esta acción ha sido estudiada desde otros marcos teóricos, al reconocerse como parte de la indagación matemática mediante tareas en las que el alumnado participa en un Proyecto de Investigación Matemática (Gómez-Chacón y de la Fuente, 2018), partiendo de un problema y siguiendo un proceso guiado por el profesorado.

Por ejemplo, dado un triángulo cualquiera, se tiene que las trisecciones de sus ángulos dan lugar a un hexágono. El Teorema de Morley garantiza que los puntos obtenidos mediante las trisecciones adyacentes a los lados del triángulo dado, forman un triángulo equilátero (Figura 5).

Figura 5. Caso particular para el Teorema de Morley

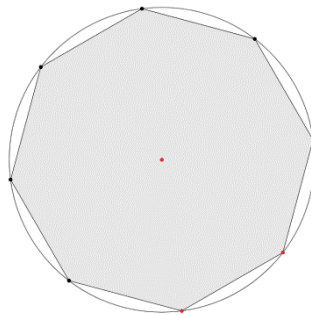
Algunas preguntas para la indagación matemática serían: ¿Existe una relación constante entre el área del hexágono y el área del triángulo original? ¿Qué problemas podemos formular si se construyen segmentos que unan los vértices opuestos con las trisecciones de los lados?, ¿Y si dividimos los lados en más partes iguales?

Generar nuevos problemas. Se refiere a la creación de problemas partiendo de una situación abierta y de instrucciones que permitan un gran grado de libertad. Ayllón et al. (2016) observaron que la invención de problemas permite evidenciar el conocimiento matemático. En su caso, estudiantes de primaria mostraron la

comprensión sobre el significado y uso de operaciones aritméticas. Las propuestas de problemas eran genuinas, ya que eran elaboradas únicamente poniendo en marcha sus propios conocimientos (Ayllón et al., 2011).

Por ejemplo, partimos de una construcción dinámica con un círculo y un octógono regular inscrito (Figura 6) para, posteriormente, formular problemas a partir de este recurso: (1) Si se inscribe un cuadrado dentro del mismo círculo ¿qué relación existe entre el área de los dos polígonos regulares? (2) Sabiendo que el círculo es de un metro de diámetro ¿a qué distancias se encuentra uno de los vértices de los otros siete? (3) ¿Se puede inscribir en el octógono otro polígono regular? ¿Cómo?

Figura 6. Octógono regular inscrito en un círculo



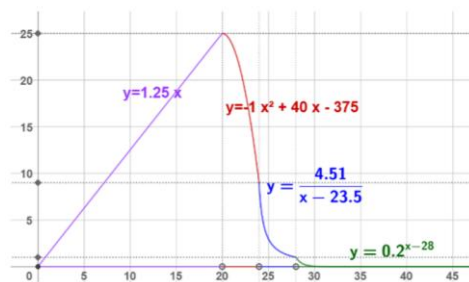
Construir tareas para otros. Se asocia a la práctica docente y al diseño de problemas con un objetivo didáctico o concebida para guiar el aprendizaje de estudiantes. Este tipo de actividades se ha estudiado como parte de la competencia profesional en formulación de problemas escolares para la formación inicial de docentes de primaria (Chico et al., 2022). Se ha comprobado que, en tareas donde es necesario explicar la intención didáctica de los problemas formulados, dicha intención se relaciona con: el enfoque en aspectos del contenido, la variación de la complejidad, la facilitación de la comprensión del enunciado del problema y la evaluación de la comprensión (Montes et al., 2024).

Un objetivo didáctico para un docente podría ser trabajar funciones que presenten una relación entre magnitudes reconocibles por el alumnado, para que conecte tres representaciones (tabla de valores, gráfica y expresión algebraica). Para ello, propone analizar una trayectoria, de manera que se pueda explorar haciendo uso de GeoGebra visualizando las distintas representaciones simultáneamente (Figura 7).

Figura 7. Problema y construcción dinámica para su exploración.

La trayectoria prevista tendrá el siguiente itinerario:

- Ascenderá en globo hasta los 25 000 metros, a velocidad constante durante 20 min.
- Se lanzará desde allí. Y empezará a descender de forma parabólica durante 4 min. Hasta los 9 000 metros, entonces desplegará las alas.
- Ira bajando “suavemente” durante otros 4 minutos, de forma que la altura será inversamente proporcional al tiempo hasta los 1000 m.
- Abrirá el paracaídas que hará que la altura se reduzca un 20 % por minuto, y una hora después estará pisando tierra.



Bajo nuestro punto de vista, las categorías consideradas por Baumanns (2022) y el modelo general de Cai y Rott (2024) se complementan. Baumanns nos permite tener una visión de la formulación de problemas como una actividad matemática y el proceso general propuesto por Cai y Rott (2024) nos permite fijar la atención desde una perspectiva cognitiva. Además, la manera en que alguien interprete el contexto y las instrucciones de una tarea de formulación durante las fases de *orientación* y *conexión* influirá en si se involucra en un tipo de actividad u otra.

2.3. Uso de herramientas digitales

Partimos de un enfoque de indagación matemática² que propone Santos-Trigo et al. (2022, pp. 30–32), en el que la introducción de la tecnología en el proceso de resolución de problemas ha sido fuente de investigaciones para analizar las oportunidades que ofrece dicho enfoque. Jacinto y Carreira (2017, p. 1121) proponen caracterizar la resolución de problemas matemáticos con herramientas digitales mediante diez procesos subyacentes. Además, introducen el concepto de fluidez tecno-matemática que surge de la interacción entre el conocimiento matemático y tecnológico, y su aplicación conjunta en contextos educativos.

El concepto de fluidez tecno-matemática abarca el conocimiento de las matemáticas (hechos, reglas, procedimientos), el conocimiento de la tecnología (cómo funciona una herramienta específica, qué posibilidades ofrece) y la comprensión de cómo se relacionan entre sí, cómo pueden combinarse de maneras productivas para analizar una situación, desarrollar una estrategia, llegar a la solución y comunicarla de manera efectiva. (Jacinto y Carreira, 2017, p. 1134)

Esta idea destaca la capacidad de utilizar herramientas tecnológicas no solo como soporte para resolver problemas, sino también como medio para explorar, representar y formular nuevas preguntas matemáticas. Investigaciones en torno a la resolución de problemas señalan que la interacción produce que se planteen preguntas y se realicen acciones que no se muestran en un contexto sin tecnología

² An inquiry process, technology affordances and mathematical tasks.

(Camacho-Machín et al., 2019; Jacinto y Carreira, 2023; Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2013).

Estas oportunidades podrían aprovecharse para potenciar la formulación de problemas en sus diferentes fases. Conjeturamos que una buena fluidez tecno-matemática de los individuos puede ser un elemento diferenciador, ya que: facilita la organización de la información y la identificación de patrones; proporciona un entorno que permite incorporar elementos dinámicos o visuales a un problema; y sirven como elemento de control para evaluar tanto los procesos como los productos obtenidos.

Así, la tecnología no solo apoya la formulación de problemas, sino que amplía las oportunidades para integrar las categorías prácticas propuestas por Baumanns con las fases cognitivas descritas por Cai y Rott (2024), ofreciendo un enfoque más completo para el análisis y la práctica docente en contextos tecnológicos.

3. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

Santos-Trigo (2024) señala que un desafío de la investigación actual es hacer explícito cómo contribuye el uso de herramientas digitales a cada una de las fases del modelo general de formulación de problemas. Para abordar este reto, y basándonos en nuestra experiencia como formadores de futuros docentes e investigadores, nos planteamos como objetivo general: explorar cómo el contexto de resolución de problemas haciendo uso de GeoGebra contribuye en la actividad de formulación de problemas matemáticos.

Este objetivo se desglosa en las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo contribuye GeoGebra en las diferentes fases del proceso de formulación de problemas?
- ¿Es la formulación de problemas una tarea que hace emerger la fluidez tecno-matemática en futuros profesores?
- ¿Qué aporta el uso explícito de herramientas digitales a las categorías de formulación de problemas propuestas por Baumanns?

4. METODOLOGÍA

La investigación adopta un enfoque cualitativo orientado a comprender cómo futuros docentes emplean GeoGebra en la formulación de problemas matemáticos, a partir de la interpretación de sus propias propuestas. El estudio es de tipo exploratorio e interpretativo, pues profundiza en la experiencia de los participantes y en los significados que atribuyen a su interacción con este Sistema de Geometría Dinámica. El diseño metodológico combina elementos de estudio de caso, centrándose en el análisis detallado de un grupo específico de estudiantes en un contexto particular (Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria), con énfasis en la interpretación de sus experiencias y percepciones.

4.1. Datos y participantes

En el estudio participaron 15 estudiantes graduados en Matemáticas, organizados en siete equipos. Durante su formación de Grado, habían experimentado con GeoGebra, por lo que se puede afirmar que dominaban esta herramienta y su integración con conceptos matemáticos.

Siguiendo el modelo de formulación de problemas (Fig. 1), los equipos trabajaron en dos situaciones que incluían: (1) un problema que debían resolver inicialmente con GeoGebra mediante una aproximación dinámica y (2) instrucciones concretas para formular nuevos problemas (Tabla 1). El contexto para ambas situaciones era el mismo.

Tabla 1. Situación general para la formulación de problemas

Contexto: Resolución de problemas, comenzando con una aproximación dinámica utilizando GeoGebra. Luego, se realizan otras aproximaciones, numérica o algebraica.		
Situación 1	Resolver problema 1	Instrucciones - Formular dos problemas por cada uno de los resueltos por tu grupo (esbozando su posible solución) - Indicar en qué se han basado para formular cada uno de esos problemas
Situación 2	Resolver problema 2	

En este trabajo, nos referimos a dos situaciones distintas: Situación 1 y Situación 2, cada una vinculada a un problema. En la primera, los participantes trabajaron en la construcción de cuadrados bajo condiciones específicas, mientras que en la segunda analizaron una familia de triángulos para determinar cuál tenía el área máxima.

Cada equipo entregó un informe escrito que documentaba ambas situaciones, incluyendo las resoluciones detalladas de los problemas originales, los nuevos problemas formulados, sus propuestas de resolución, los fundamentos teóricos y los enlaces a las construcciones dinámicas realizadas con GeoGebra.

4.2. Los problemas

Los problemas seleccionados para la experiencia han sido analizados en investigaciones previas (Hernández et al., 2023; Reyes-Rodriguez et al., 2017; Santos-Trigo et al., 2024). A continuación, se presentan sus enunciados (Tabla 2 y Tabla 3) y algunas indicaciones para su resolución (Figura 8 y Figura 9).

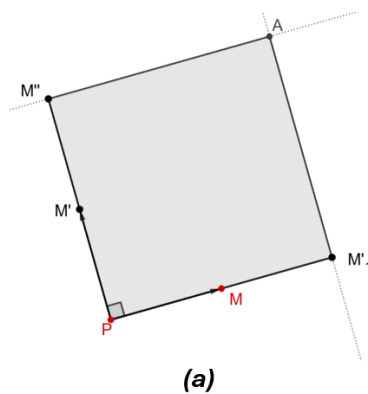
Tabla 2. Enunciado del problema 1

Encontrar diferentes formas de construir un cuadrado del que se conoce uno de sus vértices (P) y el punto medio (M) de uno de los lados del extremo P. Construirlo si el punto M es un punto medio de uno de los lados opuestos al punto P.

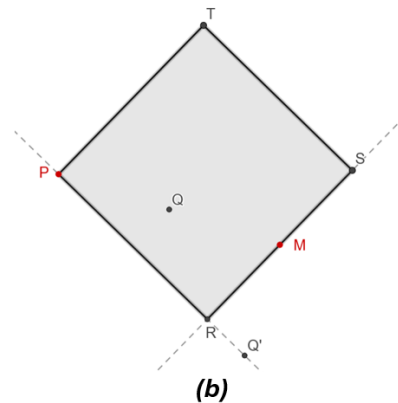
La aproximación dinámica se puede llevar a cabo por diferentes métodos para construir el cuadrado a partir de los datos dados:

- Punto P: Es uno de los vértices del cuadrado, y su ubicación está definida.
- Punto M: Es el punto medio de uno del lado contiguo a P (primera parte) o de uno de los lados opuestos (segunda parte).

Figura 8. Aproximaciones dinámicas para la primera (a) y segunda parte (b) del problema 1 por parte de los equipos 2 y 3, respectivamente



- M' rotación de 90° de M sobre P
- $M'1$ traslación de M por el vector $\overrightarrow{PM}$
- M'' traslación de M' por el vector $\overrightarrow{PM}$
- A intersección de la recta perpendicular a PM que pasa por $M'1$ y la recta perpendicular a PM' que pasa por M''
- $PM'1AM''$, polígono, es el cuadrado buscado.



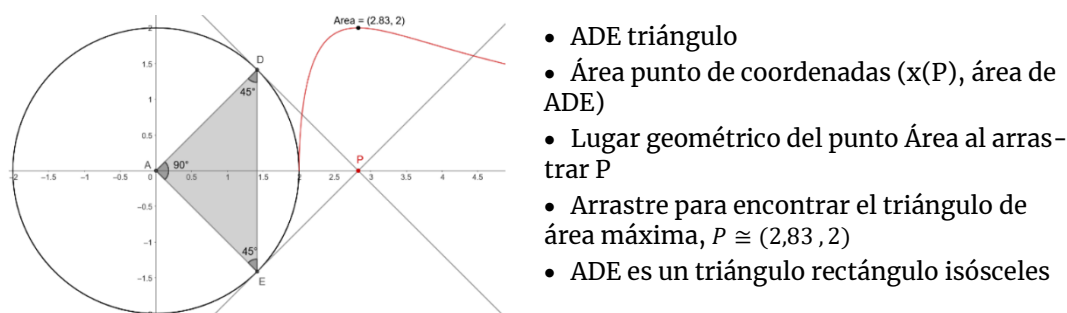
- Q punto medio de PM
- Q' rotación de 90° de Q sobre M
- R intersección de la recta que pasa por P y Q' y la recta perpendicular a esta que pasa por M
- PRST, polígono regular de 4 lados y base PR, es el cuadrado buscado.

Suponiendo el problema resuelto y partiendo de la construcción de un cuadrado que incluya sus puntos medios, se puede utilizar GeoGebra para su exploración. Esto permite reconocer los ejes de simetría de un cuadrado, encontrar propiedades no usadas habitualmente y usar herramientas que permitan trasladar dichas propiedades a una nueva construcción (Figura 8).

Tabla 3. Enunciado del problema 2

Dada una circunferencia de radio R con centro en el origen de coordenadas, desde un punto exterior P situado sobre el eje de abscisas y exterior a la circunferencia se trazan las rectas tangentes a la misma. Determinar las coordenadas del punto P , de modo que el triángulo formado por los puntos de tangencia y el origen de coordenadas tenga área máxima.

El uso de GeoGebra durante la aproximación dinámica permite arrastrar el punto P sobre la semirrecta y observar los cambios en la configuración del triángulo, proporcionando un enfoque interactivo que debe llevar a la discusión de la solución. La herramienta *Lugar Geométrico*, aplicada a un punto con la misma abscisa que P y de ordenada el área del triángulo, permite visualizar la función área respecto a la posición de P (Figura 9).

Figura 9. Aproximación dinámica del problema 2 realizada por el equipo1

4.3. Análisis de los datos

El análisis de los datos fue realizado por el equipo investigador conjuntamente en dos fases. En la primera, se revisaron las características de las propuestas de problemas de cada equipo, identificando qué variaciones se realizaron respecto a los problemas originales. A continuación, se estudiaron las herramientas y los pasos de construcción presentes en la resolución de los problemas originales y los nuevos (Martín-Ferraz et al., 2024). Se registró la frecuencia del uso de herramientas y los pasos de resolución, para comparar si se repetía el patrón a la hora de resolver los nuevos problemas.

En la segunda fase, que se reporta en este artículo, se efectuó un análisis cualitativo de las propuestas de los equipos, lo que permitió clasificarlas por el tipo de actividades de formulación que propusieron (Baumanns, 2022). Este análisis también se realizó de forma conjunta por el equipo investigador, que tras discutir cada caso, consensuó la clasificación dentro de las categorías de Baumanns.

Posteriormente, se analizaron tanto los enunciados como las resoluciones y comentarios de las propuestas de los equipos, centrándose en cómo el uso de GeoGebra influyó en la formulación de nuevos problemas. Aunque las evidencias

recogidas no permitían observar directamente el recorrido seguido por los equipos según el modelo general de Cai y Rott (2024), los comentarios incluidos en los informes, junto con las construcciones en GeoGebra, permitieron identificar vínculos e ideas espontáneas asociadas a las fases de *orientación y conexión*. Además, el informe incorporaba la resolución del problema formulado y una breve discusión sobre su objeto, acciones vinculadas a las fases de *generación y reflexión*.

5. RESULTADOS

Las situaciones diseñadas (Tabla 1) promovieron que los equipos se involucraran en distintos tipos de actividad de formulación. Fruto de ello, se plantearon un total de cuarenta propuestas, ya que hubo equipos que aportaron más de dos enunciados por problema. La cantidad de propuestas y su distribución fue distinta para cada situación y tipo de actividad (Tabla 3). La notable diferencia entre ambas, 27 y 13 propuestas, se debe a que el problema 1 requería trabajar la construcción desde dos puntos de partida distintos, lo que llevó a los futuros profesores a interpretarlo como dos apartados separados, generando así un mayor número de propuestas.

Tabla 4. Distribución de propuestas de problemas.

Actividad	Situación 1		Situación 2	
	n	Equipos	n	Equipos
Reformular para resolver	3	1, 2, 5		
Reformular para indagar	3	1, 4, 7	4	2, 4, 5, 7
Generar nuevos problemas	8	1, 2, 3, 4, 5	6	1, 4, 5, 6
Construir tareas para otros	13	1, 3, 4, 5, 6, 7	3	3, 5
Total de propuestas:	27		13	

Nota: n: cantidad de propuesta totales formuladas para cada actividad; equipos: número de identificación de los equipos que plantearon las propuestas.

A continuación, se presentan algunos casos organizados por las categorías de Baumanns (2022). Seleccionados como propuestas que evidencian la influencia de GeoGebra en los procesos de formulación.

5.1. Reformular para resolver

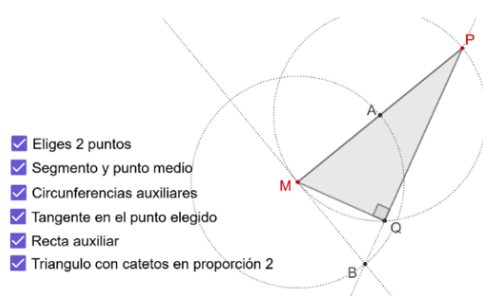
Algunos equipos plantearon problemas regresando sobre las preguntas que se habían hecho durante la resolución. En el siguiente ejemplo (Figura 10) el equipo 2 propone la construcción de un triángulo rectángulo dado un segmento como su hipotenusa y sabiendo que uno de los catetos es exactamente el doble del otro. Esta construcción surgió durante la resolución del problema original. El equipo buscaba simplificarlo trazando primero dicho triángulo para, posteriormente, apoyarse en esta figura para completar el cuadrado.

Figura 10. Problema propuesto por el equipo 2

Primer problema propuesto:

Debemos construir el triángulo partiendo de la hipotenusa, donde **el cateto mayor es el doble del cateto menor**. La resolución radica en la semejanza de triángulos para aplicar el teorema de Tales de Mileto.

El uso de GeoGebra durante la exploración en la aproximación dinámica permitió al equipo indagar de manera interactiva y visual las propiedades matemáticas. Luego, se dieron cuenta de que, si construían el triángulo rectángulo adecuado, el resto de la construcción sería rutinaria. Poder trabajar sobre un triángulo rectángulo les permitió integrar sus conocimientos sobre semejanza con el uso de GeoGebra, evidenciando su fluidez tecno-matemática. A la hora de formular un problema, regresaron a este episodio de la resolución para plantear una propuesta desde su experiencia y dar una solución (Figura 11).

Figura 11. Pasos de la construcción realizada por el equipo 2

- ✓ Eliges 2 puntos
- ✓ Segmento y punto medio
- ✓ Circunferencias auxiliares
- ✓ Tangente en el punto elegido
- ✓ Recta auxiliar
- ✓ Triángulo con catetos en proporción 2

- P y M dos puntos arbitrarios (representan los extremos de la hipotenusa del triángulo)
- Traza el segmento PM y se determina su punto medio A
- Circunferencia de centro A que pasa por P y M.
- Circunferencia de centro M que pasa por A.
- Recta tangente a la primera circunferencia en M, la corta en B a la segunda
- El triángulo PMB es rectángulo y PM mide el doble de MB
- Recta que pasa por P y B, corta a la primera circunferencia en Q
- PQM es semejante a PMB, por igualdad de ángulos.
- PMB es el triángulo buscado.

5.2. Reformular para indagar

Algunos equipos se plantearon buscar patrones y propiedades invariantes en las construcciones dinámicas realizadas para resolver los problemas originales (seleccionamos dos). Desde el punto de vista del proceso de resolución (Mason et al., 1982; Pólya, 1945; Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2013), se involucraron en la visión retrospectiva o reflexión y extensión para reflexionar si los pasos realizados servirían para otros problemas similares. Esta “es una actividad típica de los matemáticos, encontrar y variar problemas, es decir, formular problemas” (Baumanns, 2022, p. 21, traducción propia).

El equipo 2 plantea un problema para buscar el trapecio de área máxima inscrito en una circunferencia (Figura 12). En un libro interactivo de GeoGebra, plantean una serie de preguntas adicionales para explorar varias relaciones

matemáticas y termina con otro problema relacionado con el primero. Toda la propuesta se focaliza en el trapecio inscrito, en vez del triángulo original, usando los mismos puntos de tangencia.

Figura 12. Problema propuesto por el equipo 2 partiendo de la situación 2

Modificación para el problema 2.

Sea una circunferencia de radio R con centro en el origen de coordenadas y sus puntos diametralmente opuestos $(0, \pm R)$. Consideramos un punto exterior P_0 situado sobre el eje de abscisas y exterior a la circunferencia.

Se trazan las rectas tangentes a la misma que pasa por P_0 . Determinar las coordenadas del punto P_0 de modo que el trapecio formado por los puntos de tangencia y los puntos $(0, \pm R)$ tenga área máxima. En la siguiente construcción se muestra la solución gráfica.

¿Cuánto mide la altura del trapecio cuando se alcanza el área máxima?

¿Cuánto mide entonces la base menor del trapecio cuando se alcanza área máxima?

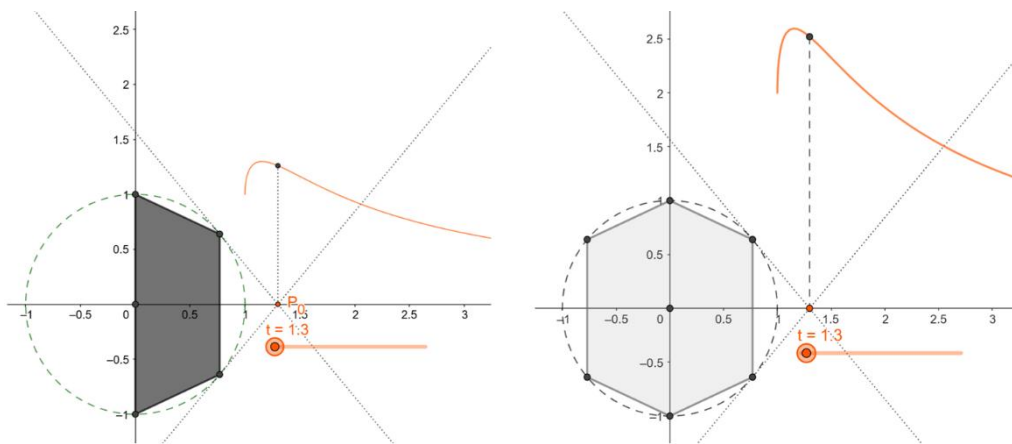
¿Cuánto miden sus lados oblicuos cuando se alcanza área máxima?

Utiliza las respuestas anteriores para resolver el siguiente problema:

De todos los Hexágonos regulares inscritos en la circunferencia, ¿cuál es el que tiene área máxima?

El equipo indagó sobre las propiedades específicas del trapecio inscrito, estudió la relación entre la longitud de sus lados y su área o la proporcionalidad entre las bases y la altura. Se plantearon preguntas clave y comprobaron que las propiedades al arrastrar P_0 eran invariantes respecto a los cambios en el radio de la circunferencia (Figura 13).

Figura 13. Construcciones del equipo 2 para verificar una de sus propuestas



- P_0 tiene coordenadas $(t, 0)$ siendo t un deslizador con $R < t < 10$
- Se traza un punto de coordenadas $(t, \text{área de la figura})$
- El lugar geométrico muestra los valores posibles para el área al arrastrar P_0 (o deslizar t)
- Se visualiza el comportamiento de varios parámetros: área, longitud de lados, ángulos...

El uso de GeoGebra facilita el proceso de exploración de conjeturas y, por tanto, influye en la fase *conexión* del proceso de formulación. Además, las

construcciones dinámicas sirven de elemento de control para verificar las conjeturas durante la fase de *generación*. Es una evidencia de que la fluidez tecno-matemática facilita el proceso de formulación de problemas.

El equipo 7 plantea una serie de cuestiones para indagar sobre el problema 1, sin modificar el enunciado (Figura 14). El objetivo que proponen es resolver el problema realizando varias construcciones diferentes, para finalmente analizar en cuál se realiza la menor cantidad de pasos. Esta propuesta de optimizar los procedimientos permite generar conexiones entre elementos matemáticos y herramientas de construcción. Las múltiples herramientas de GeoGebra promovieron este enfoque exploratorio.

Figura 14. Problemas propuestos por el equipo 7 dada la situación 1

Problema 1.1. Utilizando circunferencias.

Encontrar diferentes formas de construir un cuadrado del que se conocen uno de sus vértices (P) y el punto medio (M) de uno de los lados de extremos P.

- A. ¿Qué propiedades o características tiene un cuadrado?
- B. ¿Qué propiedades o características tienen una circunferencia?
- C. Dado un segmento AB, construye un cuadrado utilizando dos circunferencias en el que uno de los lados sea dicho segmento.
- D. ¿Qué propiedad de la circunferencia nos ha ayudado a resolver?

Problema 1.2. Realizando los menos pasos posibles.

Para construir el cuadrado, conociendo el punto P y M, una de las posibles soluciones utilizando los mínimos pasos posibles.

Problema 2.

Construirlo si el punto M es un punto de uno de los lados opuestos al punto P.

5.3. Generar nuevos problemas

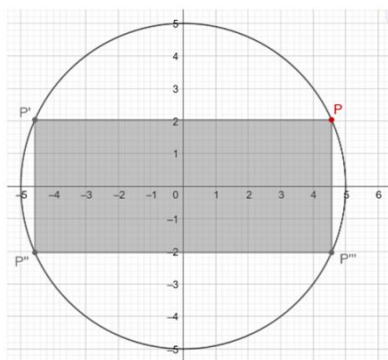
Ya señalamos que hubo equipos que se involucraron en la generalización para plantear problemas, vinculando así la acción de reflexión tras resolver problemas, con la fase de *conexión* del proceso de formulación. Consideramos que esta vinculación se produce, también, a la hora de generar nuevos problemas. Todos los equipos, excepto el 7, realizaron alguna propuesta alterando datos, figuras u objetivo, para generar un problema diferente al original, con el que no pretendían ni resolver el problema anterior, ni buscar una generalización. En este sentido, aunque la actividad de generar nuevos problemas se ejemplifica con claridad en tareas abiertas en las que no se han resuelto problemas (Baumanns, 2022, p. 50), en esta experiencia los equipos también se involucraron en ella.

El problema planteado por el equipo 6 (Figura 15) parte de un rectángulo inscrito en una circunferencia centrada en el origen, donde los vértices se determinan a partir de un punto arbitrario P mediante simetrías.

Figura 15. Problema propuesto por el equipo 6 en la situación 2

Actividad 3: Dada una circunferencia de radio R centrada en el origen, inscribimos un cuadrilátero de coordenadas $P(x, y)$, $P'(-x, y)$, $P''(-x, -y)$ y $P'''(x, -y)$. ¿Cuáles deben ser las coordenadas del punto P para que el cuadrilátero tenga área máxima? ¿Qué particularidad tendrá dicha figura?

El equipo mantiene la circunferencia centrada en el origen, la simetría respecto a los ejes de coordenadas y el objetivo de encontrar la figura de área máxima. El uso de GeoGebra en esta propuesta resultó ser un elemento de control, con el que pueden arrastrar P y encontrar la solución (Figura 16).

Figura 16. Construcción del equipo 6 para verificar una de sus propuestas

- P punto de la circunferencia
- P' simétrico de P respecto Eje Y
- P''' simétrico de P respecto Eje X
- P'' simétrico de P''' respecto Eje Y
- Arrastrar P y encontrar donde el área es máxima

Algo frecuente entre los equipos fue realizar pequeños cambios para generar una nueva versión del problema, planteándose preguntas como: ¿Qué pasaría si partimos de dos vértices contiguos?, ¿y si fueran opuestos? ¿Qué pasaría si nos proporcionan dos puntos medios de lados contiguos del cuadrado?, ¿y de lados opuestos? El equipo 5 usó justamente esa estrategia para elaborar uno de los problemas (Figura 17). En el informe indican que esta propuesta surge de “mezclar” los elementos del enunciado original.

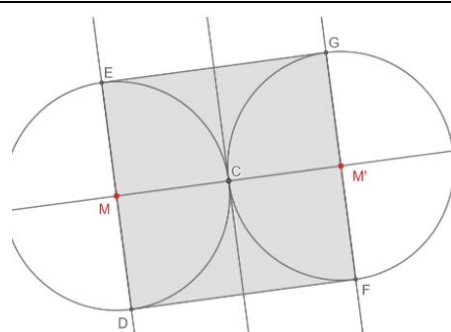
Figura 17. Problema propuesto por el equipo 5 en la situación 1

2) Construir un cuadrado del que se conocen dos puntos medios de lados opuestos M y M' .

Enunciado de nuevo este problema en un contexto cercano al alumnado acerca de un videojuego, quedaría de la siguiente manera: En una partida de Minecraft, un jugador quiere aprovechar una zona de llanura para construir un castillo de diferentes materiales. Coloca dos puertas enfrentadas y a partir de esta colocación quiere construir una base cuadrada de manera que las puertas sean el punto medio de cada pared opuesta. ¿Cómo puede construir el cuadrado conociendo la posición de las puertas?

Este equipo vuelve a usar GeoGebra para verificar que su propuesta es plausible, lo que se observa por una aproximación dinámica (Figura 18) que sigue pasos diferentes a los anteriormente utilizados. Todo esto evidencia que no estamos ante una generalización.

Figura 18. Construcción realizada por el equipo 5 para verificar una de sus propuestas



- Mediatriz del segmento MM' y punto medio C
- Rectas paralelas a la mediatriz que pasan por M y M'
- Circunferencias centradas en M y M' que pasan por C
- Puntos de intersección de las circunferencias con las paralelas: E, D, F y G
- Trazado del cuadrado $EDFG$

5.4. Construir tareas para otros

Al trabajar con profesorado en formación, se observó que en la mayoría de los problemas planteados había algún elemento que se puede vincular con su interés de trasladarlos a un aula. Usamos tres de las características descritas por Montes et al. (2024): un enfoque en aspectos del contenido de secundaria, cambios en la complejidad original y un intento de facilitar la comprensión del enunciado.

El equipo 1 planteó construir un cuadrado conociendo únicamente dos vértices opuestos (Figura 19), e incluyó otros dos problemas similares. El enunciado relata el problema como un proyecto arquitectónico para la construcción de una plaza y el informe justifica que ven necesario introducir este tipo de cambios para que el alumnado pueda “aplicar lo aprendido, pero dentro de un nuevo contexto”. Antes habían indicado, en una ruta potencial de implementación en el aula, que el problema 1 permitía movilizar conocimientos matemáticos como “las propiedades de los cuadrados y de la relación que existe entre sus vértices y puntos medios”. Manifestando así su interés en desarrollar los cuatro problemas, el original y los tres propuestos, como una secuencia.

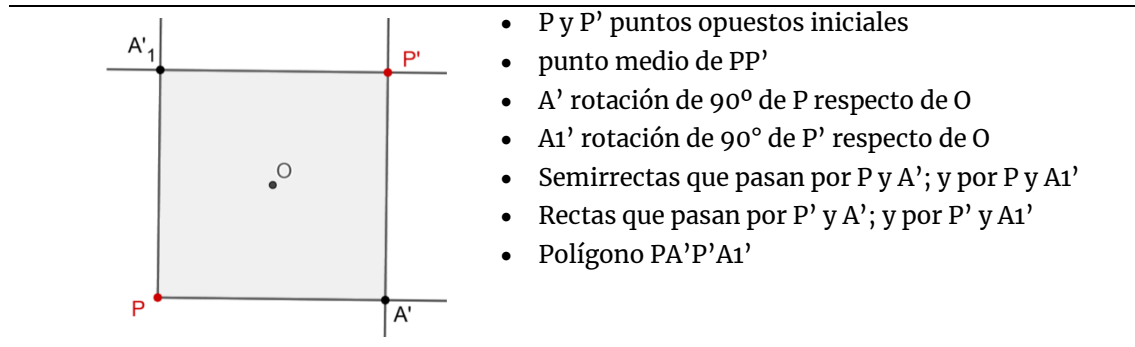
Figura 19. Problema propuesto por el equipo 1 en la situación 1

Problema 2) Imagínate que eres un arquitecto que está diseñando una plaza pública y has decidido que la pieza central será un gran cuadrado. Sin embargo, debido a otros elementos de la plaza, no puedes realizar una construcción normal. En lugar de comenzar con el punto medio y un vértice, decides empezar por dos vértices opuestos del cuadrado. Quieres encontrar diferentes formas de construir el cuadrado utilizando estos dos vértices opuestos.

¿Cómo podrías hacer esto? ¿Qué tipos de formas podrías crear con esta información limitada? Este ejercicio te desafía a ser creativo y encontrar múltiples soluciones para construir el cuadrado utilizando solos dos vértices opuestos.

Utilizan GeoGebra para explorar sus ideas para plantear nuevos problemas y verificar de manera dinámica la validez de la propuesta (Figura 20). Se manifiesta que el uso de herramientas digitales colabora con la fase de *conexión* y *generación* del proceso de formulación.

Figura 20. Construcción realizada por el equipo 1 para verificar una de sus propuestas



Únicamente dentro de esta categoría varios equipos eligen no usar herramientas digitales, como la del equipo 3 (Figura 21). Al igual que en el caso descrito antes, añade un contexto realista, el equipo lo justifica afirmando: “hemos planteado los problemas de manera contextualizada para que el alumnado lo vea desde un ámbito más cercano y sea capaz de realizar una interpretación geométrica más sencilla.” y señalando que es “propuesto para cursos de la ESO en los que se trabaja únicamente el área de distintas figuras”.

Figura 21. Problema planteado por el equipo 3 para la situación 1

Queremos pintar la pared cuadrada de una habitación, pero nos encontramos que la habitación dispone de una estantería triangular fijada a la pared que va desde la esquina superior izquierda hasta el punto medio de la longitud del suelo. Si la pared tiene unas dimensiones de 16 m^2 , y la pintura cuesta 1,50 euros por metro cuadrado, ¿cuánto dinero como mínimo tenemos que gastarnos?

Continúan con el proceso de formulación verificando la solución siguiendo una aproximación algebraica, que utiliza cálculos de áreas y resolución de ecuaciones (Figura 22).

Figura 22. Resolución planteada por el equipo 3

Solución. Primero debemos saber las dimensiones de pared que ocupa la estantería.

Nos encontramos con una pared cuadrada de área 16 m^2 , luego el lado tiene una longitud de:

$$A = l \cdot l \Rightarrow A = l^2 \Rightarrow 16 = l^2 \Rightarrow l = \sqrt{16} \Rightarrow l = 4 \text{ m}$$

De este modo, sabemos que la altura de la estantería es de 4 m . Además, sabemos que la base, al estar en el punto medio del lado del suelo de la pared, tiene una longitud de $\frac{4}{2} = 2 \text{ m}$, luego, ya podemos determinar la superficie que ocupa.

$$A_E = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4 \text{ m}^2$$

Luego, la estantería ocupa 4 m^2 de la superficie total de la pared. Nos queda para pintar: $16 - 4 = 12 \text{ m}^2$. Como la pintura cuesta $1,50$ por metro cuadrado, necesitaremos gastarnos:

$$12 \cdot 1,50 = 18 \text{ euros}$$

Concluimos así que debemos gastarnos 18 euros como mínimo para pintar la pared de la habitación.

6. CONCLUSIONES

Nuestro objetivo general fue explorar cómo el uso de GeoGebra en la resolución de problemas influye en la formación de profesores de Educación Secundaria para la formulación de nuevos problemas matemáticos. Mediante un enfoque cualitativo, se analizaron las propuestas de estudiantes del máster de formación de profesores después de resolver dos problemas siguiendo aproximaciones dinámicas con GeoGebra. Se consiguió identificar cómo el uso de herramientas digitales contribuye a las distintas fases del proceso de formulación de problemas (Cai y Rott, 2024), así como evidenciar que esta actividad revela la fluidez tecno-matemática en los participantes (Jacinto y Carreira, 2017). Además, la clasificación de Baumanns (2022) proporcionó un marco que facilitó la organización de los problemas propuestos por los futuros profesores, permitiendo categorizarlos acorde con su modelo y también reconocer el papel que desempeñó la tecnología en el proceso de formulación.

Hemos constatado que la contribución del uso de GeoGebra fue notable en la fase de *conexión*, dado que se pudo observar que los participantes establecieron vínculos entre la exploración dinámica del problema original y las ideas empleadas para formular nuevos problemas. El análisis de las tareas permitió confirmar que estas exploraciones facilitaron la reformulación de problemas al generar nuevas preguntas y enfoques. Por ejemplo, el problema en el que se plantea la construcción de un triángulo rectángulo con proporciones de 2 a 1 (Figura 11) constituye una evidencia de este hecho. Este resultado está en línea con investigaciones previas (Camacho-Machín et al., 2019; Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2013), que destacan cómo el uso de herramientas digitales fomenta la formulación de preguntas que difícilmente emergen en enfoques tradicionales, promoviendo un aprendizaje más profundo e investigativo de las matemáticas.

Además, GeoGebra desempeñó un rol clave como elemento de control (Schoenfeld, 1985) durante la fase de *generación*, permitiendo a los equipos verificar la validez de sus ideas y confirmar que los problemas planteados eran

resolubles. Por ejemplo, utilizaron GeoGebra para demostrar que era posible construir un cuadrado a partir de los puntos medios de lados opuestos (Figura 18), lo cual no solo validó su propuesta, sino que también reforzó su comprensión de las propiedades implicadas.

Los resultados han mostrado que un enfoque de indagación matemática con herramientas digitales puede influir también en otras fases de las propuestas por Cai y Rott (2024). Durante la *orientación*, el entorno dinámico de GeoGebra facilitó la reinterpretación del problema original, como se observó en el problema centrado en optimizar procedimientos de construcción (Figura 14). En la fase de *reflexión*, algunos equipos ajustaron sus problemas considerando al público objetivo y diseñaron un libro de actividades interactivas en GeoGebra (Figura 12 y Figura 13), lo que evidencia una disposición hacia la enseñanza de las matemáticas con apoyo digital.

Por otra parte, utilizar herramientas digitales en el contexto de la formulación de problemas favoreció la expresión de la fluidez tecno-matemática en el futuro profesorado. Los participantes diseñaron construcciones robustas, analizaron propiedades geométricas mediante exploraciones dinámicas, generaron conjeturas y validaron problemas. Este estudio amplía la investigación de Jacinto y Carreira (2017, 2023), quienes primero identificaron esta fluidez en estudiantes y luego la analizaron en un profesor experimentado. A diferencia del docente experto, cuyos usos tecnológicos eran estratégicos y bien definidos, los profesores en formación adoptaron un enfoque exploratorio en el que GeoGebra facilitó la resolución de problemas e impulsó nuevas ideas para la actividad de formulación. Consideramos que la fluidez tecno-matemática es una habilidad en desarrollo continuo que se fortalece con la experimentación. Además, la formulación de problemas con tecnología llevó a los participantes a reflexionar sobre su práctica docente, evidenciando una transición hacia el uso didáctico de la tecnología. Estos hallazgos refuerzan la importancia de integrar herramientas digitales en la formación inicial del profesorado para fortalecer la comprensión matemática y el diseño de actividades basadas en la exploración y la indagación.

Consideramos que la integración de herramientas digitales aporta nuevas posibilidades dentro de cada categoría de la formulación de problemas propuestas por Baumanns (2022). Para la categoría *reformular para resolver*, se observó que la exploración dinámica llevó a los participantes a plantearse preguntas que luego se transformaron en nuevos problemas. En relación con *reformular para indagar*, se constató cómo la visualización permitió identificar patrones y propiedades invariantes no evidentes en entornos estáticos, convirtiendo este análisis en el objeto de sus problemas propuestos. La tecnología brindó un entorno flexible donde la modificación de parámetros y la observación de cambios en tiempo real impulsaron el planteamiento de problemas, contribuyendo con esto a ampliar el espectro de la categoría *generar nuevos problemas*. Finalmente, respecto a la categoría *construir tareas para otros*, se constató que se pueden adaptar problemas a distintos grados de dificultad y diseñar actividades interactivas dirigidas a sus futuros estudiantes. En conjunto, podemos considerar que todas estas evidencias enriquecen los productos concebidos en la formulación de problemas.

Si bien esta investigación analizó la contribución de las herramientas digitales en la formulación de problemas, dejó abiertas preguntas para futuros estudios. Una de ellas es ¿por qué algunos equipos optaron por no usar GeoGebra en la categoría *construir tareas para otros*, a pesar de su potencial didáctico? Identificamos patrones comunes en estas propuestas no dinámicas: uso de datos numéricos, resolución algebraica y la incorporación de contextos realistas algo forzados. Estas características son similares a los problemas tradicionalmente resueltos en el aula, por lo que conjeturamos que en esta decisión influyen las creencias de los futuros docentes. Esta hipótesis nos plantea el desafío de comprender cómo la fase de *orientación* puede influir en la decisión de integrar herramientas digitales en la formulación de problemas.

En futuras investigaciones, buscamos adoptar un enfoque metodológico que nos permita analizar todo el proceso de formulación, proporcionando una visión más completa para contrastar y profundizar en estos resultados.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido parcialmente financiada por el proyecto de investigación de referencia PID2022-139007NB-I00 (Agencia Estatal de Investigación) aprobado por el MCIN/AEI/10.13039/ 501100011033/ FEDER, UE y la ayuda de movilidad del profesorado convocada por el Ministerio de Universidades y la Universidad de La Laguna en la Orden de 6 de noviembre de 2023 del Ministerio de Universidades, con aplicación presupuestaria 1804032326.

REFERENCIAS

- Ayllón, M. F., Castro, E., & Molina, M. (2011). Invención de problemas y tipificación de problema “difícil” por alumnos de educación primaria. En M. Marín Rodríguez, G. Fernández García, L. J. Blanco Nieto, & M. Palarea Medina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 277-286). SEIEM.
<https://www.seiem.es/acta/xv-2011-ciudad-real/>
- Ayllón, M. F., Gallego, J. L., & Gómez-Pérez, I. A. (2016). La actuación de estudiantes de educación primaria en un proceso de invención de problemas. *Perfiles Educativos*, 38(152), 51-67.
<https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2016.152.57588>
- Baumanns, L. (2022). *Mathematical problem posing*. Springer Spektrum Wiesbaden.
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-39917-7>
- Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. En F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing. Research in mathematics education* (pp. 3-34). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_1
- Cai, J., & Rott, B. (2024). On understanding mathematical problem-posing processes. *ZDM Mathematics Education*, 56, 61-71.
<https://doi.org/10.1007/s11858-023-01536-w>
- Camacho-Machín, M., Perdomo-Díaz, J., & Hernández, A. (2019). Actividades para la formación de profesores derivadas del uso de GeoGebra en la resolución de problemas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, & M. T. González (Eds.),

Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional (pp. 371–394). Ediciones Universidad de Salamanca.

- Chico, J., Montes, M., & Badillo, E. (2022). Transformaciones de la información en la formulación de problemas: Una mirada hacia los futuros maestros. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 219–227). SEIEM. <http://www.seiem.es/docs/actas/25/ActasXXVSEIEM.pdf>
- Cruz, M. (2006). A mathematical problem—formulating strategy. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 79–90.
- García-Alonso, I., Bruno, A., Almeida, R., Sosa-Martín, D., & Perdomo-Díaz, J. (2022). Problemas de fracciones formulados por futuros profesores: Algunas características. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas, & J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 295–304). SEIEM. <https://www.seiem.es/2022/05/05/actas-xxv-seiem-santiago-de-compostela-2022/>
- Gómez-Chacón, I. M., & de la Fuente, C. (2018). Problem-solving and mathematical research projects: Creative processes, actions, and mediations. En N. Amado, S. Carreira, & K. Jones (Eds.), *Broadening the scope of research on mathematical problem solving* (pp. 347–373). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99861-9_15
- Hernández, A., Perdomo-Díaz, J., & Camacho-Machín, M. (2023). Formulación de problemas matemáticos con GeoGebra. Un estudio inicial. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 15, 117–136. <https://wp.ull.es/fpiem/numero-xv/>
- Jacinto, H., & Carreira, S. (2017). Mathematical problem solving with technology: The techno-mathematical fluency of a student-with-GeoGebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15, 1115–1136. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9728-8>
- Jacinto, H., & Carreira, S. (2023). Knowledge for teaching mathematical problem-solving with technology: An exploratory study of a mathematics teacher's proficiency. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 11(1), 105–122. <https://doi.org/10.30935/scimath/12464>
- Martín-Ferraz, A., Hernández, A., & Camacho-Machín, M. (2024). Reformulación de problemas matemáticos por futuros profesores de secundaria. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, 16, 133–162. https://wp.ull.es/fpiem/2024/11/24/16_07-reformulacion-de-problemas-matematicos-por-futuros-profesores-de-secundaria/
- Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Montes, M., Chico, J., Martín-Díaz, J. P., & Badillo, E. (2024). Mathematics teachers' specialized knowledge mobilized through problem transformation. *Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101132. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101132>
- Pólya, G. (1945). *How to solve it?* Princeton University Press.
- Reyes-Rodríguez, A., Santos-Trigo, M., & Barrera-Mora, F. (2017). The construction of a square through multiple approaches to foster learners' mathematical thinking. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 36(3), 167–181. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrw022>

- Santos-Trigo, L. M. (2014). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. Trillas.
- Santos-Trigo, M. (2024). Problem solving in mathematics education: Tracing its foundations and current research-practice trends. *ZDM Mathematics Education*, 56, 211-222. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01578-8>
- Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematical Enthusiast*, 10(1-2), 279-302. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1268>
- Santos-Trigo, M., Camacho-Machín, M., & Barrera-Mora, F. (2024). Focusing on foundational calculus ideas to understand the derivative concept via problem-solving tasks that involve the use of a dynamic geometry system. *ZDM Mathematics Education*, 56, 1287-1301. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01607-6>
- Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Gómez-Arciga, A. (2022). A conceptual framework to structure remote learning scenarios: A digital wall as a reflective tool for students to develop mathematics problem-solving competencies. *International Journal of Learning Technology*, 17(1), 27-52. <https://doi.org/10.1504/IJLT.2022.123686>
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

∞

Alexánder Hernández Hernández

Universidad de La Laguna (España)

alexander.hernandez@ull.edu.es | <https://orcid.org/0000-0001-6342-3914>

Aitana Martín Ferraz

Universidad de La Laguna (España)

amartife@ull.edu.es | <https://orcid.org/0009-0008-9136-0103>

Matías Camacho Machín

Universidad de La Laguna (España)

mcamacho@ull.edu.es | <https://orcid.org/0000-0002-7477-9446>

Recibido: 30 de noviembre de 2024

Aceptado: 25 de abril de 2025

Problem Posing in Pre-service Secondary Mathematics Teacher Education: Insights of using GeoGebra

Alexánder Hernández Hernández @ , Aitana Martín Ferraz @ ,
Matías Camacho Machín @ 

Universidad de La Laguna (España)

Numerous studies have emphasized that the integration of digital technologies into mathematics education transforms the way problems are approached and solved (Santos-Trigo, 2024). In particular, tools such as GeoGebra, a dynamic geometry environment, offer opportunities to enhance the instructional strategies of secondary school teachers in the processes of problem posing and reformulation. This study aims to analyze how problem-solving tasks involving GeoGebra influence the reformulation proposals made by pre-service mathematics teachers during their initial training.

The research was conducted as part of a course in the Master's Degree in Teacher Education involving fifteen pre-service mathematics teachers organized into seven teams. Each group solved two problems using GeoGebra from a dynamic perspective and subsequently formulated new problems based on their exploration. The qualitative methodology employed was grounded in a conceptual framework that integrates problem-solving with digital tools (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013), the four phases of problem posing described by Cai and Rott (2024)—orientation, connection, generation, and reflection—and the categories proposed by Baumanns (2022) concerning the different purposes of problem posing.

The findings indicate that GeoGebra played a crucial role, particularly in the connection phase, by facilitating pattern identification, the testing of conjectures, and the link between visual and algebraic representations. Moreover, its use supported the evaluation of prior ideas and the feasibility of the problems proposed. The dynamic nature of the environment allowed participants to manipulate mathematical objects in real time, fostering the emergence of new ideas, verification of constructions, and exploration of mathematical concepts.

The pre-service mathematics teachers engaged in various types of activities: reformulating problems to simplify or solve them, transforming them to explore broader mathematical structures, generating new problems by modifying initial conditions, and designing tasks for instructional purposes. In several cases, the dynamic visualizations provided by GeoGebra supported the emergence of ideas in both the reformulation and formulation phases. Some teams developed interactive proposals for secondary education, demonstrating growing awareness of the pedagogical potential of technology. However, other teams chose not to incorporate GeoGebra into their didactic tasks, suggesting underlying beliefs about the role of technology in education and pointing to a potential avenue for future research.

The study suggests that the orientation and connection phases are particularly influential in how pre-service mathematics teachers interpret and integrate technology into problem-posing activities. It also confirms that the use of digital tools such as GeoGebra not only enriches problem-solving, but significantly expands the possibilities of problem formulation through inquiry-based practices.