AIEM

AVANCES DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

ISSN-e 2254-4313 | (2024) 26, 105-127 | aiem.es

seiem.es

De "la visita de obras" al "cuestionamiento del mundo" en la escuela secundaria argentina

From "Visit of the Works" to the "Questioning of the World" in Argentine Secondary School

Viviana Carolina Llanos @, María Rita Otero @, María Paz Gazzola @

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT), UNICEN, CONICET (Argentina)

Resumen ∞ En este trabajo se analizan los resultados de implementar un recorrido de estudio y de investigación (REI) en cursos regulares de la escuela secundaria en Argentina con 163 estudiantes. Se adopta la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) para definir los alcances de un paradigma emergente, el del cuestionamiento del mundo (PCM) a partir de un REI, como respuesta a otro en crisis, el de la "visita de obras". Se analizan las praxeologías que se estudian con el REI. Los resultados ponen de manifiesto las diferencias de introducir una enseñanza por investigación y cuestionamiento respecto del planteo tradicional habitual, principalmente con relación al saber.

Palabras clave ∞ Enseñanza de la matemática; Teoría Antropológica de lo Didáctico; Recorrido de estudio y de Investigación (REI); Escuela secundaria; Funciones algebraicas

Abstract ∞ This paper analyzes the results of implementing a Study and Research Path (SRP) in regular secondary school courses in Argentina with 163 students. The Anthropological Theory of the Didactic (ATD) is adopted to define the scope of an emerging paradigm of questioning the world (PCM) from an SRP, as a response to another in crisis, the "visit of the works". The praxeologies that are studied with the REI are analyzed. The results show the differences of introducing teaching through research and questioning regarding the usual traditional approach, mainly in relation to knowledge.

Keywords ∞ Teaching of mathematics; Anthropological Theory of the Didactics; Study and research path (SRP); Secondary school; Algebraic functions

Llanos, V. C., Otero, M. R., & Gazzola, M. P. (2024). De "la visita de obras" al "cuestionamiento del mundo" en la escuela secundaria argentina. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática, 26*, 105-127. https://doi.org/10.35763/aiem26.4303

1. Introducción

La enseñanza de la Matemática atraviesa problemas tal vez inevitables, que conllevan altos niveles de frustración para los profesores y los estudiantes. Más allá de dichos fracasos —que se definen por lo general en función de resultados esperados en un proceso de acreditación por el docente, o por estándares internacionales de evaluación en una institución— el problema no puede dejar de considerarse como intrínseco y estrictamente relacionado con el *saber*, a sus usos, al *porqué* y *para qué* de un determinado conocimiento matemático en un momento e institución escolar. Ante la pregunta recurrente de los estudiantes: "profesor, ¿y esto para qué me sirve?", aparecen respuestas como predeterminadas, tales como "la matemática será útil para la vida", "los ayudará a resolver problemas, a pensar". La falta de respuesta con sentido a estos interrogantes tiene varias consecuencias. Por un lado, podría explicarse por el rechazo o aversión social frente a la matemática y lo que se propone en torno a ella (Chevallard, 2017). Los conocimientos matemáticos se presentan como incuestionables, poco alcanzables y hasta de difícil acceso. Por otro lado, en la escuela el profesor es quien asume casi por completo la responsabilidad de la clase, y también se le atribuyen los "fracasos" porque a él le corresponde casi todo: decidir qué y cómo enseñar, "explicar", seleccionar un libro y proponerlo, evaluar, etc. La actividad del alumno es reproducir lo que el profesor explica y resolver tareas de un trabajo práctico; o simplemente hacer los ejercicios del libro. El profesor toma casi todas las decisiones, y al alumno le queda la reproducción en lo posible exitosa del conocimiento que le fue comunicado, "mostrado".

Es conocido el esfuerzo que los didactas han hecho por tratar de cambiar la relación de los profesores y los estudiantes a los conocimientos en matemática de diferentes maneras. Se pueden reconocer los trabajos de algunos precursores de la didáctica de la matemática en Francia, como los de Artigue (1995), Brousseau (1998), Chevallard (1999), Douady (1986) y Vergnaud (1990). En particular, Chevallard (2004) es quien teoriza y reconoce un fenómeno arraigado que explica los problemas del modelo dominante y lo denomina de la *monumentalización* del saber. En este modelo el profesor es responsable de "traspasar" el saber al alumno, "mostrárselo" y además es su "garante". Otra consecuencia gravísima de la *monumentalización* es la instalación de un proceso sistemático y muy arraigado de eliminación de las preguntas por respuestas, denominado fenómeno de *pérdida de sentido*. En este fenómeno, las obras que el profesor muestra son respuestas a preguntas que nunca fueron hechas, que permanecen ocultas, lo que produce que se desconozca la utilidad de ese *saber*, su razón de ser, su porqué o para qué. Esto se constituye en lo que Chevallard (2013) denomina paradigma de la visita de obras, "visita" que, por otro lado, se realiza de forma parcial, aislada, y se describe bajo el fenómeno del *autismo temático* (Chevallard, 2001). Utilizamos la expresión confinamiento de los temas para referir a este fenómeno, que debe ser considerado como un fenómeno que condiciona el conjunto de las cuestiones matemáticas que pueden ser estudiadas en una institución, y las posibles formas de estudiar dichas cuestiones.

El paradigma de la visita de obras y los fenómenos vinculados a este están vigentes y en crisis, y sería deseable que evolucionen hacia el paradigma del cuestionamiento del mundo, por medio de la propuesta de los recorridos de estudio y de investigación (REI) (Chevallard 2004, 2013). Los REI vienen a dar respuesta a los fenómenos de la *monumentalización del* saber, de la *pérdida de sentido* y a también al problema del confinamiento de los temas porque parten del estudio de una pregunta que permitirá generar otras, y cuyas respuestas son una responsabilidad de la clase y no únicamente del profesor. El fenómeno del autismo de los temas también evolucionaría hacia una cobertura de temas de un programa y las salidas necesarias a saberes dentro y fuera de la o las disciplinas en cuestión. La pregunta que genera el recorrido requerirá del reencuentro de praxeologías de las disciplinas involucradas en el estudio y no está esto predeterminado de antemano. Es deseable que se involucren al menos dos disciplinas, y entre estos se reconocen algunas investigaciones que desarrollan REI tanto en la escuela secundaria como en la universidad. Específicamente, en la investigación de Gazzola et al. (2021) y Otero, Llanos y Arlego (2020), se propone un REI codisciplinar a la matemática y la física donde se propone una pregunta Q_0, cuyas posibles respuestas ni siquiera son conocidas de antemano para los profesores, y donde ambas disciplinas se estudian en la misma medida. Otras investigaciones implementan REI en un curso de didáctica de la matemática con profesores en actividad que deciden continuar sus estudios en la universidad. Específicamente en la investigación de Otero, Llanos y Parra (2020) se desarrolla un REI codisciplinar en matemática y física. En ambos casos, los profesores, por un lado, estudian con el REI y se analizan sus decisiones cuando tienen que pensar en cómo utilizarlo para enseñar. La investigación de Florensa et al. (2020) propone un REI como dispositivos didáctico-matemático para la enseñanza de la modelización en tres niveles educativos: infantil, secundaria y universidad. La de García et al. (2019) proponen una investigación que discute el papel de los REI como "tareas" que se diseñan con el propósito de enfrentar ciertos fenómenos didácticos identificados en las instituciones.

El REI que se propone en esta investigación sería una transición hacia lo que en términos teóricos se propone de este constructo. Además de que involucra una única disciplina, el profesor conoce de antemano una posible respuesta a Q_0 y las posibilidades para su estudio. Es una alternativa viable a la enseñanza habitual, por tratarse de una propuesta que corresponde a un estudio longitudinal que dura dos años y en una institución caracterizada por en el paradigma de visita de obras. Con el REI que comienza con la pregunta Q_0*: ¿cómo operar con curvas cualesquiera, si solo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?* (Llanos et al., 2016), los estudiantes y el profesor avanzan juntos en el estudio de Q_0 y otras relacionadas, a partir de un conjunto de situaciones que convenientemente el profesor/investigador lleva al aula. Otra diferencia respecto de la enseñanza habitual es que con el REI los saberes no se reencuentran de forma aislada, es decir, se requiere de un estudio conjunto saberes que incluyen números, geometría sintética y analítica. Con este REI se pone a disposición un instrumento que en la escuela secundaria permitiría un estudio alternativo de "lo funcional", estrechamente relacionado con la geometría, los números y el álgebra. El objetivo de este trabajo es poner en evidencia las diferencias en términos de praxeologías reencontradas y funcionamiento de una clase que se propone desde el PCM, respecto del habitual. Analizamos entonces las diferencias entre el REI y el paradigma de la “visita de obras” vigente; motivo por el cual la pregunta que nos proponemos responder en este trabajo es ¿cuáles son los alcances y limitaciones del REI con relación a las praxeologías involucradas, respecto de la enseñanza habitual?

2. Marco teórico

Se adopta la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999, 2013, 2017) para describir con precisión dos paradigmas antagónicos: uno dominante y en crisis, denominado de “la visita de obras”, hacia otro el “del cuestionamiento del mundo” (en adelante PCM) que se encuentra en plena evolución y desarrollo. Para definir las diferencias entre dichos paradigmas, comenzamos por mencionar que la TAD es una teoría de lo didáctico, caracterizada por su dimensión antropológica. Lo antropológico coloca a la actividad matemática dentro de las actividades humanas, y Chevallard (1999) propone además que cualquier actividad humana regularmente realizada se modeliza con la noción de praxeología, y contempla dos niveles: el de la práctica y el de la justificación de esas prácticas en una determina institución. La noción de praxeología es central para definir las diferencias entre estos paradigmas.

En el paradigma de la visita de obras “aprender” es apropiarse de praxeologías concretas, definidas por el profesor, y conocidas de antemano por él. El fenómeno de la monumentalización del saber (Chevallard, 2013, 2017) es propio de este paradigma y metafóricamente define al alumno como visitando al saber matemático por analogía a la visita de piezas de un museo que se veneran, se miran de lejos, sin posibilidad de modificarlas, de hacer algo con ellas. En un aula los profesores entonces “guían las visitas” por las obras y deciden qué praxeologías estudiar y cómo. ¿Cuál es la función de la escuela en este paradigma?: es el lugar donde los estudiantes “visitan” la matemática que los profesores muestran, les enseñan y se espera al final del estudio los estudiantes hagan o digan ciertas cosas que podrían guardar similitud con aquello que les fue presentado. Así, el sistema didáctico (S) en este paradigma adopta la forma: $S\ (X;\ Y; O_i)$, en donde X representa el conjunto de los estudiantes $x\ \in\ X, Y$ el conjunto de las ayudas al estudio, $y\ \in\ Y$, que pueden ser una o varias, además de un conjunto de obras u objetos Oi a estudiar.

El PCM produce una transformación con relación al encuentro con el saber. No desaparecen las praxeologías, cambia la forma de reencontrarlas. En el PCM el punto de partida es una pregunta que Chevallard (2013) denomina generatriz (Q_0), que permite generar otras preguntas Q_i a partir de las cuales se reencuentran y estudian las praxeologías de un programa. El profesor suele ser el responsable de llevar al aula la Q_0. La clase investiga, se estudian obras con el objetivo de reconstruir o aportar una respuesta a Q_0. Los estudiantes tienen un papel activo, analizan junto al profesor la pertinencia de las respuestas, proponen otras preguntas, aportan una búsqueda de internet, un libro que conocen. La escuela se transforma en el lugar donde los estudiantes, junto con el profesor, llevan a cabo un estudio, y si se quiere "una investigación" de una pregunta que guarda relación con ciertas praxeologías del programa. En la PCM el sistema didáctico es de la forma: $S\ (X;\ Y;\ Q_i)$.

El correlato de este paradigma emergente en el aula son los REI. Chevallard (2013) indica que un REI puede definirse a partir de lo que él denomina esquema herbartiano desarrollado: $[S\ (X, Y, Q_o) \rightharpoonup \{R^{\lozenge}_j, O_k, Q_i, D_r\}] \rightharpoonup R^{\heartsuit}$, y para que el REI "viva" se requiere construir un medio didáctico apropiado, generar nuevas preguntas (Q_i) y estudiarlas con el objetivo de elaborar respuestas, así como incorporar al medio otras respuestas de la cultura ($R^{\lozenge}_j$), y datos (D_r) útiles al estudio de las praxeologías (u obras O_i). La respuesta $R^{\heartsuit}$ es una respuesta acordada y considerada apropiada como resultado del estudio por los estudiantes y el profesor. Para mostrar las principales diferencias con el paradigma de la visita de obras se propone en la figura 1.

Figura 1. Elementos del esquema herbartiano en cada paradigma

Paradigma "de la visita de obras"	Paradigma del cuestionamiento del mundo
Diseño curricular = $\{O_i\}$	*Diseño curricular* = $\{Q_i\}$
• Conocer fragmentos de obras (O_i) y demostrar que aprendimos aquello que visitamos.	• Elaborar respuestas en la medida que se desarrolla el proceso de estudio de Q_i
$[S(X,Y, O_i) \rightharpoonup \{R^{\lozenge}_j, O_i, \cancel{Q_k, D_r}\}] \cancel{\rightharpoonup} R^{\heartsuit} \approx R^{\lozenge}_y$	$[S(X,Y,Q_o) \rightharpoonup \{R^{\lozenge}_j, O_i, Q_k, D_r\}] \rightharpoonup R^{\heartsuit}$
Respuesta conocida y definida por el profesor Respuesta sin pregunta	

Como se puede notar, en el paradigma de la visita de obras desaparecen algunos elementos del esquema herbartiano, y esto se explica por la responsabilidad atribuida al profesor en la construcción del medio didáctico que no es abierto. No se estudian preguntas sino obras de un programa O_i seleccionadas y conocidas de antemano por el profesor. La respuesta $R^{\heartsuit}$ es sustituida por una R_y, que es del profesor, y además es una respuesta a una pregunta que nunca antes fue formulada. Por tal motivo, los REI se proponen como una respuesta viable a este paradigma en crisis, y parten del estudio de preguntas. La diferencia tal vez no radique en la forma en que comienza el estudio, sino en las praxeologías que permitiría reencontrar el REI, y en la completitud de las mismas.

3. Metodología

Se trata de un estudio cualitativo, de corte exploratorio y carácter etnográfico. Se propone introducir en cursos habituales de la escuela secundaria argentina el PCM por medio de un REI, en un contexto experimentalmente controlado. Para definir la metodología empleada para el diseño, puesta a punto y análisis del REI, es necesario identificar: el análisis a priori del REI que en el marco teórico adoptado se constituye en el modelo praxeológico de referencia, una segunda instancia que corresponde a la implementación del instrumento ;y, por último, el análisis de los resultados de la implementación.

El análisis a priori contempla el diseño y elección de la pregunta Q_0 que es intencional, y forma parte de la ingeniería que se realiza en la investigación. En el REI las preguntas derivadas pueden ser tantas como curvas y operaciones entre las mismas se elijan, permiten reencontrar varias praxeologías del programa de estudio de los últimos tres años de la escuela secundaria, que corresponde al contexto de implementación seleccionado en esta investigación. Una vez establecidas cuáles son esas curvas y las operaciones correspondientes entre las mismas, es necesario recorrer el camino que permita encontrar una solución al problema. A partir de este estudio se espera:

· Describir los posibles recorridos que pueden derivar de Q_0 y analizar en qué medida estos pueden ser introducidos en los cursos de la escuela secundaria.

· Justificar por qué se aborda el problema de la multiplicación de las rectas como una respuesta posible al problema de operar con curvas.

· Realizar un análisis didáctico de las preguntas que orientan el recorrido que parte de la multiplicación de las rectas y las decisiones consideradas con relación al mismo.

· Realizar un análisis de la generalidad de las técnicas construidas para la multiplicación de las rectas, en otros casos.

Se realizaron seis implementaciones del REI en un mismo establecimiento educativo público de gestión privada, durante tres años consecutivos, en dos cursos en paralelo cada año. Cada grupo de estudio está conformado por aproximadamente 30 alumnos y el profesor del curso, que es parte del equipo de investigación. Se trata de un estudio longitudinal porque el REI se implementa en un 4.º año de la escuela secundaria argentina y continúa al próximo año (en 5.º año) con los mismos estudiantes. Los estudiantes que participan de la investigación tienen entre 14 y 16 años y en total participaron 163 alumnos entre las seis implementaciones.

En las implementaciones el profesor tiene carácter de observador participante y se realiza también observación no participante con colaboración de colegas del equipo. Se toman notas de campo antes y después de cada encuentro y se registra un audio general de cada curso durante todo el período de ejecución del REI. Cada clase el profesor lleva la tarea, que es desconocida para los estudiantes, y “retira” las producciones escritas de todos los alumnos al finalizar cada encuentro, y se registran por escaneo. A partir de la transcripción de los registros de audio, las notas de campo y las producciones escritas de los estudiantes se analizan los resultados obtenidos. Para analizar las praxeologías efectivamente reconstruidas y visitadas con el REI, se desarrolló una investigación que describe las adaptaciones necesarias en el medio didáctico, el lugar del profesor y los estudiantes y la dilatación en el tiempo escolar que un estudio de estas características produce (Llanos et al., 2015). Este análisis permite además describir, analizar y evaluar la gestión del REI. Como indica Chevallard (2011), analizar y describir el REI implica identificar las decisiones consideradas en su interior con relación a las funciones didácticas o de producción, e identificar, como consecuencia, los alcances en la actividad matemática desarrollada con relación a las praxeologías activadas, construidas y visitadas durante el REI.

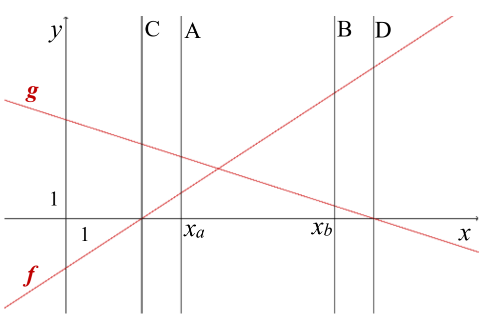
4. El REI y algunos resultados de su implementación

La pregunta Q_0: *¿cómo operar con curvas cualesquiera, si solo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?, permite* originar diferentes recorridos de estudio, dependiendo de las curvas que se adopten y de la operación entre las mismas. En el marco de esta investigación se han diseñado, implementado y analizado tres recorridos que permitieron estudiar praxeologías relativas a las funciones polinómicas (de grado dos y mayor) y las funciones racionales. La característica destacada de este REI es que estas praxeologías se estudian vinculadas a otras y las técnicas de geometría sintética para el estudio de las funciones se vuelve fundamental, así como las ecuaciones e inecuaciones vinculadas a estas funciones.

4.1. Parte 1: funciones polinómicas de grados dos

Como mencionamos antes, la implementación se realiza en principio en un 4.º año y en los años anteriores corresponde estudiar funciones afines. Como inicialización del estudio, entonces, se propone el problema de multiplicar dos funciones afines, a partir de la pregunta Q_1*: ¿cómo multiplicar dos funciones afines si solo se conoce la representación gráfica de las mismas y la unidad en los ejes?* Un ejemplo de algunas de las situaciones que se llevan al aula son las que aparecen en la Figura 4. Como se puede notar, las situaciones 1 y 4 son en apariencia similares, pero tienen alcances distintos. Con la primera es posible estudiar la parábola y los puntos destacados de la misma, mientras que con la situación 4 las representaciones analíticas equivalentes y la gráfica cuando se conocen las fórmulas. La situación 9 introduce el problema de las parábolas que no tienen ceros reales, y se desmitifica la idea de que todas las parábolas pueden obtenerse de la multiplicación de dos funciones afines. Estas situaciones y otras conforman lo que en el REI correspondería a la tarea del profesor, que es llevar las preguntas o situaciones para estudiar en la clase, así como grupos de tareas para afianzar las técnicas que se van desarrollando y una actividad especial que corresponde a lo que denominamos "actividad de síntesis".

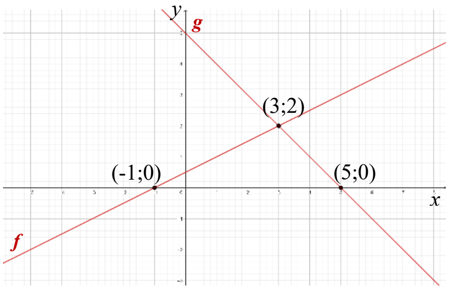
Figura 2. Representación gráfica de *f* y *g*



Situación 1. Las funciones *f* y *g* están dadas por los gráficos de las Figuras. Todas las rectas A//B//C//D, son perpendiculares al eje *x*. La función *h=f.g*

a) ¿Cuál podría ser la gráfica más razonable para *h*? ¿Qué características de la gráfica de *h* podrías justificar?
b) Para todo x_a y x_b equidistantes de los ceros de cada función, CA=BD. ¿Es verdad que $h(x_a)=h(x_b)$?
c) ¿Qué triángulos tendrías que construir para calcular la multiplicación entre *f* y *g* en el eje de simetría, utilizando como lado de uno de los triángulos, la unidad?

Figura 3. Representación gráfica de *f* y *g* y puntos notables



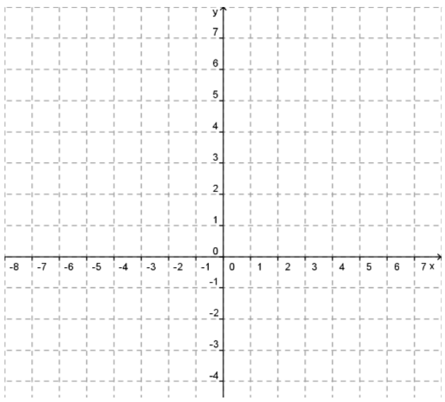
Situación 4. Las gráficas de las funciones *f* y *g* se cortan en (3;2). La función *f* interseca al eje x en $(-1;0)$ y g en (5;0). Sea $h=fg\ \forall\ x \in R$

a) Obtengan todas las fórmulas posibles y la representación cartesiana para h.

b) ¿Cuál es el valor de h para la abscisa de la mediatriz?

c) Si x_a y x_b son dos abscisas cualesquiera ubicadas a igual distancia respecto de cada cero de h es $h(x_a)=h(x_b)$ como hemos demostrado en las situaciones anteriores. Verifiquen con la fórmula obtenida para h, al menos 3 casos y representen los valores gráficamente.

Figura 4. Ejemplos de situaciones propuestas por el profesor-investigador para estudiar en el marco del REI



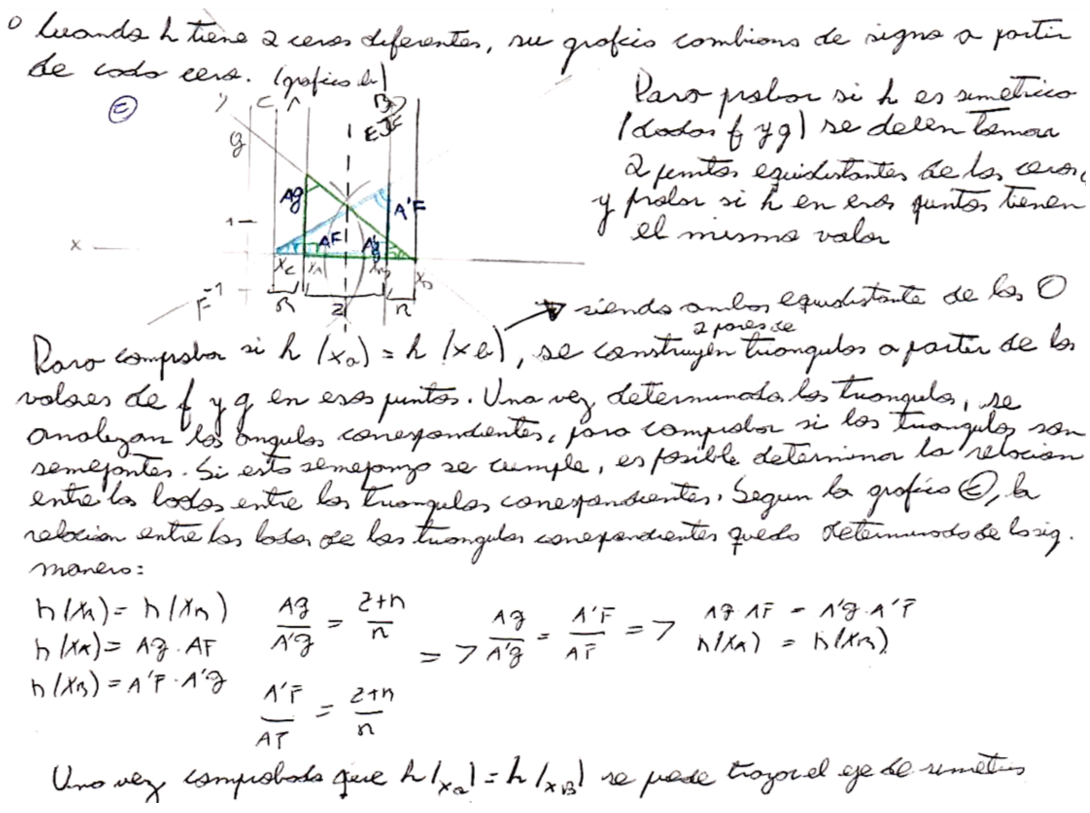
Situación 9. Sea h una función cuadrática de dominio real: $h(x) = x^2 + 2x + 5$

a) Obtener la forma factorizada de h.

b) Representar h gráficamente utilizando sus puntos notables.

Para ejemplificar los resultados de implementar esta parte del REI en la clase, seleccionamos protocolos de las “actividades de síntesis”. En estas actividades los alumnos dispuestos en los grupos de trabajo “sintetizan” lo que ellos consideran que han aprendido. Las primeras situaciones son variantes del problema de resolver la multiplicación de funciones afines cuando sólo se conocen las rectas y la unidad en los ejes. Se construyen los puntos notables de la parábola y lo que en la clase los estudiantes llaman “puntos seguros” que se obtienen de la unidad y sus múltiplos y los ceros. Hay que obtener una gráfica razonable de h, que es una parábola. Para una comprensión en detalle de cómo obtener y construir cada punto notable de la gráfica de h, sugerimos la publicación de Llanos y Otero (2013). Para ejemplificarlo aquí aclaramos que hay diferencias entre lo que los grupos sintetizan, pero es común que todos se enfoquen en los signos y en los ceros de h. Las diferencias están dadas por los grupos que destacan la prueba de la simetría y los que se enfocan en la técnica geométrica del vértice y su generalidad para cualquier punto. Se seleccionan aquí dos grupos, correspondientes a las Figuras 5 y 6.

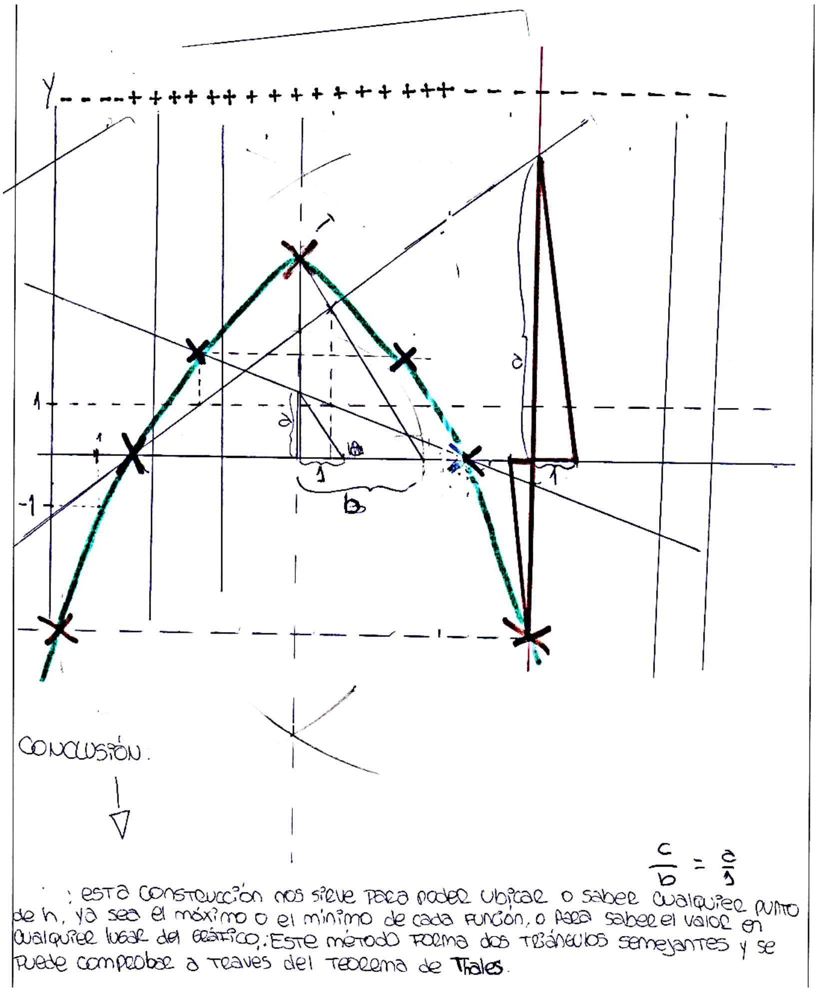
Figura 5. Protocolo correspondiente a la síntesis del grupo 7, implementación 2



El protocolo de la Figura 5 se selecciona por el análisis de los signos de *h* vinculado a la multiplicidad de los ceros, y por la prueba de la simetría. Como se indica en la figura, el análisis de la multiplicidad de los ceros, vinculado a los signos, les permite concluir que en los casos donde la parábola tiene un cero real doble se mantiene el signo salvo en el punto, y para los casos que tiene dos ceros reales distintos, concluyen que *h* siempre cambia de signos tres veces. Destacan además la prueba de la simetría, construyen los pares de triángulos, probando que estos son semejantes y por recurrencia al teorema de Thales prueban que $h(x_a) = h(x_b)$ para cualquier x_a y x_b equidistantes de los ceros de *h* y trazan el eje de simetría representado en la figura.

La imagen de la Figura 6, permite interpretar el potencial de la otra técnica destacada, relativa a la construcción de triángulos semejantes en el eje de simetría, utilizando la unidad para obtener el vértice. La generalidad de la técnica para cualquier otro punto que se quiera construir se evidencia en los triángulos rojos, la conclusión y el punto representado sobre la curva. Si bien en la representación escrita indican que sirve para obtener cualquier valor, lo que se destaca es el uso de la técnica de geometría sintética para construir cualquier punto de la curva, y en particular justificar el vértice, utilizando el Teorema de Thales y la semejanza de triángulos.

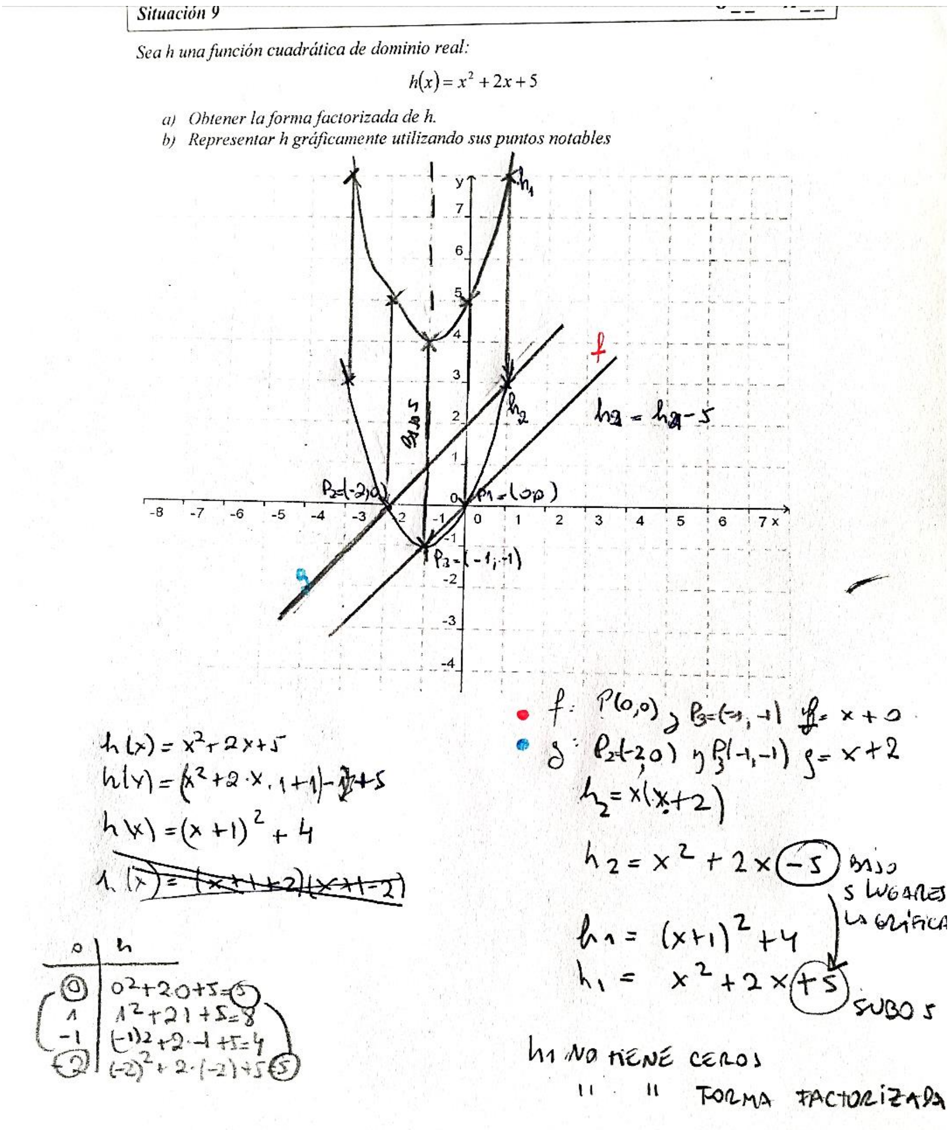
Figura 6. Protocolo correspondiente a la síntesis del grupo 1, implementación 3



De las Figuras 5 y 6 se interpreta que, no solo es posible obtener una gráfica razonable para *h*, sino que además se justifica cada punto destacado, los conjuntos de positividad y negatividad de una función, los ceros y su multiplicidad, vinculado al análisis de los signos. Es posible justificar la simetría y desarrollar una técnica que permita multiplicar segmentos, utilizando técnicas de geometría sintética, y, como se destaca en la Figura 6, esta técnica no sólo permite obtener el vértice (punto destacado de la curva) sino cualquier otro punto de la gráfica. Con estas situaciones no se puede acceder al análisis de las representaciones analíticas equivalentes de *h*, pero sí con la situación 5 puesta antes como ejemplo.

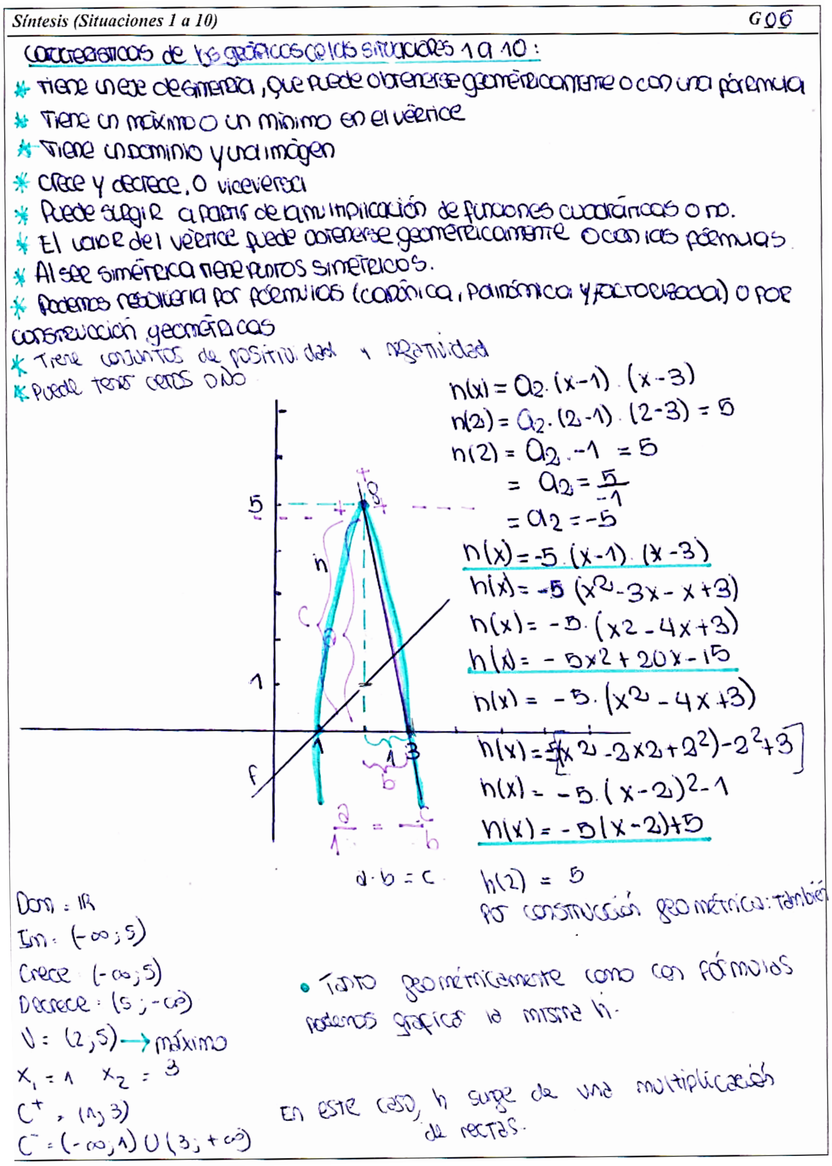
En la situación 5, el sistema de ejes es graduado y se conocen las coordenadas de algunos puntos de las rectas. Esto inicialmente permite obtener las representaciones analíticas de las funciones afines y luego la de $h = f \cdot g$. La característica destacada es que se comienza por la forma factorizada y luego la polinómica. Con las variantes de las funciones afines que se multiplican, se analizan los casos de representaciones algebraicas equivalentes, reforzando la idea “toda parábola proviene de la multiplicación de rectas”. Además, se ponen a consideración los diferentes pares de rectas que permiten reconstruir una misma representación gráfica de *h*. Se “rompe” aquí una idea arraigada que es que hay una única fórmula para una gráfica dada. Por otro lado, se reconstruye la técnica de completar cuadrados para el paso de la forma polinómica a la factorizada y, con la situación 9, se justifican los casos de parábolas que no tienen ceros reales. Entre los intentos posibles se identifican casos que permiten justificar que no tiene ceros reales y, por lo tanto, tampoco forma factorizada. Otros proponen trasladar la parábola para que sí corte al eje de las abscisas y lo hacen realizando movimientos en el plano. Por ejemplo, en el protocolo de la Figura 7 el grupo decide "bajar" 5 unidades para cada punto, obtener la gráfica congruente a la dada, encontrarle las rectas, y discutir analítica y gráficamente porque dicha representación no tiene ceros reales.

Figura 7. Protocolo correspondiente a la actividad 9, implementación 2



En la Figura 8 se muestra una síntesis de lo estudiado a partir de Q_1. Destacan que todas las características de la gráfica se pueden obtener tanto con la fórmula si se conoce o por recurrencia a las técnicas de geometría sintética. La multiplicidad de los ceros y el cambio o no de signos es otra característica destacada, así como el hecho de comenzar por la forma factorizada y después obtener las demás. Para los casos de funciones que no tienen forma factorizada se concluye que eso ocurre porque hay funciones polinómicas de grado dos que no son el resultado de multiplicar dos rectas. Se destaca también el hecho de valorar la prueba por la simetría y la construcción del vértice como una característica destacada, vinculado esto al estudio de las funciones polinómicas de segundo grado y la respectiva representación gráfica.

Figura 8. Protocolo correspondiente a la síntesis del grupo 6, implementación 4



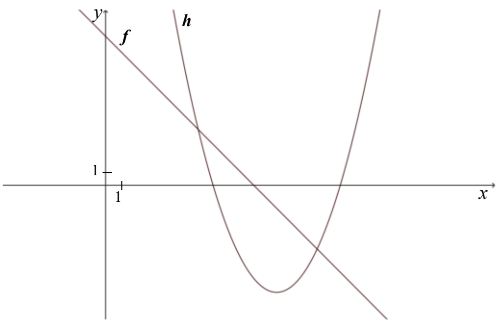
¿Cuáles son los alcances de este estudio? La generalidad que cada técnica construida tiene para seguir estudiando otras funciones algebraicas. Específicamente en las implementaciones del REI se continúa al año siguiente con los mismos estudiantes y cambia la pregunta por Q_2: *¿cómo multiplicar más de dos rectas o rectas y parábolas o parábolas, si solo se conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?*, lo que permite estudiar las funciones polinómicas.

4.2. Parte 2: las funciones polinómicas

La organización es similar, cambian las curvas. Ahora se multiplican más de dos rectas o rectas y parábolas o dos parábolas. Con las primeras situaciones se estudian las características de la gráfica de las funciones polinómicas y luego las representaciones analíticas, comenzando por la forma factorizada. Las operaciones con polinomios son tratadas algebraicamente y los estudiantes proponen el método gráfico para verificar.

Se proponen aquí, y a modo de ejemplo, también dos situaciones de esta parte del REI que son, en apariencia, similares a las de la primera parte, pero ahora corresponde multiplicar más de dos rectas o una recta y una parábola. En el trabajo de Llanos et al. (2015) hay un desarrollo de los alcances de esta parte del REI, y aquí recuperamos las características de la gráfica de las funciones polinómicas.

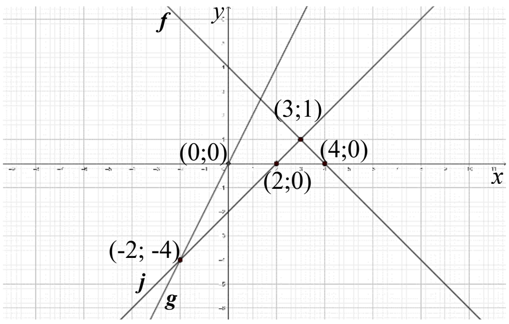
Figura 9. Representación gráfica de *h* y *g*



Situación 2. Las funciones *f* y *h* respectivamente están dadas por el gráfico de la Figura. La función *p=f·h*.

a) ¿Cuáles son los puntos seguros y los signos de p?
b) ¿Cuál podría ser representación gráfica más razonable para p?
c) ¿Qué características de la gráfica de p podrías justificar?

Figura 10. Representación gráfica de *f*, *g* y *j* y puntos notables

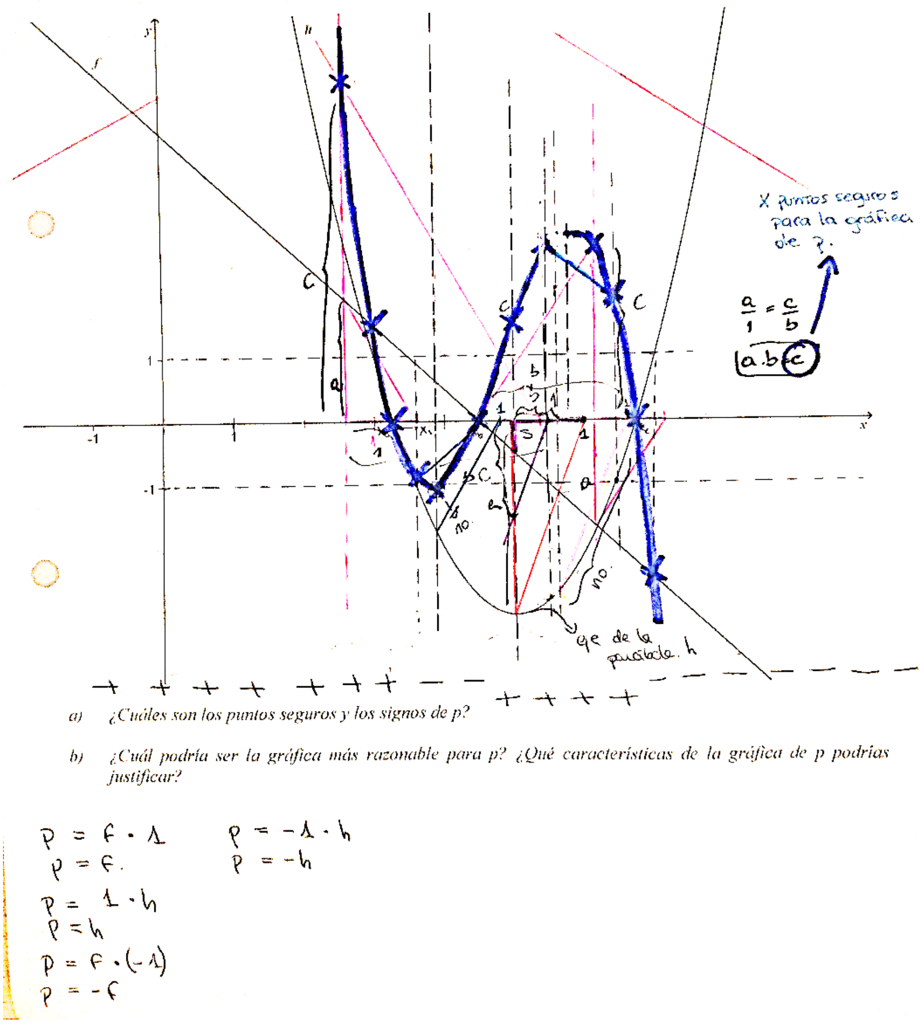


Situación 4. Las gráficas de las funciones f y g se cortan en (3;2). La función f interseca al eje x en (-1;0) y g en (5;0). Sea h=f·g $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Obtener las fórmulas para *p* en forma factorizada y polinómica.
b) Graficar *p* e indicar las características de la gráfica. Justificar.

Con las primeras situaciones se estudian las características de la gráfica de las funciones polinómicas y se concluye que es posible obtener la gráfica de cualquier función polinómica a partir de la multiplicación de otras del mismo tipo. Por tratarse del estudio de otra pregunta también derivada de Q_0, parece relativamente natural que los estudiantes pueden recuperar las técnicas desarrolladas antes, y no tienen dificultades en construir, explicar y justificar la multiplicación entre funciones polinómicas tanto gráfica como algebraicamente. Por ejemplo, en la Figura 11 se ejemplifica el caso de la multiplicación entre una recta y una parábola, cuando sólo se conoce la representación gráfica de las mismas y la unidad, correspondiente a la situación 2. Como se muestra en la imagen, los estudiantes recuperan las técnicas desarrolladas en la primera parte del REI, y analizan: ceros, signos, puntos seguros, y la generalización de la técnica del vértice para construir varios otros puntos de la gráfica de *p*. La gráfica que obtienen es razonable y analizan los casos de las ramas infinitas de estas curvas.

Figura 11. Protocolo correspondiente a la síntesis del grupo 6, implementación 4

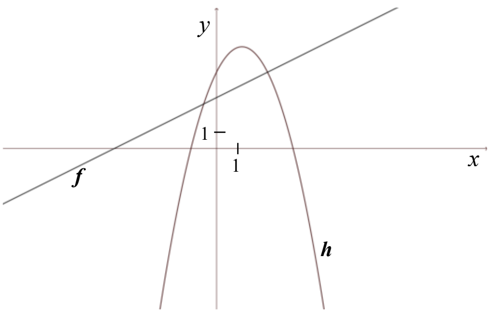


A partir de la situación 4, se multiplican funciones polinómicas dadas en un sistema de ejes graduados, y además se conocen algunos puntos dados. Una característica destacada es que también se conocen las representaciones algebraicas de la función polinómica primero en la forma factorizada. Se destaca el hecho de que resulta natural para los alumnos preguntarse en esta instancia por las posibles formas de descomposición de una función: ¿cuáles son las rectas que multiplicadas generan “esta” función p? Para las operaciones con polinomios, se recupera el dominio geométrico, porque las operaciones con polinomios las justifican también gráficamente. Entre las operaciones, se considera la suma, resta y multiplicación, ya que aparece el problema de la división en el marco gráfico. Esto dio lugar a la pregunta por Q_3: *¿cómo realizar el cociente entre funciones polinómicas, si solo se* *conoce su representación gráfica y la unidad en los ejes?*, lo que da lugar al estudio de las funciones racionales.

4.3 Parte 3: funciones racionales

El problema no resuelto de la parte 2, acerca de cómo realizar el cociente con las funciones polinómicas, otorga sentido a este estudio. Como en las partes anteriores, las primeras situaciones requieren construir características de la gráfica, ahora de las funciones racionales y luego, las representaciones algebraicas equivalentes de dichas funciones. Entre las características destacadas del estudio de las funciones racionales, se consideran los casos de asíntotas verticales, horizontales, oblicuas y puntos de discontinuidad; tanto gráfica como algebraicamente. Las operaciones con funciones racionales también forman parte de lo reconstruido en esta parte del REI. En el trabajo de Llanos et al. (2017) hay un desarrollo de los alcances de este estudio, y aquí recuperamos, a modo de ejemplo, algunas situaciones y resultados de realizar ahora el cociente con funciones polinómicas, específicamente entre una parábola y una recta.

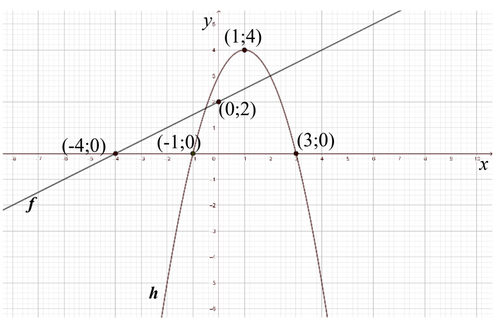
Figura 12. Representación gráfica de *h* y *f*



Situación 2. Las funciones f y g están dadas por los gráficos de la figura. La función $q=\frac{f}{h}$ según corresponde.

a) ¿Cuál podría ser la gráfica más razonable para q? ¿Qué características de la gráfica de q podrías justificar?
b) ¿Es q la representación gráfica de una función?

Figura 13. Representación gráfica de *f* y *h* y puntos notables

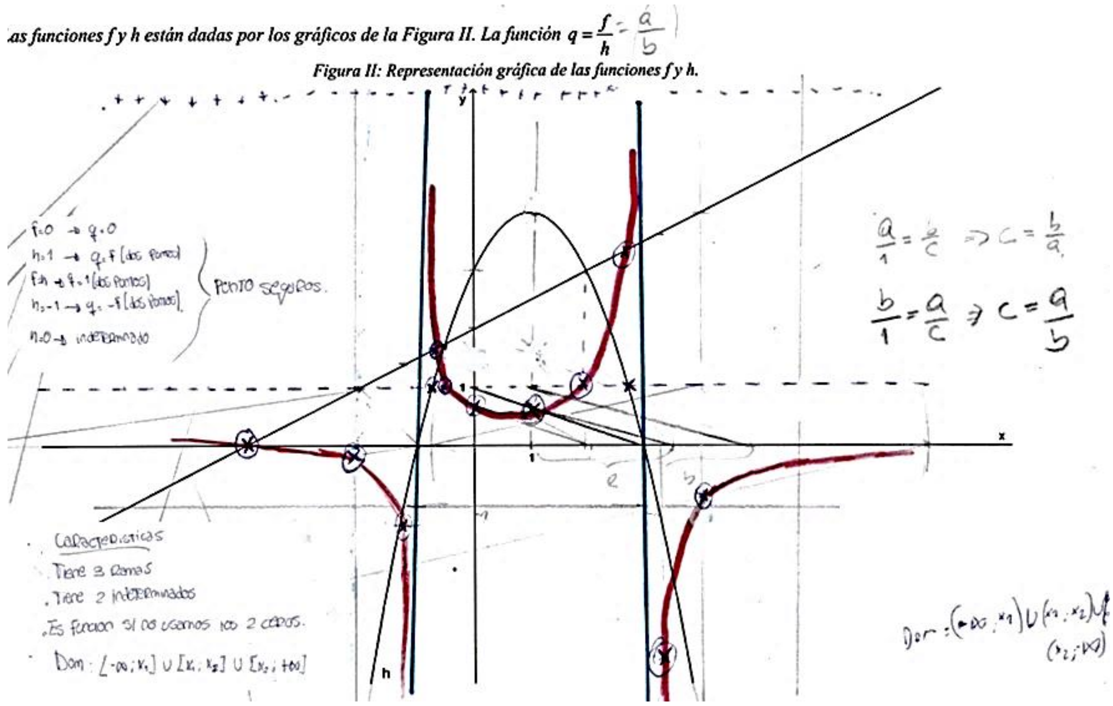


Situación 4. Las funciones *f* y *h* están dadas por el gráfico de la figura 11. La función *h* tiene el vértice en (1;4) y los ceros en x=-1 y x=3. La función *f* interseca al eje *x* en (-4;0) y al eje *y* en (0;2). La función $q=\frac{f}{h}$

a) Obtener las expresiones algebraicas posibles para q.
b) Graficar q e indicar las características de la gráfica. Justificar.

Para ejemplificar esta parte del estudio, en la Figura 14 se selecciona un protocolo que muestra cómo se recuperan los signos, ceros, unos y el caso especial de lo que los estudiantes denominan “la división por cero” que no es posible. Además de los puntos seguros, realizan la adaptación de la técnica ahora para el caso del cociente de segmentos, lo que permite obtener cualquier punto seguro, salvo la división por cero. Como puede interpretarse, obtienen una representación gráfica que es muy razonable, indican que tiene tres ramas, representan gráficamente las asíntotas verticales (que las llaman aquí indeterminadas), definen los conjuntos de positividad y negatividad y el cero de la función.

Figura 14. Protocolo correspondiente a A49, de la implementación 4



Se destaca en esta parte del estudio el desarrollo de las técnicas de geometría sintética y analítica desarrolladas para las funciones polinómicas, adaptadas ahora a las funciones racionales. Fue posible obtener las características de la representación gráfica de las funciones racionales. La identificación de los ceros, y el planteo de las asíntotas aparece desde el principio. El valor de las técnicas de geometría sintética en este punto es fundamental. Los puntos notables y el análisis de los signos también aparecen de forma relativamente natural para el caso del cociente. Fue posible reconstruir las características de las representaciones algebraicas de las funciones racionales a partir del cálculo algebraico del cociente de polinomios.

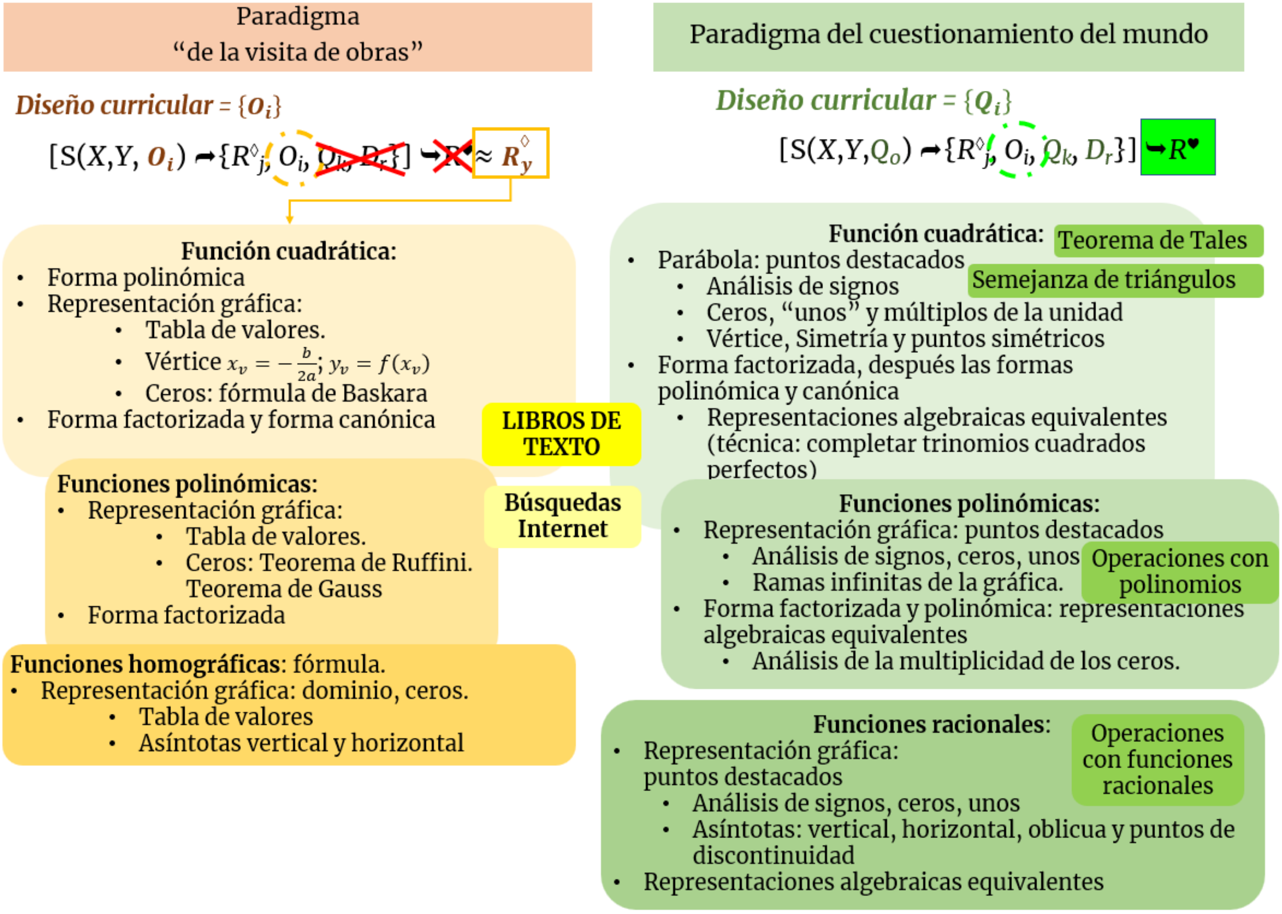
En el marco analítico se analizan también los ceros, las asíntotas y los puntos de discontinuidad, considerando también los posibles casos de simplificación. Se desarrollan técnicas para realizar la suma, resta, multiplicación y división con funciones racionales, recuperando los desarrollos de las otras partes del REI. El problema de la simplificación también se resuelve por recurrencia a las funciones del mismo tipo de grado menor entre las que se plantea el cociente.

5. Discusión de los resultados y praxeologías reconstruidas

En otros trabajos hemos discutido acerca del funcionamiento del REI en la escuela secundaria y las adaptaciones necesarias para que el estudio longitudinal sea posible. Aquí nos proponemos realizar un cuestionamiento acerca de las praxeologías reencontradas en el REI y el alcance de las mismas respecto de la enseñanza tradicional habitual. Recuperamos las características y los elementos del esquema herbartiano tanto en el paradigma de la "visita de obras" como en el PCM, e identificamos las praxeologías en cada caso. El esquema de la Figura 15 sintetiza las praxeologías que pueden ser reencontradas, teniendo en cuenta que las del PCM se corresponden con los resultados de implementar el REI, y las de la "visita de obras" están definidas en función del programa de la escuela secundaria y de los libros de texto que son la referencia disponible para los profesores.

En primer lugar, y según se sintetiza en el esquema, se identifican diferencias en el alcance de las praxeologías entre lo que se podría reconocer como paradigma de la "visita de obras" y el PCM. En el caso de las funciones polinómicas de grado dos identificamos que, en el planteo tradicional actual y en los libros de texto, aparece primero la definición de la función cuadrática en la forma polinómica, todo lo demás es una consecuencia de esta fórmula. La forma factorizada se deduce de la fórmula de Bhaskara. Sin embargo, algunos libros ya no la incluyen, lo que provoca que el análisis de los ceros, su multiplicidad y las formas factorizada y canónica no se consideren en ciertos casos. Estas representaciones algebraicas equivalentes a la forma polinómica están "dadas" sin cuestionamiento y a lo sumo solo se reemplazan valores cuando se conocen las coordenadas del vértice y los ceros respectivamente. La gráfica se obtiene utilizando una tabla de valores, a partir de algunos puntos seleccionados arbitrariamente. Las características y los puntos destacados de la parábola tampoco son cuestionados, "caen del cielo". Por otro lado, las funciones polinómicas no aparecen vinculadas a las anteriores. Primero la definición de las funciones a partir de la fórmula general, y luego algún caso particular, llegando a lo sumo al grado 4. Para la gráfica, se utiliza la tabla de valores para identificar las formas de la curva vinculada a la fórmula. Se pone énfasis ahora en la factorización de polinomios a partir de los Teoremas de Ruffini y de Gauss. Las operaciones con polinomios no están vinculadas al estudio de las funciones, de hecho, en el programa de la escuela secundaria un año corresponde estudiar operaciones con polinomios, y al año siguiente funciones polinómicas. Entre las funciones racionales solo se estudian las homográficas y aparecen también desvinculadas de las polinómicas. La tabla de valores para graficar adquiere un papel importante, dado que se analizan valores próximos a las asíntotas. Solo se consideran los casos de asíntotas verticales y horizontales y los ceros.

Figura 15. praxeologías identificadas en el paradigma de la “visita de obras” y en el PCM



Con el REI es posible estudiar todas las funciones algebraicas adaptando técnicas generadas en otras partes del estudio. Específicamente, por las características del contexto se parte de las funciones afines y todo es construcción a partir de estas. Las funciones polinómicas de grado dos y mayor son una consecuencia de realizar la multiplicación de otras funciones del mismo tipo de grado menor, y en las funciones racionales el cociente entre polinómicas. A diferencia del paradigma de “visita de obras”, en el REI, primero se construye la gráfica y se justifica cada característica y punto destacado, y luego las representaciones algebraicas equivalentes, comenzando siempre por la forma factorizada. En particular:

- En la primera parte se reconstruyen las características y puntos notables de las parábolas. Se destaca el desarrollo de las técnicas de geometría sintética para justificar el vértice y la simetría de la curva, así como el análisis de la multiplicidad de los ceros vinculado al análisis de los signos. Las representaciones algebraicas equivalentes de las funciones polinómicas de segundo grado también se justifican por recurrencia a las rectas. La otra característica destacada es que se obtiene primero la forma factorizada, y luego la forma polinómica. La técnica de completar el trinomio cuadrado perfecto adquiere un papel fundamental para obtener la forma factorizada, los ceros, y también porque adquiere relevancia la forma canónica, y ocurre inicialmente para los casos de las parábolas que no tienen ceros reales. El hecho de comenzar por la multiplicación de las funciones afines permite justificar que hay infinitos pares de rectas que generan una misma parábola y, por lo tanto, también se rompe con otra idea arraigada de la enseñanza habitual, de que cada gráfica tiene una única fórmula vinculada.

- En la segunda parte, relativa al estudio de las funciones polinómicas, se destaca la generalidad que adquieren las técnicas desarrolladas antes y, específicamente, la técnica de geometría sintética para construir el vértice de la parábola, que se usa aquí para obtener cualquier punto de la gráfica de una función polinómica y justificar las ramas infinitas de las mismas. Se recupera también el análisis relativo a la multiplicidad de los ceros vinculado al cambio o no de signo de la función. Con relación a las representaciones algebraicas equivalentes, primero se obtiene la forma factorizada de la función polinómica de manera "casi natural", y luego la forma polinómica. No tienen dificultades en construir, explicar y justificar una técnica para realizar la multiplicación de polinomios y continuamente se recupera el dominio geométrico, porque las operaciones con polinomios las justifican gráficamente.

- Las funciones racionales son una consecuencia también del estudio de las polinómicas. Primero se construyen las características de la gráfica de las funciones racionales. La identificación de los ceros, el análisis de los signos y el planteo de las asíntotas verticales aparece desde el principio. El valor de las técnicas de geometría sintética es en este punto fundamental, porque se adaptan las desarrolladas antes, ahora para el caso del cociente. Las representaciones algebraicas también se obtienen de manera natural, porque se trata de plantear el cociente entre las funciones polinómicas estudiadas antes. Además, se estudian los casos de asíntotas verticales, horizontales, oblicuas y se analizan los puntos de discontinuidad; considerando también los posibles casos de simplificación.

En cada parte del estudio, las operaciones con funciones se realizan algebraicamente y también en el marco gráfico, y esto es otra diferencia importante.

Podemos poner a consideración la posibilidad de comenzar o no por el estudio de las representaciones gráficas vinculadas a cada función y el desarrollo de las técnicas de geometría sintética. Tal vez una opción alternativa sea directamente comenzar realizando la multiplicación de dos funciones afines cuando se conocen algunos puntos dados y los ejes de coordenadas graduados. Esto permitiría obtener la representación algebraica de las funciones estudiadas en la forma factorizada primero, y luego la gráfica. Con esto no se propone realizar el análisis de los parámetros en cada una de las formas posibles sobre la visualización de la gráfica obtenida por una tabla de números seleccionados arbitrariamente. Tampoco con la emergencia de las TIC, y su uso supuestamente masivo, donde la ostensividad puede aumentar y el análisis puede empobrecerse si no existe cuestionamiento. Lo que proponemos como una opción viable es considerar la posibilidad de evitar las técnicas de geometría sintética dado el dominio de los estudiantes con las técnicas algebraicas y una vez conocidas las representaciones algebraicas de las funciones, analizar, construir y justificar cada punto notable y características de las representaciones gráficas, adquiriendo los números y las fórmulas vinculadas a cada función un papel preponderante.

6. Conclusión

En este trabajo se analizaron las características de las praxeologías reencontradas con el REI, en un estudio longitudinal que dura dos años. Si bien dichas praxeologías coinciden con las que se estudian habitualmente, el alcance de las mismas es distinto y se identifica que en el paradigma de “visita de obras” propio de la enseñanza habitual el saber se presenta como “transparente” e incuestionable, y las praxeologías incompletas. Si bien, frente a la pregunta ¿cuáles son los alcances y limitaciones del REI con relación a las praxeologías involucradas, respecto de la enseñanza habitual?, hemos hecho referencia a las virtudes del REI respecto de la enseñanza tradicional, no podemos dejar de mencionar limitaciones importantes para sostener en el tiempo una enseñanza de estas características, a saber:

- Restricciones institucionales vinculadas con un cambio radical en la organización de la clase que incluye nuevos acuerdos para que la enseñanza por REI sea posible.
- Restricciones por los cambios necesarios en los roles del profesor, de los estudiantes y también del funcionamiento de la clase en general. Los estudiantes al inicio presentaron mucha resistencia para aceptar que el profesor no explica siempre y que hay que estudiar con otros, que la respuesta no aparece como tal en ningún libro, ni en internet. También la gestión del REI puso al profesor, entre otros obstáculos, a resistir a la incertidumbre cuando las respuestas de los estudiantes no aparecen.
- Adaptación a los nuevos sistemas de la información, dado que el profesor no tiene un lugar privilegiado con relación al saber, tampoco hay un único libro de texto que serviría de “guía” para estudiar matemática, además de cualquier otro sistema de información que llegue a la clase que debe ser cuestionado. El profesor es un media más, y es el responsable de llevar una “buena pregunta” que desencadena el estudio. Sin embargo, la relación de los estudiantes de secundaria con la generación de otras preguntas suele ser muy débil, y la investigación muestra que esto puede modificarse progresivamente y tornarse una actitud más o menos asumida por ellos.
- Ha sido también una dificultad para el docente asumir su papel de director del estudio, aceptando que es el grupo de clase el que decide el curso de acción.
- También restricciones relativas a la acreditación de la materia, pues de este modo “pierde” fuerza la evaluación institucional tradicional, dado que con el REI la acreditación se realizó clase a clase con los grupos de estudio.

Pero a pesar de los obstáculos, la implementación fue posible y positiva. Recuperar un cuestionamiento del saber es esencial en cualquier sistema de enseñanza. Esto es viable y se evidencia en el estudio longitudinal.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica. Ingeniería didáctica en educación matemática*. Iberoamérica.

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1999) El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2001). *Aspectos problemáticos de la formación docente*. Manuscrito no publicado.

Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. Manuscrito no publicado.

Chevallard, Y. (2011). Quel programme pour l´avenir de la recherche en TAD?. Trabajo publicado en Actas del *III International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic* (III CITAD) (pp. 23-32).

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 161-182. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 20*(1), 159-169.

Douady, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 5-31.

Florensa, I., García, F. J., & Sala, G. (2020). Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática: Estudios de caso en distintos niveles educativos. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 17*, 21-37. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i17.315

García, F. J., Baquero, B., Florensa, I., & Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 15*, 75-94. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.267

Gazzola, M., Otero, M., & Llanos, V. (2021). Recorrido de estudio e investigación en física y matemáticas en la escuela secundaria. *Praxis & Saber, 12*(31), 1-20. https://doi.org/10.19053/22160159.v12.n31.2021.11151

Llanos, V. C., & Otero, M. R. (2013). Operaciones con curvas y estudio de funciones. *Revista SUMA+ para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, 73*, 17-24.

Llanos, V. C., Otero, M. R., & Colombo, E. (2015). The polynomial functions as result of multiplying curves in the framework of a Research and Study Paths. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education, 4*(1), 80-98. https://doi.org/10.4471/redimat.2015.60

Llanos, V. C., Otero, M. R., & Gazzola, M. P. (2016). *Estudio de funciones algebraicas en la escuela secundaria: una propuesta para su enseñanza en los marcos geométrico, analítico, gráfico y funcional*. UNICEN.

Llanos, V. C., Otero, M. R., & Gazzola, M. P. (2017). Étude des fonctions algébriques dans le cadre d'un Parcours d'Étude et de Recherche (PER) dans l'école secondaire: le cas des fonctions rationnelles. *Educational Journal of the University of Patras UNESCO Chair, 4*(1), 1-16.

Otero, M. R., Llanos, V. C., & Arlego, M. (2020). Mathematics and Physics Study and Research Paths within two groups of pre-service teacher Education. *Educação*

Matemática Pesquisa, São Paulo, 22(4), 742-755. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p711-724

Otero, M. R., Llanos, V. C., & Parra, V. (2020). Training in-service teachers: study of questions and the organization of teaching. *Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, 22*(4), 711-724. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p742-755

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(23), 133-170. La Pensée Sauvage, Marseille.

∞

Viviana Carolina Llanos

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT), UNICEN, CONICET (Argentina)
vcllanos@niecyt.exa.unicen.edu.ar | https://orcid.org/0000-0003-0433-2654

María Rita Otero

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT), UNICEN, CONICET (Argentina)
rotero@niecyt.exa.unicen.edu.ar | https://orcid.org/0000-0002-1682-9142

María Paz Gazzola

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT), UNICEN, CONICET (Argentina)
mpgazzola@niecyt.exa.unicen.edu.ar | https://orcid.org/0000-0002-6115-0817

Recibido: 21 de febrero de 2022
Aceptado: 25 de febrero de 2024

From "Visit of the Works" to the "Questioning of the World" in Argentine Secondary School

Viviana Carolina Llanos @, María Rita Otero @, María Paz Gazzola @

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT), UNICEN, CONICET (Argentina)

In this work, the results of implementing a study and research path (SRP) in regular high school courses in Argentina with 163 students are analyzed. The Anthropological Theory of the Didactic (ATD) by Yves Chevallard is adopted to define the scope of an emerging paradigm, that of questioning the world based on an SRP, as a response to another in crisis, that of the "visit of works." The SRP that is generated from the question Q_0: How to operate with any curves if only their graphic representation and the unit on the axes are known? and allows you to study all algebraic functions by adapting techniques generated in the different parts of the study. Specifically, due to the characteristics of the context, we start with lineal functions, and everything is a construction based on these. Polynomial functions of degree two and higher are a consequence of multiplying other functions of the same type of lower degree, and in rational functions, the quotient between polynomials. Unlike the "site visit" paradigm, in the SRP the graph is first constructed, and each characteristic is justified, and then the equivalent algebraic representations, always starting with the factored form. The praxeologies that are studied with the SRP and the scope regarding usual teaching are analyzed, pointing out positive aspects and also the restrictions that are presented in a study of these characteristics, which include: the institutional restrictions themselves linked to a radical change in the class organization; restrictions for necessary changes in teacher and student roles; and the adaptation to information systems, given that the teacher does not have a privileged place in relation to knowledge, nor does the use of the textbook as is usual. The results reveal the differences of introducing teaching through research and questioning regarding the usual traditional approach, mainly in relation to knowledge and the organization of a class.