AIEM

AVANCES DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

ISSN 2254-4313 | (2024) 25, 131-149 | aiem.es

seiem.es

El papel de las conexiones intra-matemáticas en el aprendizaje de los números decimales

The Role of Intra-mathematical Connections in Learning Decimal Numbers

Genaro de Gamboa @ [1], Sofía Caviedes @ [2], Edelmira Badillo @ [1]

[1] Universidad de los Lagos (Chile)
[2] Universitat Autònoma de Barcelona (España)

Resumen ∞ Las diferentes caracterizaciones propuestas para el sentido numérico coinciden en la necesidad de promover el establecimiento de conexiones para el uso estratégico de los números racionales por parte de los estudiantes. El presente estudio sigue un diseño de estudio de casos dónde se analizan ocho sesiones de clase de un grupo de estudiantes de 12-13 años que estudian los números decimales. Los resultados muestran una relación entre la emergencia de tipos específicos de conexiones matemáticas y el posible desarrollo de componentes específicas del sentido numérico en los estudiantes. Se señala una especial relevancia de las conexiones de tipo "justificación" en la construcción de aspectos fundamentales del sentido numérico y se discuten oportunidades para refinar modelos de referencia de las conexiones matemáticas.

Palabras clave ∞ Conexiones matemáticas; Números racionales; Números decimales; Sentido numérico; Educación secundaria

Abstract ∞ Several characterizations proposed for number sense coincide in the need to promote the establishment of connections for the strategic use of rational numbers by students. This study follows a case study design for the analysis of eight class sessions of a group of 12–13-year-old students who study decimal numbers. Results show a relationship between the emergence of specific types of mathematical connections and the possible development of specific components of number sense in students. A special relevance of "justification" type connections is pointed out in the construction of fundamental aspects of number sense. Opportunities to refine reference models of mathematical connections are also discussed.

Keywords ∞ Mathematical connections; Rational numbers; Decimal numbers; Number sense; Secondary education

De Gamboa, G., Caviedes, S., & Badillo, E. (2024). El papel de las conexiones intra-matemáticas en el aprendizaje de los números decimales. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática, 25*, 131-149. https://doi.org/10.35763/aiem25.6399

1. Introducción

Existe cierto consenso en que el sentido numérico corresponde a la comprensión intuitiva y flexible que un individuo tiene de los números, su magnitud y las relaciones entre ellos (p. e., Ghazali et al., 2021; Nickerson y Whitacre, 2010). Así, el sentido numérico lleva asociada una comprensión profunda de las relaciones entre los números, las operaciones y su uso flexible en diversos contextos (Schneider y Thompson, 2000). Los alumnos con un buen sentido numérico pueden establecer conexiones entre conceptos matemáticos, por ejemplo, entre los números enteros y racionales (fracciones, decimales y porcentajes); aplicar estrategias para resolver problemas y comprender el significado de los números en situaciones del mundo real (Gay y Aichele, 1997); o transitar entre las notaciones decimal y fraccionaria para decidir cuándo es oportuno utilizar cada notación numérica (Charalambous y Pitta-Pantazi 2007). En este sentido, resulta necesario realizar esfuerzos tanto para mejorar las prácticas de instrucción de una notación concreta, como para facilitar la transferencia de conocimientos de una notación a otra (Tian y Siegler, 2018), lo que implica el establecimiento de conexiones intra-matemáticas entre conceptos, procedimientos o representaciones. En el caso particular de los números decimales, la literatura evidencia concepciones erróneas arraigadas por parte de los alumnos (p. e., González-Forte et al., 2022; VanHoof et al., 2015), por ejemplo, en relación con la longitud de los números decimales o con la densidad de los racionales dentro de los números reales. Aunque algunos estudios han propuesto diferentes maneras de direccionar las concepciones erróneas de los estudiantes (Isotani et al., 2011; Rathouz, 2011), aún falta desarrollar investigaciones que particularicen el sentido numérico centrado en los decimales (Şengül y Gülbağcı, 2012) usando la noción de conexión matemática como una oportunidad para robustecer el sentido numérico en el contexto de los números decimales. En este contexto, se abordará la siguiente pregunta de investigación, ¿cómo se relaciona la complejidad de las conexiones matemáticas que se establecen en el aula con la construcción del sentido numérico al trabajar con números decimales? Para dar respuesta a dicha pregunta, el objetivo del presente artículo es identificar la manera en que el sentido numérico se construye a partir del establecimiento de conexiones matemáticas. En particular, se presenta un estudio en el que se analizan sesiones habituales de clase de alumnos de 12-13 años cuando estudian los números decimales.

2. Marco teórico

2.1. Sentido numérico y números decimales

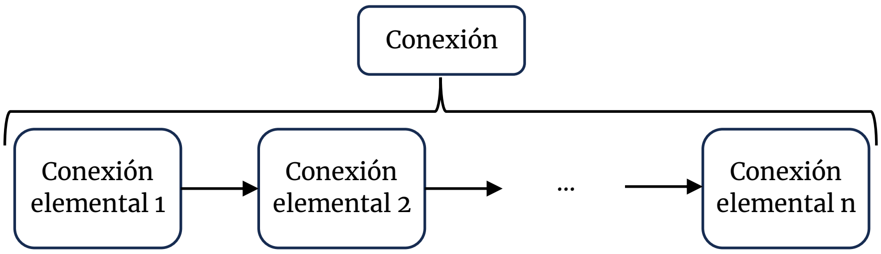
En la literatura se reportan diferentes clasificaciones para las componentes del sentido numérico. McIntosh et al. (1992) distinguen tres componentes, a partir de las cuales es posible definir el sentido numérico: conocimiento de los números, conocimiento de las operaciones, y aplicación del conocimiento de los números y las operaciones a entornos computacionales. Esta definición comparte con otras que se han ido proponiendo a lo largo de los años (p. e. Şengül y Gülbağcı, 2012; Sowder, 1992; Yang et al., 2004), el desarrollo de tres componentes básicas: números, operaciones y un uso estratégico de los números y las operaciones. Estas tres componentes básicas se pueden observar también en el estudio de Ghazali et al. (2021), donde realizan una revisión sistemática de las publicaciones relevantes sobre sentido numérico hasta 2020 y describen los elementos del sentido numérico que generan más consenso. En este estudio tomamos como referencia cuatro componentes del sentido numérico identificadas por Ghazali et al. (2021) y las complementamos usando algunos elementos desarrollados en definiciones anteriores que se han usado ampliamente en la literatura sobre sentido numérico (p. e. McIntosh et al., 1992; Yang et al., 2004). La primera componente es la *identificación de números* y está relacionada con reconocer números en registros de representación diferentes (Ghazali, 2021), y con lo que McIntosh et al. (1992) definen como conocer que los números admiten múltiples representaciones y reconocer que algunas son más útiles que otras en determinadas situaciones. La segunda componente corresponde a la *magnitud de un número* y se refiere a ordenar números y cantidades, a ordenar su magnitud relativa y a la posición en la recta numérica (Ghazali et al., 2021), lo que McIntosh et al. (1992) definen como el sentido del orden de los números, reconocer el tamaño relativo y absoluto de la magnitud de los números, y conocer valores de referencia. Por ejemplo, distinguir que 0,352 es menor que 0,4 atendiendo al valor posicional de las cifras. Las dos primeras componentes se relacionan con errores comunes en los estudiantes al trabajar con números racionales como la *regla de los números enteros* (Resnick et al., 1989; Tian y Siegler, 2018), que se refiere a identificar una expresión más larga como un número mayor, por ejemplo $3{,}154 > 3{,}2$; la *regla de la fracción* (Resnick et al., 1989; Tian y Siegler, 2018), que se refiere a considerar cualquier número expresado hasta las centésimas como menor a otro expresado en décimas, ya que las décimas son mayores que las centésimas; o la *densidad de los números racionales*, cuando se afirma que entre dos números decimales “pseudo-consecutivos” no es posible encontrar otros números (p. e., González-Forte et al., 2022).

La tercera componente corresponde al *sentido de las operaciones* aritméticas, referido a la capacidad para realizar operaciones simples y combinadas con uno y varios dígitos, y a la capacidad para realizar cálculos mentales, según Ghazali et al. (2021). Consideramos fundamental incorporar también elementos de la definición de McIntosh et al. (1992) del conocimiento de las operaciones, como comprender el efecto de las operaciones, las propiedades de las operaciones, y las relaciones entre las operaciones. Esta componente incluye la habilidad para alinear correctamente los números decimales en operaciones de adición y sustracción; para ubicar correctamente el punto decimal en la multiplicación y división; y para superar la concepción errónea de que la multiplicación aumenta y la división disminuye al número en cuestión (Hiebert y Wearne, 1986). Un error vinculado con el sentido de las operaciones es el principio de *dirección de efectos*, es decir, la magnitud del resultado está en la dirección equivocada en relación con los operandos y la operación (Tian y Siegler, 2018). Esto es, cuando los alumnos erróneamente creen que multiplicar un número decimal por otro lo aumenta, mientras que dividirlo lo disminuye (Verschaffel et al., 2007). La cuarta componente es *la razonabilidad* (*Make judgment*), que Ghazali et al. (2021) vinculan con el uso de valores de referencia, juzgar la razonabilidad o resolver problemas. En este estudio, incluimos también otros elementos que no salen explícitamente en la propuesta de Ghazali et al. (2021) y que están vinculados con lo que Yang et al. (2004) llaman desarrollar estrategias prácticas, flexibles y eficientes. En particular, destacamos lo que McIntosh et al. (1992) llaman aplicación del conocimiento de los números y las operaciones a entornos computacionales: comprender la relación entre el contexto del problema y la operación necesaria; ser consciente de que existen múltiples estrategias (cálculo mental, escrito, estimación…); utilizar una representación y/o un método eficiente; y revisar los datos y los resultados. Entendemos la componente razonabilidad como el uso estratégico, flexible y eficiente de los conocimientos definidos en las tres primeras componentes, vinculado a la toma de decisiones para resolver problemas en el sentido de McIntosh et al. (1992).

2.2. Conexiones matemáticas

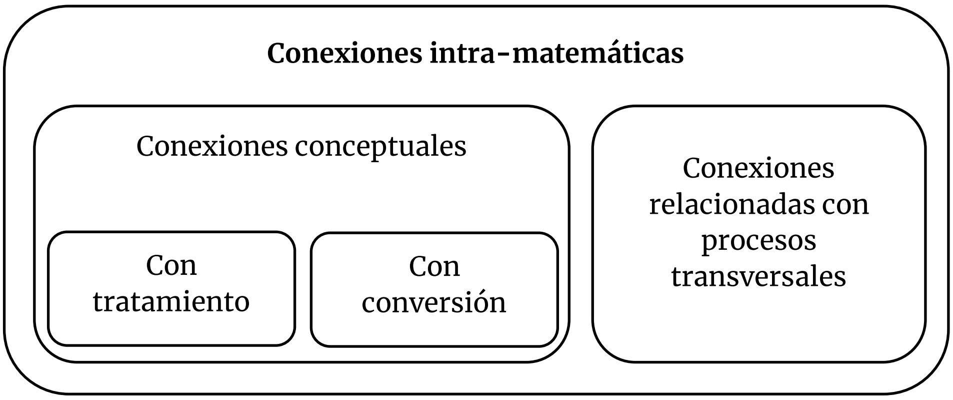
En las últimas tres décadas la noción de conexión ha cobrado un creciente protagonismo en la investigación en Educación matemática, emergiendo como una parte esencial en la construcción de conocimiento matemático, con diferentes niveles de concreción, y con diferentes marcos teóricos relacionados con la práctica matemática. El interés creciente por las conexiones matemáticas ha llevado a los investigadores en Educación Matemática a explicitar una conceptualización para tal noción, permitiendo una caracterización de diferentes tipos de conexiones matemáticas (p. e. Businskas, 2008; De Gamboa et al., 2023; Dolores-Flores y García-García, 2017; Eli et al., 2011; Hatisaru, 2023; Rodríguez-Nieto et al., 2023). En este estudio, atendiendo a la naturaleza de los datos, se utiliza un marco de conexiones construido de manera inductiva (De Gamboa y Figueiras, 2014; De Gamboa et al., 2020). Este marco surge a partir de la observación sistemática de sesiones reales de clase, y presenta diversos tipos de conexiones matemáticas coincidentes con las ya reportadas en la literatura, a la vez que introduce nuevos tipos. La diferencia sustancial, respecto a los marcos de conexiones antes mencionados, es la introducción y definición de dos niveles de análisis para las conexiones matemáticas en un contexto de aula. Así, se considera que una conexión matemática es una relación entre dos objetos matemáticos (Font et al., 2013), formada por una red de relaciones más elementales (que llamamos conexiones elementales) que se coordinan entre sí como una sucesión encadenada de conexiones elementales (Figura 1). En el contexto de este estudio, las conexiones elementales están desencadenadas por las intervenciones discursivas de los alumnos y la profesora. En este estudio, se propone un *análisis global* de las conexiones que tiene en cuenta tanto la totalidad de la conexión, como las ideas que dicha conexión enfatiza en el contexto de aula en el que se produce (De Gamboa et al., 2023). Además, se propone un *análisis específico* para cada una de las conexiones elementales que forman cada conexión (Figura 1), así como de los objetos matemáticos que determinan cada conexión elemental. Aunque una conexión pueda estar formada por una única conexión elemental, es posible admitir un análisis global y específico. Mientras el primero se centra en el papel de la conexión en el contexto en el que se produce, el segundo se refiere a la forma en que se conectan los objetos matemáticos en una conexión elemental.

Figura 1. Estructura interna de las conexiones en el aula (De Gamboa et al., 2023).



En este estudio nos centramos en las conexiones intra-matemáticas que se dan entre objetos matemáticos y se dividen en dos tipos básicos: las conexiones que hacen énfasis en procesos transversales en matemáticas —por ejemplo, la diferencia entre demostración y comprobación—, y las conexiones que enfatizan aspectos específicos de un concepto (Figura 2). Con base en los resultados de Duval (2006), dentro de este último tipo de conexiones conceptuales, se diferencian conexiones con tratamiento (no se produce un cambio de registro de representación) y conexiones con conversión (se produce cambio de registro de representación), que pueden enfatizar representaciones, definiciones, procedimientos o propiedades.

Figura 2. Tipos de conexiones intra-matemáticas desde una perspectiva global (De Gamboa et al., 2023)



El establecimiento de conexiones de los tipos antes mencionados se puede dar de distintas maneras, a partir de diferentes tipos de conexiones elementales (Figura 1). Así, cada uno de los tipos de conexiones puede hacer referencia a distintos objetos matemáticos, haciendo explícita la conexión entre dichos objetos con diferentes niveles de especificidad. En la identificación de tales niveles de especificidad, adquieren relevancia las categorías de conexiones elementales que permiten formar una conexión. La Tabla 1 muestra los tipos de conexiones elementales que se consideran para este estudio.

Tabla 1. Tipos de conexiones matemáticas elementales

	Tipo de conexión y descripción	Ejemplo
Representacionales	Representación equivalente: se produce entre dos representaciones del mismo concepto matemático en el mismo registro de representación. (Businskas, 2008; De Gamboa et al., 2020; Dolores-Flores y García-García, 2017; Rodríguez-Nieto et al, 2023)	Relacionar las expresiones $\frac{1}{4}$ y $0{,}25$ como representaciones del mismo número racional
	Representación alterna: se produce entre dos representaciones del mismo concepto matemático en diferentes registros de representación. (Businskas, 2008; De Gamboa et al., 2023; Rodríguez-Nieto et al, 2023)	Relacionar $0{,}25$ con una representación gráfica de un cuarto de circunferencia.
De rasgo común	Rasgo común de representación: se produce entre dos representaciones que comparten elementos en común pero no representan el mismo concepto. (De Gamboa et al., 2023 ; Eli et al., 2011)	Relacionar las expresiones $\frac{5}{3}$ y $\frac{3}{5}$.
	Rasgo común de definición: se produce entre dos definiciones que comparten elementos en común, pero no representan el mismo concepto. (De Gamboa et al., 2023 ; Eli et al., 2011)	Analizar la diferencia del papel de la multiplicación en las operaciones: $3^2 = 3x2$
Procedimentales	Procedimiento: Se relaciona un concepto matemático con un procedimiento que se puede utilizar al trabajar con dicho concepto. (Businskas, 2008; Dolores-Flores y García-García, 2017; Rodríguez-Nieto et al, 2023)	Relacionar la suma de números racionales con la aplicación de la jerarquía de las operaciones.
	Procedimiento equivalente: Se relacionan dos procedimientos diferentes que resuelven una misma operación o problema. (De Gamboa et al., 2023).	Relacionar los procedimientos: $\frac{3^2}{3^2} = \frac{a}{a} = 1$ $\frac{3^2}{3^2} = 3^{2-2} = 3^0 = 1$
Argumentativas	Implicación: Se relacionan dos proposiciones mediante un razonamiento *si…entonces*. (Businskas, 2008; De Gamboa et al., 2023; Rodríguez-Nieto et al, 2023).	Sabemos que $2^5 = 32$. *Si* cambiamos el signo de la base, *entonces* cambiará también el signo del resultado de la potencia.
	Justificación: Se relacionan dos proposiciones explicitando la manera en que se relacionan. Se caracteriza por el uso de expresiones del tipo *ya que, porque,* o equivalentes. (De Gamboa et al., 2023).	Relacionar dos procedimientos justificando por qué uno de los dos es más adecuado para un contexto determinado, justificar por qué un resultado es válido, interpretar un resultado en el contexto de un problema explicitando por qué se relacionan.
	Generalización: Se relaciona la validez de una propiedad con su validez en un conjunto más amplio. (Businskas, 2008; De Gamboa et al., 2023; Rodríguez-Nieto et al, 2023).	Relacionar el cálculo de $\frac{a^p}{a^q}$, si p y q son naturales y $p > q$ con el caso en que p y q son dos enteros cualesquiera.
	Particularización: Se relaciona una proposición enunciada en general con su aplicación a un caso particular. (Businskas, 2008; De Gamboa et al., 2023; Rodríguez-Nieto et al, 2023).	Relacionar la validez de un enunciado algebraico con su comprobación para valores numéricos concretos.

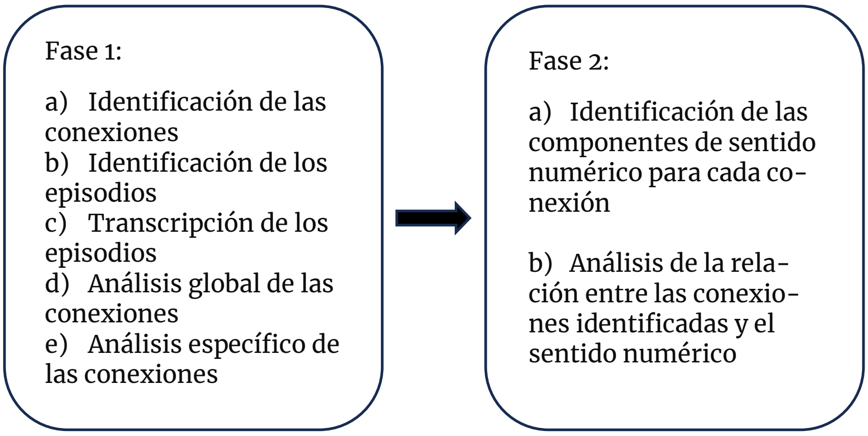
3. MÉTODO

El presente estudio se sitúa en un paradigma cualitativo e interpretativo y sigue un diseño de estudio de caso, pues se realiza un análisis en profundidad de un fenómeno en el contexto en el que se produce. El caso estudiado es la emergencia de conexiones en el aula, que puede ser clasificado como de tipo común (Yin, 2014), o bien, como caso ejemplificador (Bryman, 2009). Se realiza un análisis de sesiones reales de clase vídeo grabadas y se analizan las discusiones en gran grupo en las que intervienen tanto la profesora, como los alumnos. En la vídeo grabación de clases se sigue una observación no participante (Cohen et al., 2007). Cada una de las intervenciones discursivas, de la profesora y de los alumnos, es interpretada por los investigadores para determinar, por un lado, si se hace referencia a la relación entre dos objectos matemáticos (conexión matemática) y, por otro, cómo cada intervención aporta significado a dicha conexión. De este modo, se identifican todas las intervenciones discursivas que definen cada una de las conexiones identificadas.

Se analizan ocho sesiones de clase vídeo grabadas sobre números decimales (consecutivas y de 60 minutos de duración) con un grupo de 23 estudiantes de 12-13 años (13 niños y 10 niñas) de un centro público ubicado en Barcelona. Las actividades que se llevaron a cabo en dichas clases comprenden contenidos teóricos; ejercicios y problemas relacionados con la representación, comparación y ordenación de números decimales; la realización de operaciones con números decimales; y la aplicación de los decimales en contextos diversos. La profesora que imparte las clases es licenciada en matemáticas, con más de cinco años de experiencia en educación secundaria, y con experiencia previa como profesora de universidad.

El análisis se desarrolla en dos fases (Figura 3). La primera fase se centra en la identificación y la clasificación de conexiones matemáticas, a nivel global y específico, utilizando el marco inductivo presentado en el apartado 2.2. Una vez identificada una conexión, se identifican las intervenciones discursivas (profesora y alumnos) que otorgan significado a tal conexión. En orden cronológico, el conjunto de las intervenciones identificadas se define como episodio, constituyéndose así la unidad básica de análisis. La segunda fase de análisis contempla la identificación de las componentes del sentido numérico en cada una de las conexiones identificadas en la Fase 1. Además, en esta segunda fase se analiza, por un lado, la relación entre los diferentes tipos de conexiones y las componentes del sentido numérico y, por otro lado, la relación entre los tipos de conexiones elementales identificadas y las componentes del sentido numérico identificados. La triangulación del análisis, para la Fase 1 y la Fase 2, es realizada por los tres autores del estudio.

Figura 3. Fases del análisis de los datos



4. Resultados y discusión

Se identifican 35 conexiones intra-matemáticas. Se identifica una conexión relacionada con procesos, enfatizando la importancia de responder en los mismos términos en que se formula una pregunta (C8). Dentro de las conexiones intra-matemáticas conceptuales se identifican tres conexiones con conversión, cuando se utiliza una cinta para comparar dos números decimales (C11), se representa una operación en una recta numérica vertical (C21), y se trabaja el significado de las raíces cuadradas como hipotenusas de triángulos rectángulos (C34). El resto de las conexiones identificadas son de tipo conceptual, con tratamiento y con énfasis en las representaciones, definiciones, procedimientos y propiedades. Por motivos de extensión, en este artículo se presenta el análisis correspondiente a la primera etapa de la Fase 2, justificando, además, el análisis de cada conexión identificada. Para ejemplificar lo anterior se presentan extractos transcritos de tres episodios vídeo grabados. La primera fase del análisis permite clasificar las 35 conexiones intra-matemáticas con base en las componentes del sentido numérico (Tabla 2). Las conexiones están numeradas por orden cronológico de aparición a lo largo de las ocho sesiones registradas.

Tabla 2. Conexiones intra-matemáticas y su relación con las componentes del sentido numérico

	Identificación de números decimales	**Magnitud de los números decimales**	**Sentido de las operaciones con números decimales**	**Razonabilidad relacionada con los decimales**
Conexiones	C3, C6, C20	C2, C4, C7, C9, C11, C16, C21, C22, C23, C24, C30, C31, C35	C5, C13, C29, C33, C35	C1, C8, C10, C12, C15, C17, C18, C19, C21, C25, C26, C27, C31, C32, C34, C35

Nota: C14 y C28 no aparecen ya que no se vincularon con ningún componente del sentido numérico. Una misma conexión puede estar relacionada con más de una componente (C21, C31 y C35).

4.1. Identificación de los números decimales

En primer lugar, se identifican 3 conexiones relacionadas con la componente *identificación de los números*, centrándose mayoritariamente en el uso de símbolos (C3) como el *vínculum* (símbolo que representa la periodicidad), el uso del punto y la coma (C6), o los significados del signo "-" (C20). Así, la componente *identificación de los números* se asocia, no solo a las representaciones de los números (McIntosh et al., 1992), sino también a los símbolos que los acompañan (p. e., el *vínculum*), a las definiciones del significado de símbolos y las respectivas dificultades asociadas a la lectura de resultados en algunas calculadoras.

4.2. Magnitud de los números decimales

En tercer lugar, se identifican 13 conexiones relacionadas con la componente *magnitud de los números*. Se identifican 6 conexiones para el orden y la comparación de decimales, asociadas con la exactitud de los resultados proporcionados por la calculadora (C4), con la relación entre la magnitud de expresiones de decimales periódicos y de expresiones decimales de números irracionales (C7), y con la relación entre el significado de las décimas, centésimas, unidades, decenas o centenas (C9, C11, C23 y C24). A continuación, se muestra la transcripción del episodio definido por la conexión 11, en el que una alumna propone que 16,56 es menor que 16,485 al considerar que 56 es menor que 485. Como respuesta a la alumna, la profesora utiliza una cinta como representación de la unidad y le solicita que ubique ambos números en la cinta (Figura 4 y Figura 5). Se identifica una conexión intra-matemática con conversión entre una representación simbólica (16,56 y 16,485) y otra manipulativa sobre una cinta. Esta conexión se construye a partir del establecimiento de diversas conexiones elementales de tipo representativo entre cuatro representaciones diferentes (d_1=16,56; d_2=16,485; posición de d_1 sobre la cinta; posición de d_2 sobre la cinta), y una conexión elemental de justificación al construir la proposición explícita *si lo pasamos a las mismas unidades ya no hay confusión*.

Figura 4. Cuerda utilizada por la profesora para representar 16,56 y 16,485 en sentido ascendente

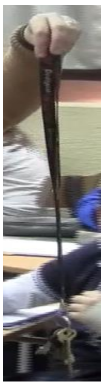


Figura 5. Episodio definido por la conexión C11

ALUMNA 3: [la profesora está resolviendo 16,56 – 16,485]. Al 56… El 16,485 sería más grande porque el 400 es…

PROFESORA: Vamos a leer los dos números […]

ALUMNA 3: 16 unidades y 56 centésimas

PROFESORA: […] cierto, leamos este número

ALUMNA 3: 16 unidades y 485 milésimas.

PROFESORA: milésimas. Vale. […] Aquí, cojo una unidad… Cojo una unidad… Esta tira [profesora toma una cinta de colgar llaves estampada para ejemplificar]… Y la parto en 100 trozos. Sí, de 100 trozos me quedan 56… ¿cuánto te quedarías más o menos?

Corta, por dónde te quedarías más o menos ¿Más o menos, eh?

ALUMNA 3: [señala trozo con el dedo]

PROFESORA: Estas son 56. ¿Vale? Todo el mundo ha visto que se ha quedado en esta "o" [señalando la vocal o escrita en la tira] ¿vale? Se ha quedado en un poquito más de la mitad, empezando por aquí, ALUMNA 3 se queda con este trozo, es un poquito más de la mitad, vale… […] Y ahora por el otro lado… Cojo la unidad, la divido en 1000 partes… 1000 partes y te quedas con 485, ¿con cuántos trozos te quedas? [utilizando la misma tira] […]

ALUMNA 3: Señala una parte de la tira

PROFESORA: Menos ¿Todo el mundo lo ha visto? En el primer caso, se está quedando con más trozo porque de 100 partes has cogido 56, coges un poquito más de la mitad, ¿verdad?

Y en la segunda… en el segundo caso de 1000 partes, te quedas con 485, la mitad estaría en 500. Te quedas un poquito menos. Entonces el truco aquí es ¿en qué unidades estamos hablando? En la primera, en centésimas y en la segunda en milésimas, pero siempre cuando tengas dudas, míralo respecto de la unidad, como yo he hecho. […] Si lo pasamos a las mismas unidades ya no hay confusión.

Asociado, también, a la componente *magnitud* se identifican 2 conexiones relacionadas con la posición de los números decimales sobre la recta. Una de estas conexiones es C11, mostrada en la figura 5, y la otra es C21, en la que se utiliza la representación sobre la recta numérica de la operación $2{,}4 - 3{,}7$, para justificar el resultado negativo de la operación a una alumna que afirma no comprender por qué debía ser negativo. Se produce una conexión entre la operación escrita en un registro numérico y la operación representada en un registro gráfico. Se trata de una conexión intra matemática con conversión, formada por conexiones elementales entre dos representaciones de una misma operación (numérica y gráfica) y una conexión elemental argumentativa al realizar la justificación $2{,}4 - 3{,}7$ *es negativo, ya que* $2 - 3 = -1$.

Un último grupo de 7 conexiones, relacionadas con la magnitud relativa entre decimales, incluye conexiones que involucran una relación entre los decimales, la frecuencia relativa y los porcentajes, como diferentes representaciones de la cantidad de una parte en relación con un todo (C2). Se incluyen aquí las relaciones entre las nociones de decena-décima y centena-centésima, y sus magnitudes relativas (C9); la relación entre décimas-centésimas-milésimas (C16), o la magnitud de las multiplicaciones y divisiones por potencias de 10 (C22, C30, C31); además de la interpretación de la multiplicación por un número inferior a la unidad (C35).

Por tanto, para la componente *magnitud de los números*, los resultados muestran que las conexiones identificadas enfatizan transformaciones de conversión y tratamiento. Estas últimas focalizan objetos matemáticos diversos; entre ellos, representaciones equivalentes o similares de un número decimal (p. e. 275 y 275,00); propiedades relacionadas con el orden y la comparación de decimales ($si\ a < 1, entonces\ a^2 < a$); la magnitud relativa entre dos números o entre dos cifras o valores posicionales (diez centésimas en una décima); definiciones de los valores posicionales de las cifras o procedimientos de cálculo (uso del movimiento de la coma para multiplicar y dividir por potencias de 10). Otras conexiones se relacionan con la corrección de reglas incorrectas, como la *regla de los números enteros* (C7 y C11) o la *regla de las fracciones* (C9), al comparar decimales con un número diferente de cifras decimales; también, con errores en el alineamiento de los números al operarlos (C23 y C24), y con la traducción entre decimal y porcentaje. Además, se observan conexiones relacionadas con dificultades en la coordinación de la aritmética con números enteros y la realización combinada de operaciones con números decimales (C21), y con la lectura de los números decimales en castellano y en catalán, lo que refuerza la regla del número entero (C11). En esta componente se observa un protagonismo de conexiones elementales de tipo representacionales (C4) y argumentativas (C8), vinculadas con justificaciones sobre la equivalencia, comparación, posición en la recta numérica y magnitud relativa de números decimales con base en su representación.

4.3. Sentido de las operaciones con números decimales

En segundo lugar, se identifican 5 conexiones relacionadas con la componente *sentido de las operaciones,* que involucran operaciones con decimales y redondeo o truncamiento de los resultados (C5), el uso estratégico de las operaciones (C13, C29 y C33), o el significado de multiplicar por un número inferior a 1 (C35). La Figura 6 muestra la transcripción del episodio C35 en el que se discute sobre el resultado de elevar al cuadrado números inferiores a 1. Se produce una conexión intra matemática con tratamiento que enfatiza propiedades de los números decimales al elevarlos al cuadrado. Cuando la profesora dice "hemos tenido nuestra primera revelación", y presenta ejemplos de cuadrados de números naturales mayores que 1, introduce una proposición inicial sobre el resultado, aludiendo a la tendencia de esperar un resultado superior al número elevado. Seguidamente, la profesora formula y justifica una segunda proposición que afirma que, en el caso de los números decimales menores que 1, el resultado de elevarlos al cuadrado es menor que el número elevado. Por lo tanto, la conexión que se produce está formada por una conexión elemental argumentativa de justificación entre dos proposiciones.

Figura 6. Episodio definido por la conexión C35

PROFESORA: [escribe en la pizarra $\sqrt{0,25}$]. ¿Quién me la responde?... ¿Alán?
ALUMNO 1: 0,05
PROFESORA: ¿ALUMNO 2?
ALUMNO 2: 0,5.
PROFESORA: ¿Quién vota 0,5?. Diez votan "by ALUMNO 2" ... ¿Quién vota 0,05? ¿Quién vota? 3
[...]
PROFESORA: Ahh pequeño... Ahh... Hemos tenido nuestra gran primera revelación de lo divertidos que son los números. ALUMNO 2, me ha gustado mucho tu aportación. Resulta que nosotros estamos acostumbrados a que cuando hacemos cuadrados, por ejemplo 3 al cuadrado es más grande que 9... más grande que 3 porque da 9 ¿cierto? 5 al cuadrado ¿cuánto da? [...]
pero para los números más pequeñitos que 1, cuando tú multiplicas un número por él mismo, se hace todavía más pequeño porque en realidad [...] estás cogiendo un número y lo estás multiplicando por algo que es todavía más pequeño que 1, es decir, estás cogiendo una parte más pequeñita de este número que es 1
[...]

La componente *sentido de las operaciones* se asocia, mayoritariamente, al uso de procedimientos equivalentes, así como a las propiedades de la multiplicación y las potencias con decimales, aspectos relacionados con la comprensión del efecto de la operación en el uso de los números decimales (McIntosh et al., 1992). Los resultados muestran conexiones en las que las aportaciones de los estudiantes o las respuestas de la profesora se fundamentan en el principio de dirección de efectos de las operaciones al multiplicar, dividir y hacer potencias con base decimal de exponente natural.

4.4. Razonabilidad relacionada con los decimales

Finalmente, se identifican 16 conexiones relacionadas con la componente *razonabilidad* y vinculadas a la validación del uso de representaciones, procedimientos o resultados. Se identifican 4 conexiones relacionadas con la validez del uso de los números decimales (C1, C15, C25, C34). 3 conexiones están relacionadas con el uso de los valores posicionales (uso de representaciones equivalentes de un mismo número hasta una posición determinada) para validar estrategias de cálculo y para comprobar resultados (C10, C12 y C17). También, se identifican 2 conexiones relacionadas con el uso de la estimación para validar la corrección de un resultado (C26 y C35). En el caso de C35 (Figura 6) se utiliza el argumento de "ser menor que 1 implica". También, se identifican 2 conexiones relacionadas con la validación del resultado de un problema (C8 y C27). En el caso de C27 un alumno propone que el resultado de la división $34 \div 7$ podría ser un número decimal infinito no periódico, a la vista de los primeros pasos del algoritmo de cálculo de la división (Figura 7). Se identifica una conexión intra-matemática con tratamiento, con énfasis en propiedad entre el procedimiento realizado (Figura 8), y la idea de decimal infinito no periódico. Esta conexión está formada por una conexión elemental de justificación entre dos proposiciones. La primera es la formulada por el alumno: "a lo mejor si sigue haciéndolo ... le va a tocar un 3, no un 5". La segunda es la formulada por la profesora: "Imposible, imposible, porque la tabla de multiplicar es la misma aquí que 200 filas más para abajo".

Figura 7. Desarrollo del algoritmo de la división $34 \div 7$ en la Conexión C27.

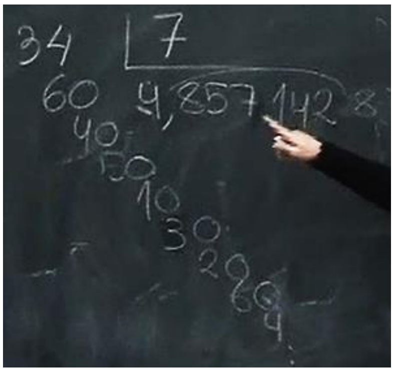


Figura 8. Episodio definido por la conexión C27.

PROFESORA: Vale, vamos a ver lo que ha hecho ALUMNA 3, tenemos... venga ALUMNA 3, genial. Tenemos 34 entre 7. 4 por 7, 28... [se realiza el algoritmo tradicional de la división. La alumna resuelve la operación en la pizarra mientras la profesora parafrasea las acciones de la alumna] [...]

Entonces, ALUMNA 3 cuando llega al 60, y yo creo que todos nos hemos dado cuenta, cuando llega al 60 dice: que el patrón empieza, porque después de 60 viene un 4 y esto se va a repetir. Por eso, ALUMNA 3 dice, aquí hay una... un patrón que se está repitiendo [...]

ALUMNO 4: a lo mejor si sigue haciéndolo ... le va a tocar 3 y no un 5

PROFESORA: Imposible, imposible, porque la tabla de multiplicar es la misma aquí [señalando el proceso de resolución de la ALUMNA 3 en la pizarra] que 200 filas más para abajo.

[...]

Sumado a lo anterior, se identifica un grupo de 5 conexiones relacionadas con la validación de procedimientos con decimales, y basadas en el uso de analogías y las propiedades de las operaciones con números enteros. Este grupo incluye conexiones en las que se compara una operación con decimales, con otra operación similar con números enteros (C18, C19, C21), y conexiones en las que se valida el uso de estrategias de movimiento de comas al multiplicar y dividir por potencias de 10 (C31 y C32). Por ejemplo, en el caso de la conexión C18 la profesora utiliza el ejemplo $11 - 3 \times (2 - 3)$ para mostrar el orden de las operaciones para $11{,}84 - 3{,}2 \times (2{,}3 - 3{,}7)$. Así, se produce una conexión conceptual con tratamiento enfatizando el procedimiento entre las propiedades del orden de las operaciones, al operar con números decimales, y las propiedades del orden de las operaciones para los números enteros.

En resumen, la mayoría de las conexiones relacionadas con la componente razonabilidad son de tipo conceptual con tratamiento, destacando aquellas que enfatizan procedimientos, como la validación de procedimientos aritméticos con decimales, mediante una comparación con otra operación análoga con enteros, o bien, aquellas conexiones que enfatizan la validez de procedimientos alternativos propuestos por los alumnos. También, se identifican 5 conexiones con énfasis en las propiedades, como la validación del resultado de una operación, a partir de una estimación fundamentada en una operación anterior (si $35 \div 7 = 5$, entonces $34 \div 7 < 5$), o la proposición que justifica que al multiplicar el dividendo y el divisor de una división por el mismo número el resultado no varía. Se identifica una única conexión con énfasis en representaciones al utilizar estratégicamente el valor posicional de las cifras para realizar cálculos. Además, se observan relaciones con algunos de los errores reportados en la literatura y derivados del análisis de las intervenciones de los alumnos o la profesora (p. e., *la regla de los números enteros*). Estos errores se observan al reflexionar sobre el uso del valor posicional en un contexto de operaciones (C8, C12 y C10), o sobre el efecto de las operaciones al validar la razonabilidad del resultado, al realizar multiplicaciones y potencias de decimales positivos inferiores a 1 (C31 y C35). Finalmente, se identifica una dificultad relacionada con la aplicación de las propiedades de los enteros a los decimales (C21).

El análisis de las conexiones elementales y de sus relaciones informa sobre el nivel de complejidad de las conexiones descritas en la Tabla 3. Así, conexiones del mismo tipo se pueden establecer a diferentes niveles de complejidad en función de la conexión elemental que las posibilita. Por ejemplo, las conexiones intra-matemáticas de tipo conceptual se pueden establecer a un nivel procedimental superficial (como en C13 cuando se describen diferentes procedimientos posibles para resolver un ejercicio) o a un nivel profundo que implique justificaciones (como en C18 cuando se justifica el orden de las operaciones combinadas con decimales a partir de una analogía con números enteros).

Tabla 3. Relación entre la clasificación de las conexiones elementales y las componentes del sentido numérico con que se relaciona

Tipo de conexión elemental	Componentes del sentido numérico para los decimales			
	Identificación	Magnitud	Operación	Razonabilidad
Representacional	C3, C6	C4, C7, C11, C21, C23, C24		C10, C12, C21
Rasgo común	C20	C16		C15, C25
Procedimental		C9, C30	C5, C13, C29, C30	C17, C25
Argumental		C2, C4, C9, C11, C21, C22, C24, C31, C32, C35	C5, C35	C1, C8, C10, C18, C19, C21, C26, C27, C31, C32, C34, C35

Nota. Una misma conexión puede pertenecer a más de una fila (p. e. C30) cuando está formada por conexiones elementales de distinto tipo.

La combinación del análisis global y específico de las conexiones permite interpretar el nivel de complejidad de las conexiones en relación con el potencial desarrollo del sentido numérico. En el caso de la componente magnitud, el análisis global señala que aparecen conexiones intra-matemáticas conceptuales que enfatizan mayoritariamente representaciones, procedimientos y reglas, mientras que el análisis específico (Tabla 3) señala que las conexiones elementales que intervienen son mayoritariamente de tipo argumentativo, lo que señala la importancia de establecer conexiones a un nivel de complejidad que permita desarrollar justificaciones de los procedimientos o de las transformaciones entre representaciones. Lo mismo ocurre con la componente razonabilidad, para el que el análisis global destaca la importancia de las conexiones que enfatizan aspectos procedimentales, mientras que el análisis específico destaca la importancia de las conexiones elementales de tipo argumentativo (Tabla 3).

5. Conclusiones

Este estudio profundiza en la manera en que cada una de las componentes que definen el sentido numérico se construye a partir de conexiones matemáticas. Los resultados muestran ejemplos explícitos de conexiones que enfatizan procesos, cambios de registro o relaciones entre objetos matemáticos en un mismo registro, que son relevantes para la construcción de las diferentes componentes del sentido numérico en el contexto de los números decimales (Ghazali et al., 2021) y, así mismo, para abordar las dificultades habituales de los alumnos (Tian y Siegler, 2018). De este modo, se observa que la noción de sentido numérico incorpora intrínsecamente la necesidad de conectar las diferentes componentes que lo caracterizan.

Por otro lado, los resultados muestran la utilidad de usar los dos niveles de análisis de las conexiones, pues permiten identificar, para cada componente de sentido numérico, los elementos que se conectan (análisis global) y cómo se conectan (análisis específico). Se observa una complementariedad entre ambos niveles. Un análisis global pondría el foco en las representaciones y los procedimientos sin señalar la importancia de promover conexiones argumentativas sobre ambos. Mientras que un análisis específico señalaría la importancia de las conexiones elementales de tipo argumentativo sin enfatizar sobre qué hay que argumentar y justificar (cambios de representación, procedimientos equivalentes o propiedades). El papel protagónico de las conexiones de justificación, en las componentes magnitud y razonabilidad, subraya la importancia de profundizar en este tipo de conexiones contemplando, también, tipos de conexiones elementales que comparten un carácter argumentativo, por ejemplo, las conexiones de reversibilidad (Rodríguez-Nieto et al., 2023). Así, las aportaciones del modelo utilizado para las conexiones en el análisis de la práctica de aula muestran la relevancia de la exploración futura de la integración y refinamiento de este modelo inductivo con otros modelos relevantes de conexiones matemáticas (Dolores-Flores y García-García, 2017; Hatisaru, 2023; Rodríguez-Nieto et al., 2023).

Los resultados muestran la manera en que algunas componentes del sentido numérico se construyen a partir del establecimiento de conexiones. Resulta particularmente relevante la componente *razonabilidad*, que se construye a partir de conexiones en las que aparecen conexiones elementales de tipo justificación. Así, este estudio sugiere considerar la razonabilidad en un sentido más amplio que el propuesto por McIntosh et al. (1992) y que se refiere únicamente a juzgar la razonabilidad de los resultados, pues es necesaria la inclusión de una razonabilidad sobre las operaciones aritméticas y los respectivos procedimientos utilizados. Los resultados relacionados con esta componente complementan otras investigaciones que reportan errores de los estudiantes al juzgar la razonabilidad de resultados en el contexto de los números decimales (Şengül y Gülbağcı, 2012), lo que recalca las oportunidades derivadas del establecimiento de conexiones para el desarrollo de esta componente del sentido numérico. Lo anterior enfatiza el uso de la noción de conexión para analizar, en un futuro, el desarrollo del sentido numérico al conectar fracciones y decimales (Lachance y Confrey, 2001; Tian y Siegler, 2018).

6. Agradecimientos

Estudio financiado por ANID-Chile 2022-86220016, PID2019-104964GB-I00 (MINECO-España) y GIPEAM, 2021 SGR 00159-AGAUR.

Referencias

Bryman, A. (2009). *Social Research Methods.* Oxford.

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections. Dissertation* [Doctoral dissertation]. Simon Fraser University.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*(3), 293–316. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9036-2

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203029053

De Gamboa, G., Badillo, E., & Font, V. (2023). Meaning and Structure of Mathematical Connections in the Classroom. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 23*(2), 241-261. https://doi.org/10.1007/s42330-023-00281-2

De Gamboa, G., Badillo, E., Ribeiro, M., Montes, M., & Sánchez-Matamoros, G. (2020). The role of teachers' knowledge in the use of learning opportunities triggered by mathematical connections. En S. Zehetmeier, D. Potari, & M. Ribeiro (Eds.), *Professional development and knowledge of mathematics teachers* (pp. 24-43). Routledge. https://doi.org/10.4324/9781003008460-3

De Gamboa, G., & Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII*. (pp. 337-344). SEIEM.

Dolores-Flores, C., & García-García, J. (2017). Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de Cálculo en contexto: un estudio de casos en el nivel superior. *Bolema, 31*(57), 158-180. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J., & Lee, C. W. (2011). Exploring mathematical connections of prospective middlegrades teachers through card-sorting tasks. *Mathematics Education Research Journal, 23*(3), 297-319. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0017-0

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 97-124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Gay, A. S., & Aichele, D. B. (1997). Middle school students' understanding of number sense related to percent. *School Science and Mathematics, 97*(1), 27 36. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1997.tb17337.x

González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J., & Van Dooren, W. (2022). Profiles in understanding the density of rational numbers among primary and secondary school students. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática,* 22, 47-70. https://doi.org/10.35763/aiem22.4034

Ghazali, M., Mohamed, R., & Mustafa, Z. (2021). A Systematic Review on the Definition of Children's Number Sense in the Primary School Years. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17*(6), 1-12. https://doi.org/10.29333/ejmste/10871

Hatisaru, V. (2023) Mathematical connections established in the teaching of functions. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 42(3) 207-227. https://doi.org/10.1093/teamat/hrac013

Hiebert, J., & Wearne, D. (1986). Procedures over concepts: the acquisition of decimal number knowledge. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case for mathematics* (pp. 199-223). Laurence Erlbaum.

Isotani, S., Adams, D., Mayer, R.E., Durkin, K., Rittle-Johnson, B., & McLaren, B.M. (2011). Can erroneous examples help middle-school students learn decimals? *Sixth European Conference on Technology Enhanced Learning: Towards Ubiquitous Learning* (pp. 1-14). EC-TEL. https://doi.org/10.1007/978-3-642-23985-4_15

Lachance, A., & Confrey, J. (2001). Helping students build a path of understanding from ratio and proportion to decimal notation. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(4), 503-526. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(02)00087-1

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics, 12*(3), 2-44.

Nickerson, S. D., & Whitacre, I. (2010). A local instruction theory for the development of number sense. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(3), 227-252. https://doi.org/10.1080/10986061003689618

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual Bases of Arithmetic Errors: The Case of Decimal Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 8-27. https://doi.org/10.2307/749095

Rathouz, M. (2011). Visualizing Decimal Multiplication with Area Models: Opportunities and Challenges. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers,* 2, 1-12.

Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vásquez, F. M., & Font, V. (2023). Combined use of the extended theory of connections and the onto-semiotic approach to analyze mathematical connections by relating the graphs of f and f'. *Educational Studies in Mathematics, 114*, 63-88. https://doi.org/10.1007/s10649-023-10246-9

Schneider, S. B., & Thompson, C. S. (2000). Incredible equations develop incredible number sense. *Teaching Children Mathematics,* 7(3), 146-148. https://doi.org/10.5951/TCM.7.3.0146

Şengül, S., & Gülbağcı, H. (2012). An investigation of 5th grade Turkish students' performance in number sense on the topic of decimal numbers. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 46*, 2289-2293. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.05.472

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D. A. Grouw (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 245-275). MacMillan Publishing Company.

Tian, J., & Siegler, R. S. (2018). Which type of rational numbers should students learn first? *Educational Psychology Review, 30*, 351-372. https://doi.org/10.1007/s10648-017-9417-3

VanHoof, J., Verschaffel, L., & VanDooren, W. (2015). Inappropriately applying natural number properties in rational number tasks: characterizing the development of the natural number bias through primary and secondary education. *Educational Studies in Mathematics, 90*(1),39-56. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9613-3

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte., E. (2007). Whole number concepts and operations. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Information Age.

Yang, D. C., Hsu, C. J., & Huang, M. C. (2004) A Study of Teaching and Learning Number Sense for Sixth Grade Students in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education,* (2), 407-430 https://doi.org/10.1007/s10763-004-6486-9

Yin, R. (2014). *Case Study Research*. Sage.

∞

Genaro de Gamboa

Universitat Autònoma de Barcelona (España)
genaro.degamboa@uab.cat | https://orcid.org/0000-0003-0366-3988

Sofía Caviedes

Universidad de los Lagos (Chile)
Sofia.caviedes@ulagos.cl | https://orcid.org/0000-0002-5304-212X

Edelmira Badillo

Universitat Autònoma de Barcelona (España)
edelmira.badillo@uab.cat | https://orcid.org/0000-0001-6296-4591

Recibido: 4 de diciembre de 2023
Aceptado: 21 de marzo de 2024

The Role of Intra-mathematical Connections in Learning Decimal Numbers

Genaro de Gamboa @ [1], Sofía Caviedes @ [2], Edelmira Badillo @ [1]

[1] Universidad de los Lagos (Chile)
[2] Universitat Autònoma de Barcelona (España)

Several characterizations proposed for number sense coincide in the need to promote the establishment of connections for the strategic use of rational numbers by students. This study follows a case study design for the analysis of eight class sessions of a group of 12–13-year-old students studying decimal numbers. The results show a relationship between the emergence of specific types of mathematical connections and the possible development of specific components of number sense in students. In particular, the emergence of conceptual connections with treatment that emphasize procedures and that are linked to the development of the *magnitude* and *reasonableness* components is mostly observed. However, the specific analysis of these connections shows that the same type of connection can be established at different levels of complexity. For example, conceptual connections with treatment that emphasize procedures may be formed by procedural elementary connections or may also include argumentative elementary connections. A special relevance of the elemental argumentative connections of the "justification" type is noted in the construction of fundamental aspects of number sense, specifically in the reasonableness component. The results of this study show the usefulness of considering different levels of complexity for the analysis of the mathematical connections that emerge in the classroom. Consequently, opportunities to refine the reference models for the analysis of mathematical connections are also discussed.