AIEM

Avances de Investigación en Educación Matemática

Revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

ISSN 2254-4313 | (2023) 24, 21-37 | aiem.es

seiem.es

Caracterizando cómo conjeturan los investigadores en matemáticas: un estudio de caso

Characterising how research mathematicians conjecture: A case study

José María Gavilán-Izquierdo @, Aurora Fernández-León @

Universidad de Sevilla (España)

Resumen ∞ Este trabajo se enmarca en la rama de investigación en educación matemática que estudia las actividades matemáticas que los investigadores en matemáticas desarrollan al construir conocimiento matemático. En concreto, tiene por objeto avanzar en la caracterización de la práctica matemática de conjeturar de esta comunidad de profesionales. Para ello, se analiza qué usa y qué crea (según Rasmussen et al., 2005) una investigadora concreta del área de análisis matemático cuando construye conjeturas en su investigación. La metodología cualitativa que se sigue es el estudio de caso. Los resultados de este estudio muestran el relevante papel que juegan los ejemplos en la dimensión horizontal de la práctica matemática de conjeturar, destacando cómo se crean esos ejemplos y en qué momentos de la actividad investigadora se usan y se crean los ejemplos.

Palabras clave ∞ Conjeturar; Usar; Crear; Estudio de caso; Investigador en matemáticas

Abstract ∞ This work belongs to the research field in mathematics education that studies the mathematical activities that research mathematicians develop when constructing mathematical knowledge. Specifically, the aim of this paper is to characterise the mathematical practice of conjecturing of this community of professionals. For this purpose, what a research mathematician uses and creates (in terms of Rasmussen et al., 2005) when conjecturing during her research is analysed. A case study methodological approach is adopted. The results of this study show the relevant role that examples play in the horizontal dimension of the mathematical practice of conjecturing, highlighting how and when those examples are used and created.

Keywords ∞ Conjecturing; Using; Creating; Case study; Research mathematician

Gavilán-Izquierdo, J. M., & Fernández-León, A. (2023). Caracterizando cómo conjeturan los investigadores en matemáticas: un estudio de caso. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática, 24*, 21-37. https://doi.org/10.35763/aiem24.4223

1. Introducción

Este estudio forma parte de la agenda de investigación en educación matemática que tiene como objetivo caracterizar las prácticas matemáticas (en adelante PM) de los investigadores en matemáticas (en adelante IM). La expresión *prácticas matemáticas* hace aquí referencia a las actividades matemáticas que llevan a cabo los IM cuando construyen conocimiento matemático en su investigación (Fernández-León y Gavilán-Izquierdo, 2019).

La investigación en educación matemática destaca la importancia de estudiar las PM de los IM, dadas las implicaciones que su estudio puede tener para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Weber e Inglis, 2021). Por ejemplo, Lockwood et al. (2019) estudian cómo los matemáticos desarrollan la práctica de usar herramientas para hacer cálculos matemáticos y desarrollar e implementar algoritmos. Burton (1998) investiga cómo los matemáticos aprenden las PM a través de su propia investigación en matemáticas. Martín-Molina et al. (2018) caracterizan la manera en la que los IM definen y Fernández-León et al. (2021) la manera en la que tales IM conjeturan y demuestran enunciados matemáticos. Misfeldt y Johansen (2015) estudian cómo los matemáticos eligen sus preguntas de investigación. Recientemente, Weber y Fukawa-Connelly (2022) ha llevado a cabo un estudio sobre qué aprenden los matemáticos cuando asisten a las exposiciones de otros compañeros en congresos de matemáticas.

Las investigaciones que se han desarrollado y se desarrollan en la actualidad en esta rama de la educación matemática asumen que existe relación entre las PM de los IM y lo que se debe enseñar (y cómo enseñarlo) en las aulas (Burton, 1998; Lockwood et al., 2019; Weber et al., 2020). Por ejemplo, Burton (1998) defendía la necesidad de conectar el aprendizaje matemático en las aulas con la manera en la que los IM aprenden a través de su investigación. Weber et al. (2014) mencionan cuatro razones que justifican por qué el conocimiento de la práctica de los expertos es adecuado para apoyar el diseño de la enseñanza de las matemáticas. Por un lado, defienden que un objetivo fundamental de la enseñanza es que los estudiantes aprendan a hacer matemáticas, para lo cual es adecuado que desde la comunidad en educación matemática se conozcan con precisión cómo son las PM. También sostienen que —aunque las PM de los IM son, en general, diferentes a cómo se enseñan y aprenden en un contexto de aula (Weber et al., 2020)— el docente (que no el estudiante) debe ser consciente de esas diferencias, para lo cual debe conocerlas con precisión. Según estos autores, el conocimiento preciso de estas prácticas no es suficiente, aunque sí es el primer paso para garantizar una enseñanza efectiva en matemáticas. Además, destacan que ese conocimiento preciso es necesario para que no se vuelva a enseñar matemáticas en base a concepciones inexactas, aunque supuestamente precisas, de las PM, lo cual ha demostrado ser perjudicial para los estudiantes. Por otro lado, Lockwood et al. (2019) afirman que, cuando desde la investigación se caracterizan algunas de las actividades y prácticas en las que participan los matemáticos, la enseñanza tiene más herramientas para ayudar a los estudiantes a establecer "creencias productivas sobre la naturaleza de las matemáticas" (p. 15), lo que permitiría que estos desarrollasen identidades matemáticas más positivas. Weber y Fukawa-Connelly (2022) ponen de manifiesto la dificultad que conlleva trasladar sus resultados de investigación sobre exposiciones (*lectures*), incluso al contexto de la enseñanza universitaria, y concluyen que se requiere más investigación en este campo para poder sugerir implicaciones directas para la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, estos autores resaltan el potencial teórico de su estudio, considerándolo un pilar fundamental en la construcción de la teoría acerca de cómo las exposiciones pueden contribuir al aprendizaje.

También hay diversos investigadores en educación matemática que, a pesar de desarrollar estudios con estudiantes, señalan que las actividades matemáticas de los estudiantes en el aula deberían tener similitudes con las que desarrollan los IM al construir conocimiento matemático (Antonini, 2011; Laursen y Rasmussen, 2019). Por ejemplo, Laursen y Rasmussen (2019) han señalado recientemente que, con ayuda del docente y en un contexto investigativo, los estudiantes pueden "reinventar y crear" (p. 131) objetos matemáticos que son nuevos para ellos (como definiciones, conjeturas, etc.) cuando desarrollan actividades matemáticas de naturaleza similar a las que desarrollan los matemáticos cuando investigan.

En este trabajo, nos centramos en la práctica matemática de conjeturar por su relevancia en la construcción del conocimiento matemático (Hartshorne y Weiss, 1978) y en la resolución de problemas (Polya, 1954). En concreto, el problema de investigación de este estudio es caracterizar cómo los IM desarrollan la práctica matemática de conjeturar.

2. Antecedentes teóricos

2.1. La práctica matemática de conjeturar

La relevancia hoy de la práctica matemática de conjeturar (en adelante práctica de conjeturar) está ampliamente justificada por la comunidad científica. Por ejemplo, Alibert y Thomas (1991) declaran que la formulación de conjeturas es un aspecto esencial en el trabajo de un matemático profesional. Lakatos (1976) destaca el papel fundamental que el cuestionamiento y el descubrimiento juegan en los procesos de prueba y de refutación de conjeturas. Así mismo, Peirce (Hartshorne y Weiss, 1978), que describe los tipos de razonamientos que guían la investigación científica (abducción, inducción y deducción), sitúa en un lugar destacado la *abducción*, que él define como "la adopción provisional de una hipótesis" (Hartshorne y Weiss, 1978, Vol. I, p. 29), considerándola el primer paso del razonamiento científico.

La formulación de conjeturas ha sido estudiada desde la educación matemática con estudiantes de diferentes niveles educativos (Alvarado y González-Astudillo, 2015; Boero, 2007; Cañadas et al., 2008; Jeannotte y Kieran, 2017). Sin embargo, son aún escasos los trabajos, si comparamos con prácticas como la de demostrar, que se han desarrollado para estudiar la práctica de conjeturar de los IM. En esta línea, destacamos los trabajos de Lockwood y colaboradores (Lockwood et al., 2016; Lynch y Lockwood, 2019). Por un lado, Lockwood et al. (2016) han estudiado el papel de los ejemplos cuando los matemáticos conjeturan. Posteriormente, Lynch y Lockwood (2019) han comparado el uso que hacen de los ejemplos los matemáticos y los estudiantes cuando construyen conjeturas. Fernández-León et al. (2021) han caracterizado la práctica de conjeturar de IM, identificando las actividades de matematización horizontal y vertical (Rasmussen et al., 2005) que desarrollan estos IM cuando construyen conjeturas (véanse los detalles en la Sección 3.2).

En el presente trabajo, la práctica de conjeturar hace referencia a las actividades matemáticas o los razonamientos propios de la actividad matemática que se realizan en el ámbito propiamente investigador para construir conjeturas. Se considera aquí que una conjetura es cualquier "afirmación que puede ser verdadera o falsa, parece razonable" (Fernández-León y Gavilán-Izquierdo, 2019, p. 284), "no ha sido justificada de forma convincente y aún no se conocen ejemplos que la contradigan ni consecuencias de la misma que sean falsas" (Mason et al., 1982, p. 58).

2.2. Marco teórico

En este estudio se utilizan los constructos teóricos *usar* y *crear*, propuestos por Rasmussen et al. (2005), para caracterizar la práctica de conjeturar de los IM.

Rasmussen et al. (2005) proponen la noción *actividad matemática en progreso* como alternativa al concepto *pensamiento matemático avanzado* (Tall, 1991). La noción actividad matemática en progreso pone el foco en cómo se desarrollan prácticas como definir, clasificar, conjeturar, etc., dejando en un segundo plano al contenido matemático específico (ecuaciones, poliedros, etc.).

Rasmussen et al. (2005) utilizan además los constructos *matematización horizontal* y *matematización vertical* para caracterizar la actividad matemática en progreso de estudiantes universitarios, describiendo con ello sus actividades matemáticas. En concreto, para estos autores la matematización horizontal hace referencia a las actividades que se realizan inicialmente para "formular una situación problemática de tal manera que sea susceptible de ser analizada matemáticamente más a fondo" (Rasmussen et al., 2005, p. 54). Por ejemplo, estas actividades podrían ser clasificar, experimentar o detectar patrones. Por el contrario, la matematización vertical incluye aquellas actividades que se desarrollan a partir de actividades horizontales para crear nuevas ideas o realidades matemáticas. Algunas de estas actividades serían generalizar o formalizar.

Concretamente, Rasmussen et al. (2005) utilizan estas dos dimensiones de la matematización (horizontal y vertical) para caracterizar la actividad matemática en progreso de estudiantes universitarios cuando desarrollan tres prácticas: construir algoritmos, representar a través de símbolos y definir. Apoyándose en esa caracterización, Rasmussen et al. (2005) identifican que los estudiantes *usan* y *crean* cuando desarrollan estas tres prácticas, y señalan que la interacción entre estas dos acciones (*usar* y *crear*) ocurre en las dos dimensiones de estas prácticas. Además, estos autores resaltan que ambas acciones desempeñan un papel muy diferente dependiendo de si la actividad que se desarrolla es de naturaleza horizontal o vertical. En concreto, sostienen que los estudiantes en la dimensión horizontal crean (algoritmos, símbolos, definiciones, etc.) "para expresar, apoyar, y comunicar ideas que ya eran más o menos familiares, ideas que estaban relacionadas con las concepciones actuales e informales de los estudiantes" (Rasmussen et al., 2005, p. 70); y que lo que se produce en esta dimensión se usa dentro del contexto inicial de la situación problemática. En la dimensión vertical, por el contrario, observan que cuando se usan los productos previamente creados, se promueven movimientos "de lo particular a lo más general y en algunos casos a lo más formal" (Rasmussen et al., 2005, pp. 70-71), haciendo que emerjan nuevas realidades matemáticas, que es lo que se crea en esta dimensión.

El estudio que aquí presentamos pone el foco en la práctica de conjeturar y tiene como finalidad caracterizar las actividades matemáticas que los IM desarrollan cuando construyen conjeturas durante su investigación. Recientemente, Fernández-León y Gavilán-Izquierdo (2019) han propuesto avanzar en la caracterización de esta práctica matemática utilizando los constructos teóricos *usar* y *crear* propuestos por Rasmussen et al. (2005). Así, la pregunta de investigación que informa sobre el objetivo de este trabajo es: ¿cómo pueden ayudar los constructos *usar* y *crear* (Rasmussen et al., 2005) en la caracterización de la práctica de conjeturar de los investigadores en matemáticas?

3. Metodología

Este trabajo es parte de un estudio más amplio, iniciado en Fernández-León et al. (2021), que trata de caracterizar la práctica de conjeturar llevada a cabo por IM cuando producen conocimiento matemático.

Desde la educación matemática, se han utilizado diferentes metodologías para estudiar la actividad investigadora de los IM (véanse, por ejemplo, Burton, 1998; Martín-Molina et al., 2018). La investigación que se presenta en este trabajo es de naturaleza cualitativa y, en concreto, adopta la forma de un estudio de caso exploratorio (Cohen et al., 2000). En particular, este estudio de caso se centra en comprender e interpretar la información que una investigadora en matemáticas da en varias entrevistas sobre las actividades matemáticas que ella desarrolla al construir conjeturas durante su investigación. La naturaleza exploratoria de este estudio de caso se justifica por el papel que este juega en el estudio más amplio que estamos desarrollando, ya que, entre otros, pretende actuar como un estudio piloto.

3.1. Informante del caso

La complejidad que supone realizar una investigación en educación matemática donde las matemáticas involucradas son muy avanzadas hizo que esta investigación se comenzase desde el análisis matemático, área de conocimiento con la que los autores de este trabajo están más familiarizados. Así, la informante de este estudio, y del presentado en Fernández-León et al. (2021), es Ana (pseudónimo), una doctora en matemáticas que investiga y publica artículos científicos en esta área de investigación. Los autores son conscientes de las limitaciones que esto supone para el estudio, ya que los resultados quedan sesgados por la naturaleza de este contenido matemático. Por otro lado, se señala que algunas de las afirmaciones realizadas por Ana durante las entrevistas podían estar influenciadas por la naturaleza colaborativa que en ocasiones tenía su investigación en matemáticas.

3.2. Datos

Se hicieron cuatro entrevistas semiestructuradas (Cohen et al., 2000) de aproximadamente noventa minutos cada una. Estas entrevistas fueron grabadas y posteriormente transcritas. El objetivo de la primera entrevista era obtener información básica de Ana (formación académica e investigadora, experiencia profesional e intereses de investigación) y en las otras entrevistas se obtuvo información sobre su trayectoria investigadora, haciendo especial hincapié en momentos concretos de su investigación. Algunas de las preguntas planteadas en estas entrevistas fueron: ¿cómo identificas un problema de investigación?, ¿cuándo consideras que tienes una conjetura?, ¿compruebas si una conjetura es cierta o no?, ¿qué haces para ello? Ana tenía información acerca de qué aspectos principales de su trabajo interesaban al estudio, lo cual facilitó la entrevista. Además, la formación de los entrevistadores fue esencial para realizar las entrevistas, ya que permitió que se desarrollasen informalmente y con fluidez, atendiendo así al aspecto cognitivo y dinámico de la entrevista (Cohen et al., 2000). Durante las entrevistas, se recogieron también copias de algunos cuadernos de trabajo de Ana (cuadernos de notas) en los que ella había recogido de forma escrita algunos de los cálculos matemáticos que había realizado y algunos de los gráficos que representó cuando investigaba. Estos cuadernos también incluían los enunciados de algunas conjeturas que había formulado e intentaba demostrar, así como las demostraciones matemáticas de muchas de esas conjeturas. También se recogieron copias de varios artículos científicos de Ana en los que ella muestra sus resultados de investigación, lo que permitió una triangulación de los datos.

Para un estudio previo (Fernández-León et al., 2021), se analizaron las transcripciones de esas entrevistas y los documentos recogidos utilizando los constructos teóricos matematización horizontal y matematización vertical (Rasmussen et al., 2005). Para realizar ese análisis, se identificaron en primer lugar los eventos relevantes de los datos que estaban relacionados con la práctica de conjeturar, los cuales se codificaron con el símbolo C. Posteriormente, esos eventos fueron codificados con los símbolos M.H y M.V para distinguir la naturaleza horizontal o vertical que tenía cada evento, quedando cada uno vinculado a un tipo u otro de matematización. Fruto de ese primer análisis de los datos empíricos, surgieron categorías de actividades horizontales y verticales que caracterizan la práctica de conjeturar de la informante del caso (Fernández-León et al., 2021) (véase la Tabla 1 de la siguiente subsección).

3.3. Análisis

Las categorías de análisis de este trabajo son los constructos teóricos *usar* y *crear* (Rasmussen et al., 2005). Para responder a las preguntas de investigación de este estudio, se siguieron los siguientes pasos. En primer lugar, se realizó un estudio teórico de las categorías de actividades identificadas en Fernández-León et al. (2021) empleando los constructos *usar* y *crear*. Para facilitar la comprensión del proceso de análisis del presente estudio, se incluye en la Tabla 1 una breve descripción de cada una de esas categorías. Concretamente, ese estudio teórico se realizó codificando primero las acciones que se describen en las descripciones teóricas de esas categorías de actividades, con los símbolos U y C (en referencia a *usar* y *crear*), e identificando después qué se usa o qué se crea en cada una de las acciones codificadas. Inicialmente, se contemplaba que las acciones pudieran ser codificadas con dos símbolos, uno o ninguno.

En segundo lugar, se usaron los datos empíricos de esta investigación para validar las inferencias teóricas que se habían realizado a través de las categorías de actividades en el paso anterior.

Tabla 1. Categorías de actividades de la práctica de conjeturar (Fernández-León y Gavilán-Izquierdo, 2019, p. 287)

Dimensión	Descripción de categoría
Horizontal	*Detectar patrones*: experimentaciones realizadas con objetos matemáticos (círculo, espacio métrico, etc.) que están relacionadas con una característica observable de esos objetos. Específicamente, esta categoría incluye los razonamientos lógicos y actividades informales con objetos matemáticos involucrados en la detección de un patrón (comportamiento regular de objetos matemáticos).
	Testar conjeturas: experimentaciones que se realizan con objetos matemáticos concretos que verifican las hipótesis (condiciones impuestas en el antecedente) de una conjetura para verificar o rechazar dicha conjetura.
	Modificar enunciados de proposiciones: experimentaciones con el enunciado de una proposición condicional (probada o no) que impliquen la propuesta de posibles cambios en las componentes (hipótesis o conclusión) de ese enunciado. Las razones que motivan esa propuesta de cambio pueden ser de naturaleza muy diferente. Por ejemplo, el hallazgo de un contraejemplo de una conjetura puede motivar el estudio y la consideración de posibles cambios en algunas partes del enunciado de esa conjetura.
Vertical	*Formalizar patrones*: actividades de generalización y formalización de un comportamiento regular observado previamente (patrón) al experimentar con objetos matemáticos. En concreto, la formalización del patrón da lugar a una conjetura matemática.
	Formalizar modificaciones de enunciados: actividades de formalización de las modificaciones que previamente se han planteado sobre las hipótesis o la conclusión de una proposición condicional (probada o no). Esta formalización da lugar a un nuevo enunciado de una conjetura.

El hecho de que este estudio se apoye en las categorías de actividades mostradas en la Tabla 1 ha permitido, además de facilitar el proceso de análisis, distinguir *qué usa* y *qué crea* la informante en cada una de las dimensiones de la práctica matemática de conjeturar.

A continuación, se muestra un ejemplo de cómo se ha realizado el proceso de análisis. En primer lugar, se estudió el enunciado de la categoría Detectar patrones y se codificó del siguiente modo: se asignaron las letras U y C a la oración *experimentaciones realizadas con objetos matemáticos que están relacionadas con una característica observable de esos objetos.* Esa asignación nos permitió identificar que en esa actividad matemática se *usaba* y se *creaba.* Después, se analizó esa oración y se infirió el *uso* de objetos matemáticos concretos al experimentar (en el proceso de detección de un patrón) y la *creación* de ejemplos de una propiedad observable (el patrón) que es verificada por objetos matemáticos concretos. Finalmente, se utilizaron los eventos de los datos empíricos representativos de esa categoría de actividades para validar las inferencias teóricas que se habían realizado previamente.

4. Resultados

Los resultados de este estudio se organizan separándolos por dimensiones (horizontal y vertical). En primer lugar, se identifica *qué usa* y *qué crea* la informante del estudio en la dimensión horizontal de la práctica de conjeturar. Posteriormente, se hará lo mismo en la dimensión vertical.

4.1. Conjeturar - Matematización horizontal

Si ponemos el foco en *qué se usa*, las categorías Detectar patrones y Testar conjeturas informan del *uso* de objetos matemáticos concretos al experimentar: bien al detectar patrones o bien al tratar de comprobar si una conjetura es cierta o no (testeo). Por otro lado, la categoría Modificar enunciados de proposiciones pone de manifiesto que se *usan* o manejan las hipótesis o conclusión de una proposición condicional que puede estar ya probada o ser aún una conjetura.

En esta dimensión, si ahora ponemos el foco en *qué se crea*, la categoría Detectar patrones pone de manifiesto la *creación* de ejemplos de una propiedad observable (el patrón) que es verificada por objetos matemáticos concretos y la categoría Testar conjeturas nos informa de la *creación* de ejemplos de una propiedad matemática (propuesta en el enunciado de una conjetura) que es verificada o no por objetos matemáticos que cumplen las hipótesis del enunciado de esa propiedad. Cuando el ejemplo creado muestra que la conjetura no se verifica, este se denomina contraejemplo. La categoría Modificar enunciados de proposiciones no ha dado información relativa a la acción crear, ya que el producto que posteriormente crea la informante (la conjetura), fruto de la experimentación con las componentes de una proposición, es de naturaleza vertical.

A continuación, se muestran tres extractos de las entrevistas de la informante (Protocolos 1, 2 y 3) con los que se va a ejemplificar la validación realizada con los datos empíricos sobre *qué se usa* y *qué se crea* en la dimensión horizontal de la práctica de conjeturar. Concretamente, el primer extracto que se muestra es representativo de la categoría Detectar patrones.

> **Protocolo 1.** Nosotros consideramos la expresión analítica del módulo de convexidad de la esfera, un espacio geodésico que no es lineal: $\delta(r,\varepsilon) = 1 - \frac{1}{r}$ $arccos\ ((cos\, r)/cos\ (\varepsilon/2))$, y tratamos de probar su monotonía con respecto a r a través de la primera derivada. Hicimos muchos cálculos, pero no pudimos obtener ninguna conclusión. También hicimos muchos experimentos con el software Mathematica para ver si el módulo de convexidad de la esfera era monótono con respecto a la variable r. (Fernández-León et al., 2021, p. 7). […]. Representamos esa función de dos variables para algunos valores fijos de ε. Cogimos $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = \frac{1}{4}$ y algunos valores más, y vimos que todas las representaciones de δ eran decrecientes.

En este extracto, Ana describe cómo intentó demostrar (en el sentido de *formal proving* en Jeannotte y Kieran, 2017) que una determinada función de dos variables $\delta(r, \varepsilon)$ era monótona decreciente con respecto a la primera variable. Para ello, estudió inicialmente el signo de la derivada parcial de la función con respecto a r. Como este estudio analítico no le permitió determinar dicha monotonía (por la complejidad de los cálculos), Ana decidió utilizar el programa Mathematica para representar las funciones de una variable que se obtenían al fijar valores concretos de la segunda variable. Señalar que, evidentemente, el número finito de gráficas que la investigadora representó no le permitió demostrar la monotonía de la función.

A partir del Protocolo 1, se puede inferir que la participante *usa*, cuando experimenta con el programa Mathematica, diferentes valores numéricos particulares (objetos matemáticos) entre 0 y 1 de la variable ε ($\varepsilon = 1/2$, $\varepsilon = 1/4$, etc.) para representar, con ese programa y para cada ε, la función $\delta(r, \varepsilon)$ con respecto a la otra variable r. Además, durante esta experimentación, la participante *crea* varios ejemplos (cada una de las representaciones gráficas de la función $\delta(r, \varepsilon)$, con ε fijo) en los que sí se puede observar el carácter monótono decreciente de la función $\delta(r, \varepsilon)$ con respecto de r. Estos ejemplos se crean con objetos matemáticos concretos (los diferentes valores de ε) de modo que, para cada ε fijo, se representa gráficamente una función que es decreciente con respecto a la variable r.

El siguiente extracto es representativo de la categoría Testar conjeturas.

> **Protocolo 2.** Empezamos a ver si la propiedad (Q_4) se cumplía en más espacios CAT(0); en concreto, miramos en los espacios CAT(0) que son el pegamiento de otros dos espacios CAT(0) (en inglés llamados *gluing CAT(0) spaces*). Los cálculos con estos espacios nos permitieron rechazar la conjetura cualquier espacio CAT(0) tiene la propiedad (Q_4). (Fernández-León et al., 2021, p. 8)

En este extracto, Ana describe cómo ella y su compañero testaron la conjetura "cualquier espacio CAT(0) tiene la propiedad (Q_4)" con algunos espacios CAT(0) concretos (espacios CAT(0) pegamiento). La propiedad (Q_4) es una propiedad matemática que pueden o no verificar los puntos de un espacio métrico cualquiera. En concreto, Ana y su compañero consideraron los espacios CAT(0) pegamiento porque, sin ser casos límite, son espacios menos regulares que otros espacios (como el plano euclídeo) en los que la propiedad (Q_4) sí se cumple.

El Protocolo 2 y la lectura de un artículo de investigación firmado por la participante (de autoría compartida) han permitido inferir que estos IM *usan* cuatro puntos (objetos matemáticos) concretos, de un espacio CAT(0), para rechazar la conjetura mencionada anteriormente. En concreto, el espacio CAT(0) considerado se construye *pegando* dos espacios CAT(0): la semirrecta del plano $(x, 0)$ para $x \leq 0$, con la distancia euclídea y el semiplano de los puntos del plano con $x \geq 0$, también con la distancia euclídea. Los puntos de ese espacio CAT(0) que permiten rechazar la conjetura son $p = (-1,0), q = (0,1), a = (0, -1)$ y $b = (11/10,0)$. A partir de lo anterior, se infiere también que los investigadores *crean* un contraejemplo de una conjetura durante el testeo de la misma, es decir, encuentran un espacio CAT(0) que no verifica la propiedad (Q_4).

El siguiente extracto de las entrevistas es representativo de la categoría Modificar enunciados de proposiciones.

> **Protocolo 3**. Estábamos estudiando un tipo de aplicaciones, las contracciones cíclicas, que son aquellas que verifican que $d(Tx,Ty) \leq kd(x,y) + (1 - k)\, dist(A,B)$ para cualesquiera dos puntos de un espacio métrico (X,d), con A y B, dos subconjuntos de X. Los matemáticos Eldred y Veeramani (2006) estudiaron y probaron el problema de encontrar puntos de mejor aproximación, es decir, puntos en A o B que satisfacen $d(x,Tx) = dist(A,B)$, en espacios de Banach uniformemente convexos. En ese trabajo, plantearon la pregunta abierta de si existía un punto de mejor aproximación cuando A y B eran subconjuntos no vacíos, cerrados y convexos de un espacio de Banach reflexivo. Motivada por este problema, empecé a analizar en detalle las hipótesis del resultado ya probado, en su artículo, en espacios uniformemente convexos, ya que me parecía muy sospechoso exigir solo que el espacio [de Banach] fuera reflexivo. Lo que hice entonces fue plantearme la posibilidad de pedirle al espacio que también fuera estrictamente convexo y por eso me puse a buscar espacios que verificaran esas dos propiedades [reflexivo y estrictamente convexo], para no encontrarme después con un resultado vacío [sin casos en los que se pueda aplicar]. (Fernández-León et al., 2021, p. 9)

En este extracto, Ana describe cómo experimentó con las componentes de una proposición (el problema abierto planteado por Eldred y Veeramani, 2006), planteándose la posibilidad de modificarlas de cara a plantear una conjetura nueva. En concreto, Ana se planteó modificar las hipótesis del problema abierto asumiendo una nueva hipótesis (ser estrictamente convexo) sobre los espacios métricos sobre los que se podía aplicar el enunciado. Según declaró Ana en otro momento de las entrevistas, exigir simplemente reflexividad al espacio de Banach era *muy ambicioso*, pues así la pregunta abierta era equivalente a un problema abierto durante décadas en su campo de investigación.

El Protocolo 3 ha permitido inferir que la participante *usa* y experimenta con las hipótesis del problema abierto planteado por los otros autores. En concreto, la participante se plantea asumir una nueva hipótesis en el problema abierto (la convexidad estricta), restringiendo el alcance del mismo. En otros extractos de las entrevistas, la investigadora propone modificar las componentes de una proposición condicional ya probada al pensar que la proposición se puede mejorar (debilitando sus hipótesis y/o fortaleciendo su conclusión). También hay extractos donde la propuesta de modificación del enunciado de una conjetura está motivada por el hallazgo de un contraejemplo de esa conjetura.

La categoría Modificar enunciados de proposiciones no ha permitido inferir resultados en términos del constructo *crear*, ya que, como se comentó anteriormente, lo que se puede crear (la conjetura) fruto de la experimentación con las componentes de una proposición es de naturaleza vertical.

4.2. Conjeturar - Matematización vertical

Si ponemos el foco en *qué se usa*, la categoría Formalizar patrones informa del *uso* de los ejemplos de una propiedad observable (que revelan un patrón) obtenidos en la dimensión horizontal de la práctica de conjeturar. Por otro lado, la categoría Formalizar modificaciones de enunciados pone de manifiesto que la participante *usa* las condiciones que ha planteado añadir o suprimir previamente (en la dimensión horizontal) en las componentes de una cierta proposición condicional.

En esta misma dimensión, en cuanto a *qué se crea*, las categorías Formalizar patrones *y* Formalizar modificaciones de enunciados ponen de manifiesto la *creación* de conjeturas. Por un lado, en la categoría Formalizar patrones, el patrón observado en la dimensión horizontal se formaliza para dar lugar a una conjetura y en la categoría Formalizar modificaciones de enunciados, la nueva conjetura resulta al incluir o suprimir en las componentes de la proposición condicional manejada en la dimensión horizontal las condiciones consideradas previamente.

A continuación, se muestran dos extractos de las entrevistas (Protocolos 4 y 5) que permiten ejemplificar la validación realizada con los datos empíricos sobre *qué se usa* y *qué se crea* en la dimensión vertical de la práctica de conjeturar. Al igual que en la dimensión horizontal, se van a utilizar extractos de las entrevistas que son representativos de las categorías de actividades de esta dimensión.

En concreto, el primer extracto que se muestra es representativo de la categoría Formalizar patrones.

> **Protocolo 4**. De todos modos, aunque todo lo que tenía no me servía para escribirlo en una publicación, ni siquiera para utilizar en otro resultado que esta función [el módulo de convexidad de la esfera] era decreciente, sí que, en mis notas, puse que, con todos los dibujos que tenía con el Mathematica, el módulo de convexidad de la esfera es decreciente con respecto a r.

En este extracto, Ana describe cómo formuló una conjetura a partir de un conjunto de representaciones gráficas que le informaban sobre un patrón acerca de la monotonía de una función de dos variables con respecto a una de esas variables. Este extracto aparece en las transcripciones justo después del Protocolo 1 (donde se describe la detección del patrón).

A partir del protocolo 4, se infiere que la participante *usa* las representaciones gráficas de la función $\delta(r, \varepsilon)$ obtenidas con el programa Mathematica para diferentes valores de ε concretos. Estas representaciones son ejemplos de la propiedad observable: $\delta(r, \varepsilon)$ es monótona decreciente con respecto a r para ε fijo. Por otro lado, formalizando la propiedad observada (el patrón encontrado), la participante *crea* una conjetura, cuyo enunciado es el módulo de convexidad de la esfera es decreciente con respecto a r para valores fijos de ε.

El siguiente extracto, que es representativo de la categoría Formalizar modificaciones de enunciados, se utiliza para terminar de ejemplificar la validación realizada con los datos empíricos sobre *qué usa* y *qué crea* la participante este estudio cuando construye conjeturas.

> **Protocolo 5**. La nueva condición que habíamos considerado previamente sobre el espacio de Banach reflexivo [ser estrictamente convexo], lo que hicimos fue añadirla en las hipótesis del enunciado de la pregunta abierta [formulada por Eldred y Veeramani (2006)] y con las nuevas hipótesis formulamos esta conjetura [Sean A y B dos subconjuntos no vacíos, cerrados y convexos de un espacio

de Banach reflexivo y estrictamente convexo, y sea $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$ una contracción cíclica. Entonces existe un único punto de mejor aproximación en A].

En este extracto, Ana describe, mientras señala un póster que había presentado en un congreso, cómo había formulado una nueva conjetura añadiendo, a las hipótesis de una pregunta abierta, una nueva condición (ser estrictamente convexo) para los espacios métricos sobre los que tenía aplicabilidad el enunciado de dicha pregunta. Según Ana, esta condición es natural asumirla en resultados de su campo de investigación. Durante las entrevistas, Ana justificó además por qué no trató de construir inicialmente una demostración formal de la pregunta abierta, haciendo referencia a lo ambiciosa que le parecía. En concreto, ella comentó que uno de los problemas abiertos más conocidos dentro de su campo de investigación era de naturaleza similar al problema abierto de Eldred y Veeramani (2006), y que por eso no se planteó tratar de resolverlo directamente.

A partir del Protocolo 5, se infiere que la participante *usa* la propiedad de ser estrictamente convexo, que había considerado previamente como una posible condición a añadir a las hipótesis de la mencionada pregunta abierta. Por otro lado, la participante *crea* una nueva conjetura al incluir esta propiedad matemática en las hipótesis del enunciado de la pregunta abierta.

5. Discusión y conclusiones

En un trabajo previo, Fernández-León et al. (2021) estudiaron, utilizando los constructos *matematización horizontal* y *matematización vertical* (Rasmussen et al., 2005), cómo una investigadora en matemáticas desarrollaba la práctica de conjeturar cuando investigaba. En este estudio, damos un paso más en la caracterización de esta práctica matemática utilizando los constructos *usar* y *crear* descritos por Rasmussen et al. (2005).

Los resultados obtenidos en este trabajo muestran que los ejemplos (cuando se usan y se crean) desempeñan un papel relevante en la construcción y el testeo de conjeturas, lo que complementa, entre otras, la investigación de Lockwood et al. (2016). Estos autores señalan que hay dos acciones que caracterizan el trabajo de los matemáticos con los ejemplos cuando examinan y demuestran conjeturas, que son seleccionar y usar ejemplos. Combinando ambos estudios, puede concluirse que en la práctica de conjeturar hay, al menos, tres acciones que se realizan con los ejemplos, crearlos, seleccionarlos y usarlos. Lockwood et al. (2016) también categorizan las diferentes maneras que tienen los matemáticos de seleccionar y usar los ejemplos, observándose algunas similitudes con nuestros resultados. Por ejemplo, una de las categorías identificadas por estos autores es el uso de ejemplos para chequear una conjetura. Estos autores resaltan además el papel de la concienciación meta-cognitiva de los matemáticos al trabajar con ejemplos. Los datos utilizados en nuestro estudio también ponen de manifiesto esa conciencia meta-cognitiva, incluso en la construcción de conjeturas (que no ha sido estudiada en Lockwood et al., 2016). Por ejemplo, esta consciencia se observa cuando Ana, la informante del caso, manifiesta control e intencionalidad a la hora de darle un papel muy particular a las representaciones gráficas construidas con el software Mathematica (véanse los Protocolos 1 y 4), ya que estos ejemplos gráficos le permiten detectar un patrón y formular una conjetura (con un alto valor epistémico de verdad), pero no constituyen para ella una demostración matemática de la monotonía decreciente de la función.

Aunque el estudio del papel de los ejemplos en la práctica matemática y en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas ha sido bastante estudiado en la literatura, muchos estudios destacan la necesidad de seguir ahondando en esta línea (por ejemplo, Lockwood et al., 2016). Las categorías de actividades inferidas en Fernández-León et al. (2021), así como los resultados de este trabajo, ofrecen un nuevo contexto teórico en torno al cual establecer discusiones. Así, un paso más en nuestra investigación podría ser estudiar cómo son las estrategias (en términos de Antonini, 2011) que utilizan los IM cuando usan o crean ejemplos al conjeturar y si se observan diferencias en esas estrategias según si el ejemplo es creado o usado en la dimensión horizontal o en la dimensión vertical de la práctica de conjeturar. Por ejemplo, el Protocolo 2 del apartado anterior, que describe cómo la investigadora examina una conjetura, y la lectura de un artículo publicado por Ana, muestran la creación de un contraejemplo de una conjetura mediante un proceso inicial de *transformación,* cuando se busca el espacio CAT(0) pegamiento construido, y un proceso posterior de *ensayo y error*, al buscar los puntos en el espacio CAT(0) que permiten rechazar la propiedad (Q_4) (Antonini, 2011).

En Fernández-León et al. (2021), se destaca el papel de los ejemplos en la *unidad cognitiva* de los teoremas (Boero, 2007). Los resultados de este estudio avanzan también en la caracterización de esta unidad cognitiva, haciéndose hincapié en cómo y cuándo se pueden crear y usar los ejemplos. Un estudio sobre qué *usa* y qué *crea* la informante del caso cuando construye demostraciones matemáticas en su investigación puede ser fundamental para completar la caracterización de la unidad cognitiva de los teoremas (Boero, 2007) en términos de Rasmussen et al. (2005).

La investigación que presentamos en este artículo supone una nueva contribución a la literatura sobre cómo los IM desarrollan sus PM, lo que podría ayudar en futuras investigaciones a caracterizar lo que se quiere que aprendan los estudiantes y cómo debe enseñarse. Las investigaciones de esta naturaleza permiten usar la práctica matemática para justificar posibles objetivos pedagógicos y la forma en la que estos objetivos pueden alcanzarse (Weber et al., 2020). Identificar diferentes categorías de actividades que caracterizan cómo los IM conjeturan y concretar, además, *qué se usa* y *qué se crea* en cada una de las dimensiones de esta práctica matemática puede ayudar a poner el foco en aspectos particulares de esta práctica, facilitándose así el diseño de una instrucción que fomente la participación de los estudiantes en actividades matemáticas propias de los IM. Así, por ejemplo, el importante papel que juegan los ejemplos en la dimensión horizontal de esta práctica matemática debería verse reflejado en el diseño de tareas matemáticas que pretendan fomentar en los estudiantes la práctica de conjeturar o aspectos particulares de la misma.

Los resultados de este trabajo podrían aportar además información a la formación de IM a nivel de postgrado, lo cual podría redundar en la formación preuniversitaria y universitaria en matemáticas, ya que estos IM son generalmente los formadores del profesorado de matemáticas de estudiantes de más de 12 años.

La investigación que se presenta en este trabajo tiene carácter exploratorio. Algunas limitaciones de este estudio vienen dadas por la *heterogeneidad* de la práctica matemática, el *problema de la identificación de la comunidad matemática* (Weber et al., 2020), así como por la variedad de áreas de investigación en el ámbito de las matemáticas (análisis matemático, álgebra, geometría, etc.), lo cual hace necesario estudiar a otros IM que permitan refinar y validar los resultados, ampliando así su alcance. Igualmente, somos conscientes de que los datos recogidos son, en parte, recuerdos de cómo la investigadora percibió su actividad investigadora, lo cual es una limitación del estudio.

6. Agradecimientos

Los autores han sido financiados por dos Ayudas a proyectos precompetitivos del Plan Propio de Investigación de la Universidad de Sevilla (PPIIV.4/2021/005 y PPIV.1C/2023/00000376).

Referencias

Alibert, D., & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 215-230). Kluwer.

Alvarado, A., & González-Astudillo, M. T. (2014). Definir, buscar ejemplos, conjeturar... para probar si un número es feliz. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *5*, 5-24. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i5.73

Antonini, S. (2011). Generating examples: Focus on processes. *ZDM Mathematics Education, 43*(2), 205-217. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0317-6

Boero, P. (Ed.) (2007). *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Sense Publishers.

Burton, L. (1998). The practices of mathematicians: What do they tell us about coming to know mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, *37*(2), 121-143. https://doi.org/10.1023/A:1003697329618

Cañadas, M. C., Deulofeu, J., Figueiras, L., Reid, D. A., & Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: Tipos y pasos. *Enseñanza de las Ciencias, 26*(3), 431-444. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3753

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). *Research methods in education* (5ª ed.). Routledge. http://doi.org/10.4324/9780203224342

Eldred, A. A., & Veeramani, P. (2006). Existence and convergence of best proximity points. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 323*(2), 1001-1006. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.10.081

Fernández-León, A., & Gavilán-Izquierdo, J. M. (2019). Avanzando en la caracterización de las prácticas matemáticas de conjeturar y probar de los matemáticos profesionales. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano & Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 283-292). SEIEM.

Fernández-León, A., Gavilán-Izquierdo, J. M., & Toscano, R. (2021). A case study of the practices of conjecturing and proving of research mathematicians. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52*(5), 767-781. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1717658

Hartshorne, C., & Weiss, P. (Eds.) (1978). *Collected papers of Charles Sanders Peirce, volumes I and II: Principles of philosophy and elements of logic*. Harvard University Press.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 1-16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8

Lakatos, I. (1976). *Proof and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139171472

Laursen, S. L., & Rasmussen, C. (2019). I on the prize: Inquiry approaches in undergraduate mathematics. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 5*(1), 129-146. https://doi.org/10.1007/s40753-019-00085-6

Lockwood, E., DeJarnette, A. F., & Thomas, M. (2019). Computing as a mathematical disciplinary practice. *Journal of Mathematical Behavior*, *54*, 1-18. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.004

Lockwood, E., Ellis, A. B., & Lynch, A. G. (2016). Mathematicians' example-related activity when exploring and proving conjectures. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2*(2), 165-196. https://doi.org/10.1007/s40753-016-0025-2

Lynch, A. G., & Lockwood, E. (2019). A comparison between mathematicians' and students' use of examples for conjecturing and proving. *Journal of Mathematical Behavior*, *53*, 323-338. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.07.004

Martín-Molina, V., González-Regaña, A., & Gavilán-Izquierdo, J. M. (2018). Researching how professional mathematicians construct new mathematical definitions: A case study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *49*(7), 1069-1082. https://doi.org/10.1080/0020739X.2018.1426795

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically.* Addison Wesley.

Misfeldt, M., & Johansen, M. W. (2015). Research mathematicians' practices in selecting mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics, 89*(3), 357-373. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9605-3

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Patterns of plausible inference*. Princeton University Press.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K., & Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 51-73. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0701_4

Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced mathematical thinking*. Kluwer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1

Weber, K., Dawkins, P., & Mejia-Ramos, J. P. (2020). The relationship between mathematical practice and mathematics pedagogy in mathematics education research. *ZDM Mathematics Education, 52*(6), 1063-1074. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01173-7

Weber, K., & Fukawa-Connelly, T. (2022). What mathematicians learn from attending other mathematicians' lectures. *Educational Studies in Mathematics*, *112*(1), 123-139. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10177-x

Weber, K., & Inglis, M. (2021). Mathematics education research on mathematical practice. En B. Sriraman (Ed.), *Handbook of the history and philosophy of mathematical practice* (pp. 1-28). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-19071-2_88-1

Weber, K., Inglis, M., & Mejia-Ramos, J. P. (2014). How mathematicians obtain conviction: Implications for mathematics instruction and research on epistemic cognition. *Educational Psychologist, 49*(1), 36-58. https://doi.org/10.1080/00461520.2013.865527

∞

José María Gavilán-Izquierdo

Universidad de Sevilla (España)
gavilan@us.es | https://orcid.org/0000-0002-3369-5377

Aurora Fernández-León

Universidad de Sevilla (España)
aurorafl@us.es | https://orcid.org/0000-0002-6780-093X

Recibido: 8 de enero de 2022
Aceptado: 3 de junio de 2023

Characterising how research mathematicians conjecture: A case study

José María Gavilán-Izquierdo @, Aurora Fernández-León @

Universidad de Sevilla (España)

This study is part of the research agenda in mathematics education that aims to characterize the mathematical practices of research mathematicians. This agenda highlights the importance of studying the mathematical practices of research mathematicians, given the benefits that such study may have in mathematics pedagogy (Weber et al., 2020). In fact, there are several researchers in mathematics education which, despite developing studies on students, point out that students' mathematical activities in the classroom should have similarities with those of research mathematicians when constructing mathematical knowledge (Antonini, 2011; Harel, 2001; Laursen & Rasmussen, 2019). Although recent studies have characterised the way research mathematicians developed certain mathematical practices (like defining, proving, computing and reading mathematical proofs), various voices from the mathematics education community demand more research on this topic. In this regard, this paper delves into the characterization of the research mathematicians' mathematical practice of conjecturing. In this research, the mathematical practice of conjecturing refers to the mathematical activities or reasoning inherent to mathematical activity that are carried out in the research setting in order to construct conjectures. A conjecture is any statement that may be true or false, and seems reasonable. In a previous work (Fernández-León et al., 2021), the authors of this study and another colleague used the theoretical constructs horizontal mathematising and vertical mathematising (Rasmussen et al., 2005) to characterise how research mathematicians conjecture during their research. The present research complements such a characterisation by analysing what research mathematicians use and create (in terms of Rasmussen et al., 2005) when producing conjectures. In this paper, a case study methodological approach is adopted and, in particular, the case of a single research mathematician that researches on mathematical analysis and has more than ten years of teaching experience at university is discussed. The results of this study show the relevant role examples play in the practice of conjecturing. Furthermore, these results complement those of other studies in the literature by showing that examples may be created, in addition to used and selected, as it is asserted in Lockwood et al. (2016). Finally, we highlight that this paper, and others in this research agenda, could help to focus on particular aspects of mathematical practices, thus facilitating the design of instruction that encourages students' participation in research mathematicians' mathematical activities.