AIEM

Avances de Investigación en Educación Matemática

Revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

ISSN 2254-4313 | (2022) 22, 23-46 | aiem.es

seiem.es

Construcciones mentales asociadas a los eigenvalores y eigenvectores: refinación de un modelo cognitivo

Mental constructs associated with eigenvalues and eigenvectors: refining a cognitive model

Alexander Betancur @ [1], Solange Roa Fuentes @ [1],
Marcela Parraguez González @ [2]

[1] Universidad Industrial de Santander (Colombia)
[2] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)

Resumen ∞ Se presenta evidencia empírica sobre las estructuras y mecanismos mentales necesarios para el aprendizaje del concepto de eigenvalor y eigenvector a partir de la transformación lineal, usando el paradigma de investigación de la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema). Los datos del estudio son el resultado de la implementación de la enseñanza con base en un modelo cognitivo (Descomposición Genética) situado en un curso regular de álgebra lineal de una universidad pública en Colombia. La evidencia empírica permite mostrar un modelo cognitivo refinado con relación a las estructuras y mecanismos clave, para dar cuenta de los Procesos subyacentes al Proceso de eigenvalor y eigenvector y generar la discusión en relación con la totalidad del Proceso. Las recomendaciones para la enseñanza precisan la importancia de propiciar diversas situaciones que involucren la transformación lineal y su coordinación con los Procesos: vector cero - no es un eigenvector; conjunto solución de $T(v) = \lambda_0 v$; espacio nulo y determinante.

Palabras clave ∞ Eigenvalor y Eigenvector; Teoría APOE; Descomposición Genética; Transformación Lineal; Álgebra Lineal

Abstract ∞ Empirical evidence is presented on the mental structures and mechanisms necessary for learning the concept of eigenvalue and eigenvector from the linear transformation, using the research paradigm of the APOE (Action, Process, Object, Scheme) theory. The data of the study are the result of the implementation of teaching based on a cognitive model (Genetic Decomposition) located in a regular linear algebra course of a public university in Colombia. The empirical evidence allows to show a refined cognitive model in relation to the key structures and mechanisms, to account for the Processes underlying the eigenvalue and eigenvector Process and to generate discussion in relation to the whole Process. The recommendations for teaching specify the importance of providing various situations involving the linear transformation and its coordination with the Processes: zero vector - not an eigenvector; solution set of $T(v) = \lambda_0 v$; null space and determinant.

Keywords ∞ Eigenvalues and Eigenvectors; APOS theory; Genetic decomposition; Linear transformation; Linear algebra

Betancur, A., Roa Fuentes, S. & Parraguez González, M. (2022). Construcciones mentales asociadas a los eigenvalores y eigenvectores: refinación de un modelo cognitivo. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática*, 22, 23-46. https://doi.org/10.35763/aiem22.4005

1. Introducción

Los conceptos del álgebra lineal son clave en el desarrollo de matemáticas avanzadas como análisis funcional y álgebra abstracta; también ellos juegan un rol vital en otras disciplinas como física, ingeniería, economía, biología, entre otras. Aunque se han realizado avances en relación con la enseñanza y aprendizaje de conceptos básicos del álgebra lineal, aún existen retos y problemáticas abiertas (Stewart et al., 2018). En particular, la enseñanza y el aprendizaje del concepto de eigenvalor y eigenvector se encuentra en algunos proyectos trazados por comunidades de investigadores, entre ellos, Wawro et al. (2013) y Salgado y Trigueros (2014, 2015). Los acercamientos por dichas comunidades colocan el foco en la conceptualización de matrices como Transformaciones Lineales (Andrews-Larson et al., 2017) para el diseño de materiales de clases que permitan reinventar el concepto de eigenvalor y eigenvector (Plaxco et al., 2018). Desde las investigaciones con la teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema) (Thomas y Stewart, 2011; Salgado y Trigueros, 2014, 2015) se han evidenciado estructuras clave para el aprendizaje del concepto y reflexiones sobre su enseñanza. Otros estudios enfatizan el problema de la visualización de los eigenvalores y eigenvectores y sus aplicaciones en Física, particularmente relacionadas con el concepto de inercia de un cuerpo rígido (Beltrán-Meneu, Murillo-Arcila y Albarracin, 2017; Beltrán-Meneu, Murillo-Arcila y Jordán, 2017). Los estudios descritos han ocupado un énfasis en el contexto con matrices, sin embargo, Klasa (2010) se refiere a la necesidad de estructurar un modelo cognitivo que, desde la Transformación Lineal (TL), describa cómo puede ocurrir el aprendizaje de los eigenvalores y eigenvectores, porque esto puede ser una guía para su enseñanza y estímulo para su aprendizaje.

En este artículo se presenta un modelo cognitivo refinado del concepto de eigenvalor y eigenvector, desarrollado con base en los constructos teóricos de APOE. Este modelo, denominado *descomposición genética* (DG), toma como punto de partida los resultados de investigación descritos, entre otros aspectos, de la disciplina que buscan fomentar la comprensión del concepto; por ejemplo, el análisis de libros de texto (Betancur-Sánchez et al., 2021). Como resultado de la aplicación de los tres componentes del Ciclo de investigación de APOE, la DG refinada señala la importancia del mecanismo de coordinación entre diferentes Procesos relacionados con los eigenvalores y eigenvectores; entre ellos, el Proceso de TL, el Proceso de espacio nulo y/o el Proceso de determinante. La organización del artículo inicia con la descripción general de elementos teóricos y de método.

2. La teoría APOE y el Ciclo de investigación

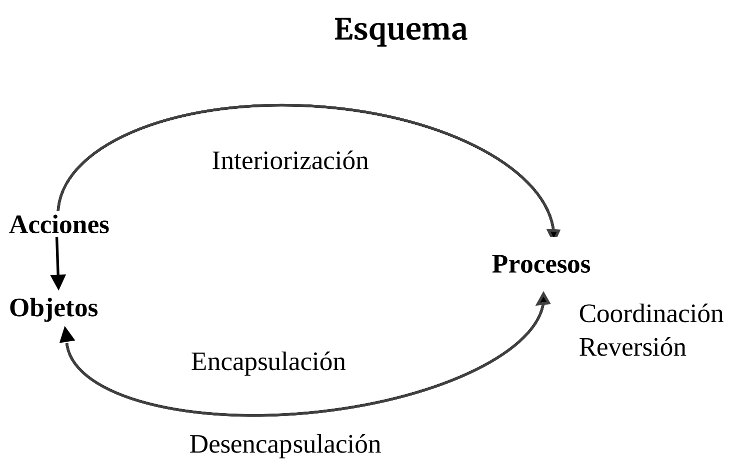
Esta sección se divide en dos partes, en la primera se presenta una descripción general de la teoría APOE que explica las estructuras y mecanismos mentales que sustentan un modelo cognitivo, denominado *descomposición genética* (DG); este modelo es considerado como el corazón de esta perspectiva teórica (Arnon et al., 2014). En la segunda parte, se presenta el Ciclo de Investigación que propone la teoría, cuyos componentes fueron seguidos como Fases del método que guía esta investigación.

2.1. Estructuras y Mecanismos mentales

La teoría APOE es una teoría cognitiva que permite describir cómo un individuo puede comprender una porción de conocimiento matemático (Arnon et al., 2014; Roa-Fuentes y Parraguez, 2017). Dicha descripción se logra a través de un modelo cognitivo, DG, resultado de la aplicación de un Ciclo de Investigación formado por tres componentes que se describen en el apartado 2.2.

Los conceptos matemáticos son aprendidos mediante la construcción de ciertas estructuras mentales a partir de otras cimentadas previamente. La comprensión se genera a través de casos particulares de *abstracción reflexiva* (Piaget, 1975) y de mecanismos mentales como: interiorización, coordinación, encapsulación y reversión, que permiten la construcción de las estructuras Acción, Proceso, Objeto y Esquema (Arnon et al., 2014).

Figura 1. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción de conocimiento matemático



Fuente: Arnon et al., 2014, p.10

La figura 1 muestra una forma básica de establecer las relaciones entre las estructuras y los mecanismos que las generan. Para explicar cómo ocurre la construcción de conocimiento matemático se debe tener en cuenta que este se inicia a partir de Objetos construidos previamente (Dubinsky, 1991), sobre los cuales un individuo puede realizar Acciones para transformarlo. En general, una estructura Acción se distingue por la dependencia del individuo de recibir indicaciones externas para realizar transformaciones sobre los Objetos. Al repetir y reflexionar sobre las Acciones el individuo puede interiorizarlas en un Proceso. Así, las transformaciones ocurren en la mente del indiviudo por su reflexión sobre las Acciones y no como resultados de una orden externa; además, en esta estructura mental la realización de la actividad matemática del individuo no depende de realizar la Acción paso a paso, puede omitir alguno o realizarlos en un orden diferente. Un mecanismo muy importante es el de coordinación, el cual permite poner juntos dos o más procesos (González y Roa Fuentes, 2017; Arnon et al., 2014). Si la coordinación de Procesos no ocurre, es posible que la evolución de las estructuras sea inalcanzable, ya que el macanismo de encapsulación se da para un único Proceso. La encapsulación permite que la forma dinámica del Proceso sea estructurada por el individuo como un todo, esto es, en un nuevo Objeto que se caracteriza por ser una estructura estática. Una estructura Objeto, permite que el individuo realice operaciones entre los objetos para generar nuevos (Arnon et al., 2014).

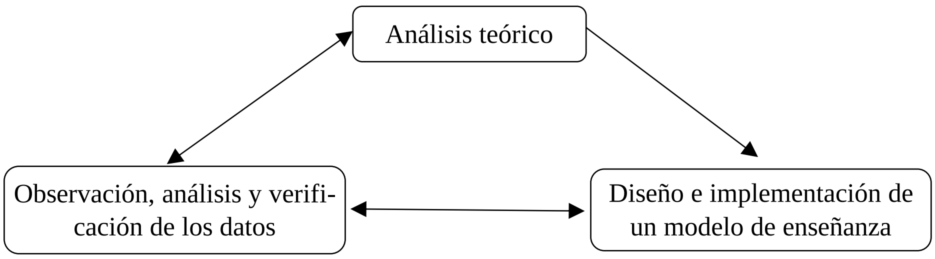
El Objeto es una estructura sobre la cual es posible realizar nuevas Acciones para dar paso a la construcción de un nuevo Esquema o también puede ser asimilado por un Esquema preexistente. Los Esquemas son las estructuras más robustas y se definen como una colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas relacionados con una porción de conocimiento matemático.

Los Esquemas se caracterizan a través de niveles definidos por la triada *intra* [elementos aislados, sin relaciones], *inter* [relaciones y transformaciones] y *trans* [pertinencia y alcance] (Arnon et al., 2014). En una DG se presenta la descripción de las estructuras y mecanismos mentales que se ponen en juego para explicar la construcción de conocimiento matemático. En la teoría APOE, una DG requiere de evidencia empírica que soporte las estructuras y mecanismos mentales hipotéticos que se proponen en ella.

2.2. Ciclo de investigación

El Ciclo de investigación de APOE tiene lugar a través del desarrollo de tres componentes que permite la formulación y validación de la DG. A continuación se explica cada componente de manera general para en la sección siguiente, mostrar cómo cada componente guía el diseño y desarrollo de esta investigación situada en los eigenvalores y eigenvectores.

Figura 2. Ciclo de investigación



Fuente: Arnon et al., 2014, p. 94

Como muestra la figura 2, el Ciclo de investigación inicia con el *Análisis Teórico*, esta componente permite definir un modelo cognitivo hipotético sobre la porción de conocimiento matemático que se busca construir. Como se plantea en Arnon et al., (2014), con base en la epistemología del concepto, el análisis de libros de texto, los resultados en Matemática Educativa sobre las dificultades relacionadas con el aprendizaje y enseñanza del concepto en estudio, y la experiencia de los investigadores como profesores y estudiantes, se formula una DG preliminar. En la segunda componente, Diseño e implementación de un ciclo de enseñanza, se diseñan y analizan instrumentos que fomentan el desarrollo de la clase y/o la evaluación que permiten dinamizar la DG. Esto es, generar instrumentos que permitan evidenciar en la actividad matemática de los estudiantes las estructuras y mecanismos mentales que se plantearon en la DG propuesta en la primera componente. La implementación de la enseñanza toma lugar en la tercera componente, Observación, análisis y verificación de los datos, a partir de entrevistas, la aplicación de tareas y el desarrollo de clases. La figura 2 muestra la retroalimentación constante entre las componentes 2 y 3, gracias a la actividad de los estudiantes frente a las tareas o situaciones propuestas. La relación entre la segunda y tercera componente permite tener como resultado de la aplicación del Ciclo de investigación una DG validada o refinada que resulta muy cercana a la forma en que los estudiantes construyen el concepto de interés.

3. Metodología del estudio: diseño y desarrollo del Ciclo de investigación

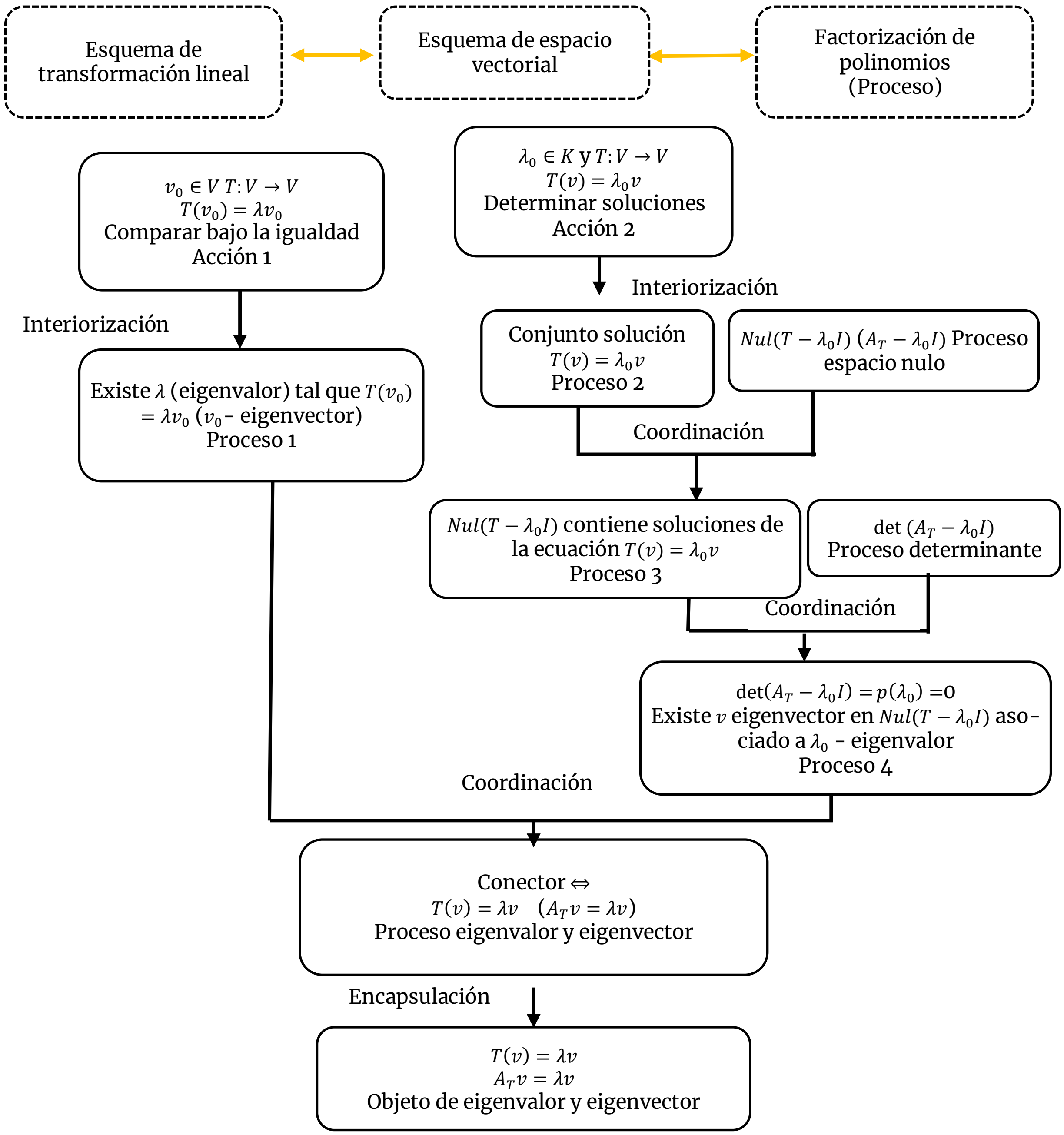
3.1. Análisis Teórico

La DG que se presenta a continuación es el resultado del diseño y desarrollo de la primera componente del Ciclo de investigación. En Betancur-Sánchez et al. (2021) se presentan con detalle aspectos que resultaron clave para la formulación de la DG preliminar (Figura 3). A continuación, destacamos aspectos que serán retomados en el análisis de las estructuras que evidencian los estudiantes durante la segunda y tercera componente del ciclo de investigación.

En las construcciones previas se propone un Esquema de TL (González y Roa-Fuentes, 2017; Roa-Fuentes y Oktaç, 2010) y un Esquema de espacio vectorial en un nivel *Inter* (Parraguez y Oktaç, 2012). El nivel *Inter* permite generar interacciones entre los Esquemas, a través del concepto de Base de un espacio vectorial. La interacción involucra un reconocimiento del campo sobre el cual está definido el espacio vectorial. En particular, interesa una concepción Proceso de factorización de un polinomio sobre un campo K que puede promover la existencia y el cálculo de sus raíces.

El Esquema de TL en un nivel *Inter* permite reconocer un operador lineal como una TL definida sobre un espacio vectorial V, $T: V \to V$. La construcción empieza mediante dos Acciones (Ver Figura 3). La Acción 1 es de comparación; dado un operador lineal T o una representación matricial A_T y un vector específico $v_0 \in V$, para el cual se busca un escalar $\lambda \in K$ tal que $T(v_0) = \lambda v_0$. Esta Acción es interiorizada en un Proceso (*Proceso 1*) donde el estudiante puede dar cuenta de la existencia de un escalar λ. Consideramos que el *Proceso 1* también puede provenir de la coordinación entre el Proceso de TL y Proceso múltiplo escalar bajo la relación de igualdad y así denominar a v_0 y λ como un eigenvector y eigenvalor de T respectivamente. La coordinación entre el Proceso de TL y múltiplo escalar puede ser motivada en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ a través de la representación geométrica de la colinealidad y rotaciones de 0° o 180° entre v_0 y $T(v_0)$ o v_0 y $A_T v_0$ (Betancur et al., 2021; Parraguez et al., 2022; Yáñez, 2015).

Figura 3. Descomposición genética preliminar de eigenvalor y eigenvector



Fuente: Betancur-Sánchez et al., 2021, p. 14

Dado λ_0 en un campo K y un operador lineal T o representación matricial A_T, la Acción 2 consiste en determinar vectores v que verifiquen la ecuación vectorial $T(v) = \lambda_0 v$ o $A_T v = \lambda_0 v$. La interiorización de esta Acción (*Proceso* 2) permite reconocer la existencia de vectores v no nulos como eigenvectores asociados a λ_0. El Proceso 2 puede coordinarse con el Proceso de espacio nulo mediante la pertenencia de eigenvectores de T en $Nul(T - \lambda_0 I)$ (Salgado y Trigueros, 2014). El Proceso resultante (*Proceso* 3) es coordinado con el Proceso de determinante para reconocer que si $\det(A_T - \lambda_0 I) = 0$, entonces existen vectores diferentes de cero en $Nul(A_T - \lambda_0 I)$. El estudiante puede relacionar el $\det(A_T - \lambda I)$ como una condición para que existan vectores no nulos en $Nul\ (A_T - \lambda I)$ y denominar $\det(A_T - \lambda I)$ como el polinomio característico asociado a A_T. Las raíces λ sobre el campo K del polinomio característico pueden identificarse como los eigenvalores de T y los vectores no nulos en $Nul\ (A_T - \lambda I)$ como los respectivos eigenvectores. Una construcción de los Procesos involucrados anteriormente permite dotar de sentido la ecuación $T - \lambda I = 0\ [A_T - \lambda I = 0]$.

El Proceso 4 y 1 se coordinan mediante la relación bicondicional ($\leftrightarrow$) de existencia, dando paso al Proceso de eigenvalor y eigenvector. El reconocimiento de la relación bicondicional de existencia permite entender que: si v es un eigenvector de T, entonces existe un escalar λ en el campo K tal que $T(v) = \lambda v$. Y, si λ es un eigenvalor de T, entonces existen vectores $v \in V$ no nulos tal que $T(v) = \lambda v$.

La reflexión sobre el Proceso de eigenvalor y eigenvector permite considerar diferentes representaciones matriciales del operador lineal y reconocer que las raíces $\boldsymbol{\lambda}$ del polinomio característico son invariantes y corresponden a los respectivos eigenvalores del operador. Así, los eigenvectores asociados a un eigenvalor $\boldsymbol{\lambda}$ se reconocen como un conjunto $\boldsymbol{E_\lambda}$, denominado Eigenespacio. El mecanismo de encapsulación permite ver la totalidad del Proceso identificando los eigenvalores y eigenvectores como parejas $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{v})$ que definen una relación funcional, $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{K}$ y $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0} \in \boldsymbol{E_\lambda}$. Aquí es posible considerar una base $\boldsymbol{\beta_{E_\lambda}}$ del eigenespacio $\boldsymbol{E_\lambda}$ y actuar sobre la pareja $(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\beta_{E_\lambda}})$.

3.2. Diseño e implementación de la enseñanza

Esta componente es orientada por la DG preliminar presentada en la sección anterior, donde cada tarea diseñada está enfocada en detalles que no pueden descuidarse en la implementación (Arnon et al., 2014; Trigueros y Oktaç, 2019). Las tareas buscan promover la interiorización de las Acciones, la coordinación de Procesos y la encapsulación para dar paso a la estructura Objeto de eigenvalor y eigenvector.

La implementación de la enseñanza se fundamentó en el ciclo ACE (por sus siglas en inglés) propuesto por la teoría APOE para la instrucción en el aula. Los estudiantes trabajaron en las tareas diseñadas en la secuencia de instrucción (A), abordaron preguntas en pequeños grupos que generaron discusiones (C), la profesora las orientó con el propósito de favorecer la construcción de nuevo conocimiento. Para apoyar y fortalecer las nuevas construcciones se entregaron a los estudiantes otras tareas (E), algunas para realizar fuera del tiempo de clase, las cuales eran retomadas en el siguiente encuentro con el grupo (Arnon et al., 2014).

3.2.1. Contexto y participantes

Esta investigación es de tipo cualitativo con carácter descriptivo, participaron 30 estudiantes $[E_1, E_2, \dots, E_{30}]$ de una universidad colombiana pública vinculados a programas de ingeniería o matemáticas. Tales estudiantes cursaban Álgebra Lineal I por primera vez, con una intensidad 4 horas por semana. El tiempo de implementación de la enseñanza fue de 7 sesiones cada una de 120 minutos. Después de cada sesión la profesora del curso y uno de los investigadores se reunían con el propósito de discutir, planear o ajustar diferentes aspectos de la instrucción.

3.3. Instrumentos de investigación

Los instrumentos de investigación corresponden a las tareas diseñadas para la instrucción y tres situaciones (S1, S2 y S3) diseñadas para una entrevista didáctica. Los estudiantes E_7 y E_{11} participaron en las entrevistas didácticas.

A continuación, se presenta una de las tareas implementadas en la enseñanza etiquetada como S0 sobre la cual, en la sección 4.1, se analizan las producciones de algunos estudiantes. Además, se presentan las situaciones de la entrevista acompañadas de una descripción con base en la DG.

S0: Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, un operador lineal definido por: $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x - 2y \\ -2x - 2y \end{bmatrix}$.

a) Considere los vectores $u_1 = [2, -1]; u_2 = [-3,3]; u_3 = [1,1]$. Encuentre los vectores $T(u_1); T(u_2); T(u_3)$.

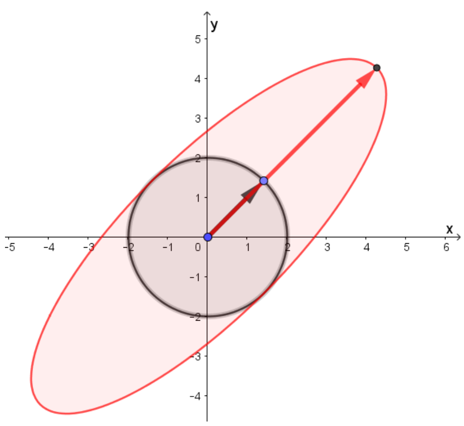
b) Ubique en planos cartesianos cada vector u_i con su respectiva imagen bajo T. ¿Qué relación geométrica se tiene con cada par de vectores u_i y $T(u_i)$? ¿Cuál(es) vector(es) es(son) eigenvector(es) de T?

c) ¿Existen otros eigenvectores para el operador lineal T? Si es así, ¿Cuáles son?

d) ¿2 es otro eigenvalor para el operador lineal T?, Si es así, ¿Cuáles son los eigenvectores asociados?

El propósito de S0 es motivar el trabajo en las representaciones algebraicas y geométricas. Al encontrar las imágenes de varios vectores del dominio del operador lineal y graficar los vectores u_i y $T(u_i)$ en respectivos planos cartesianos, se pueden identificar los casos en que u_i y $T(u_i)$ son vectores colineales. En esta actividad garantizamos que existiera un eigenvector con eigenvalor negativo y otro con eigenvalor 0, con el fin de provocar una discusión respecto a los posibles eigenvalores y eigenvectores de un operador lineal.

Figura 4. Deformación del círculo bajo B



S1: Un círculo es deformado mediante un operador lineal convirtiéndolo en una elipse girada. La matriz asociada respecto a la base canónica es $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. En la figura (4) se muestra como el vector negro es transformado bajo B en el vector rojo.

a) ¿El eje principal de la elipse está sobre el generado de un eigenvector de B?

b) ¿Cuál es la longitud del eje mayor de la elipse?

c) ¿Es válido afirmar que el eje menor de la elipse está sobre el espacio generado de otro eigenvector de B? Justifique

d) ¿2 es un eigenvalor de B? Si la respuesta es SÍ, justifique. Si es NO, explique si pueden existir otros eigenvalores diferentes a los encontrados.

La interiorización de las Acciones en un Proceso de eigenvector y eigenvalor permite reconocer mediante la relación geométrica de colinealidad que el vector dibujado es un eigenvector de B; además, al justificar sin pensar directamente en coordenadas del vector representado y conocer la longitud del eje mayor de la elipse. Entendemos que una concepción Proceso le podría permitir al estudiante explicar la existencia de eigenvalores y eigenvectores y justificar cuáles son los eigenvalores de una matriz 2×2.

S2: Sea

$$C = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

Una matriz 2×2 tal que la entrada $a_{11} = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

a) ¿Qué valor debe tomar α para que la matriz C tenga por eigenvalor a 3? Justifique.

b) Para el valor de α encontrado, ¿La matriz C tiene otros eigenvalores diferentes a 3?

El propósito de esta tarea es obtener evidencias de una concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector estable. Para afrontar con éxito S2, es necesaria una concepción Proceso de dicho concepto para reconocer que 3 debe ser un eigenvalor de la matriz C y, por lo tanto, existe un eigenvector w no nulo que verifica $Cw = 3w$. Un Proceso estable de eigenvalor y eigenvector permite recurrir a los Procesos que le dieron origen, reconocer o establecer condiciones involucrando el espacio nulo o el determinante de $C - 3I$ para garantizar la existencia de 3 como eigenvalor. El ítem b) fue incluido con el propósito de buscar evidencias sobre cómo los estudiantes pueden pensar en todos los eigenvectores y eigenvalores de un operador lineal.

S3: Sea

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Explique si la matriz D tiene por eigenvalor al 0. Si la respuesta es afirmativa, indique qué características tienen los eigenvectores asociados. Si la respuesta es negativa, justifique.

b) Explique si los vectores $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ son eigenvectores de la matriz D.

c) ¿El vector $w + u$ es un eigenvector de la matriz D? Justifique.

d) ¿Cuántos eigenvalores tiene la matriz D y cuáles son?

e) ¿Existe una base para $\mathbb{R}^3$ formada por eigenvectores? Escriba su razonamiento.

En este caso se busca obtener información que permita analizar características del mecanismo de encapsulación que da paso de una estructura Proceso a una Objeto. Se genera la reflexión si al sumar dos eigenvectores se obtiene un nuevo eigenvector y cuál sería el eigenvalor asociado. Pensar en formar una base para el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ constituida por eigenvectores puede favorecer la caracterización del operador lineal en términos de sus eigenespacios.

4. Evidencias sobre las estructuras y mecanismos mentales: relación entre los componentes de investigación

Los datos están organizados según su procedencia: 1) Implementación de la instrucción: vector cero - no eigenvector. 2) Entrevistas didácticas: asegurando formas de pensamiento estables relacionadas con ¿Falsa concepción Proceso? Procesos subyacentes a la concepción Proceso y Reflexiones sobre la totalidad del Proceso.

4.1. Evidencias desde la implementación de la instrucción: Vector cero – no eigenvector

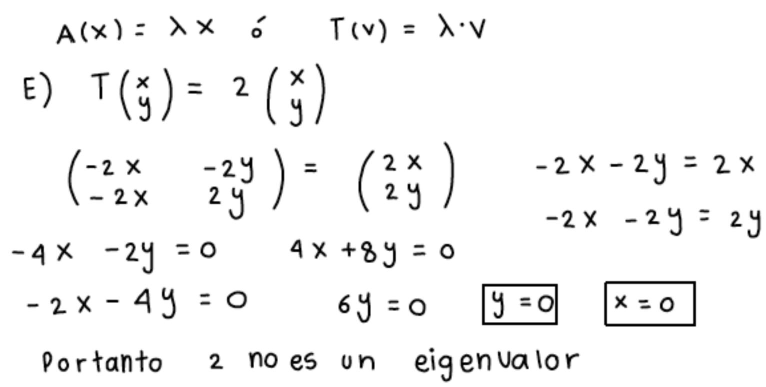
En la tarea S0 los estudiantes discuten sobre la posibilidad de que el cero y los números enteros negativos sean eigenvalores. Mientras el investigador y la profesora observaban los grupos de discusión, identificaron dos preguntas en varios de ellos: ¿El escalar cero es un eigenvalor? Y ¿El vector cero es un eigenvector? En uno de los grupos se evidencia el siguiente diálogo:

> E1: [...] ¿Puedo tomar el escalar cero? [...] entonces, puedo tomar cualquier vector de acá (Señala el dominio de la transformación) y volverlo un eigenvector.
>
> I: ¿Si tomo cualquier vector y encuentro su imagen será el vector cero?
>
> E1: [...] Pues no necesariamente. Pero si es cero el eigenvalor, ¿el eigenvector sería cero?
>
> E20: [...] ¿Si tomamos la transformación lineal en $(0,0)$ siempre será $(0,0)$? [...], entonces para el vector $(0,0)$ el escalar por el que multiplicábamos puede ser cualquiera. [...] El vector cero puede ser un eigenvector y cualquier escalar como su eigenvalor [...]
>
> E11: Ese sí no sería un eigenvector porque tendría muchos valores de λ que cumplen.
>
> P: ¿Pueden haber muchos λ?

E4: [...] No pueden haber muchos λ para un mismo eigenvector. No puedo tener $\lambda = 2$ y $\lambda = 4$ para un mismo vector de la transformación porque entraría en una inconsistencia. 2 por un vector no puede ser igual que 4 por el mismo vector.

E1 centra su atención en multiplicar vectores por el escalar cero, parece no coordinar el Proceso de TL con el Proceso de múltiplo escalar. E20 acepta que el vector cero puede ser un eigenvector, pero sus estructuras no le permiten pensar en las implicaciones sobre el dominio y la imagen de la transformación. E4 considera otros vectores del dominio e identifica una inconsistencia al considerar las igualdades $T(v) = 2v = 4v$, aunque no las escribe explícitamente, usa la igualdad $2v = 4v$ para justificar la unicidad del eigenvalor asociado a un respectivo eigenvector. La coordinación de los Procesos de TL y múltiplo escalar son estructuras y mecanismos clave en la comprensión que el vector cero no es un eigenvector.

Figura 5. Producción de E2 sobre ítem e) en S0



La discusión sobre si el cero vector no es un eigenvector permitió una evolución en la comprensión del concepto. En la Figura 5 se muestran las producciones de E2 en el item e) de S0. El razonamiento corresponde a determinar soluciones de la ecuación vectorial $T(v) = 2v$ y, al reconocer la solución trivial, concluye que 2 no es un eigenvalor; pues el vector cero, aunque es solución de la ecuación, no es un eigenvector.

4.2. Evidencias desde las entrevistas didácticas

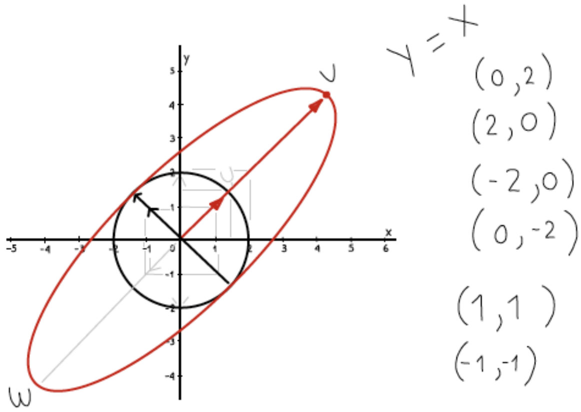
Asegurando formas de pensamiento estables ¿Falsa concepción Proceso?: En el diálogo con E11 sobre S1, identificamos formas de pensamiento que podrían estar asociadas a una concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector.

E11: [...] este vector u sería $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (señala vector en la figura 6) [...] es como para darle un valor y poder saber qué valor también tiene la transformación (vector v).

I: ¿Por qué hace eso?

E11: Para conocer el vector transformado, sin transformar y determinar cuál es el eigenvalor [...] si encuentro un eigenvalor así asegurar que sí está sobre un eigenvector.

Figura 6. Interpretaciones de E11 sobre la figura en S1



I: ¿Cómo puede justificar lo del eigenvalor?

E11: [...] Gráficamente [...] diría que sí porque u esta sobre v. Lo que me dice que es un múltiplo escalar de u. Entonces eso me garantiza que sí existe un eigenvalor [...] (Figura 6).

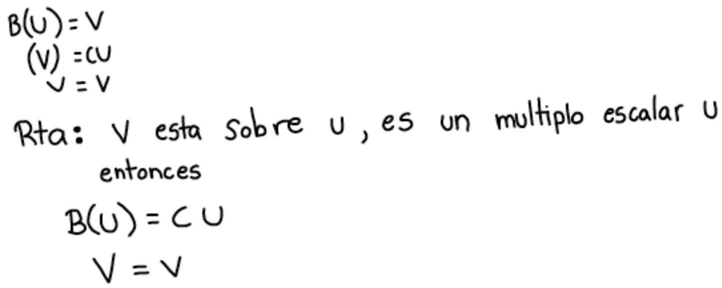
I: ¿Puede afirmar que u es un eigenvector de B?

E11: Si porque ya sé que existe un eigenvalor (Figura 7).

I: ¿Cuáles vectores diferentes de u son eigenvectores de B?

E11: Yo creería que $(-2{,}0)$ y (0,-2) [...] sin embargo, debo multiplicarlos por la matriz [...] yo pienso que los vectores $(1{,}1)$ y $(-1,-1)$ son posibles eigenvectores porque están sobre u [...] hace un momento garanticé que existe un eigenvalor para u.

Figura 7. Justificación de E112 sobre ítem a) en S1



E11 reconoce la TL que actúa sobre u para producir el vector v, sin embargo, E11 considera necesario saber las coordenadas del vector "sin transformar" y "transformado" para averiguar el escalar. Al reconocer la colinealidad entre los vectores u y v, él afirma que u es un eigenvector y eso garantiza la existencia de un escalar. Además de argumentar que u es un eigenvector de la matriz B, E11 reconoce los vectores $[1{,}1]$ y $[-1,-1]$ como posibles eigenvectores de B, aunque duda que tengan el mismo eigenvalor asociado que u.

En el siguiente diálogo se identifica cómo las construcciones mentales de E11 le permiten razonar sobre algunos cuestionamientos.

Figura 8. Producción de E11 para justificar que [1,1] es un eigenvector con eigenvalor 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 \\ 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

> E11: [...] para hallar la longitud del eje mayor puedo usar la distancia entre puntos o dos veces la longitud de v [...]. Pero no tengo coordenadas (Silencio).
>
> I: Usted había dicho que el vector $(1,1)$ es un posible eigenvector, ¿Por qué?
>
> E11: [...] (Figura 8) tiene 3 por eigenvalor [...] ahh, todos los vectores que están sobre $(1,1)$ van a tener el mismo eigenvalor [...] ¿Estoy bien o estoy mal?
>
> I: ¿Para otros que estén sobre la misma recta?
>
> E11: También sería 3 [...]
>
> I: ¿Qué significa que el eigenvalor de u sea 3?
>
> E11: [...] la magnitud de v es tres veces la magnitud de u [...] lo va a multiplicar por 3.
>
> I: ¿Lo había considerado para encontrar la longitud del eje mayor?
>
> E11: [...] esto sería otra estrategia [...]

Figura 9. Producción de E11 para justificar el ítem b) en S1

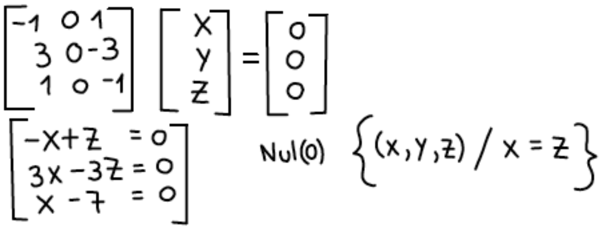
$3|U| = |V|$ y $2|V|$ = longitud del eje mayor
$6|U| = 2|V|$ = longitud del eje mayor

E11 reconoce que todo vector colineal a u tienen el mismo eigenvalor asociado, tal forma de pensamiento es característica de una concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector. En la figura 9, E11 relaciona el escalar 3 con la longitud de los vectores u y v mediante la igualdad $3||u|| = ||v||$, es decir, $T(u) = 3u$. Cuando el investigador solicita a E11 explicar si 2 es un eigenvalor de B ocurre lo siguiente:

> E11: [...] no puede ser un eigenvalor [...] ya tengo todos los eigenvectores que están sobre el eje mayor y menor [...] Todas las combinaciones lineales de Q van a tener eigenvalor 1 y, todas las combinaciones lineales de u van a tener por eigenvalor 3.
>
> I: ¿Qué tal existan otros eigenvectores que aún no conoce?
>
> E11. [...] tomo un vector $[x, y]$ lo multiplico por la matriz y pues ahora no sé muy bien que tengo que hacer. Pero, sí creería que solo tiene a 1 y a 3.
>
> I: ¿Por qué tiene certeza que los eigenvalores solo son 1 y 3? ¿Una matriz 2×2 puede tener tres eigenvalores?
>
> E11. [...] creo que eso puede ir relacionado con el número de filas y columnas [...] no estoy seguro.

En la conversación anterior E11 no puede dar explicaciones contundentes respecto a si 2 es un eigenvalor de la matriz B, sin embargo, justifica que u es un eigenvector mediante la colinealidad. Reconoce que todo vector del generado de u es un eigenevalor de B con eigenvalor 3, pero no puede justificar si el escalar 2 es o no un eigenvalor. E11 trata de considerar la ecuación vectorial $Bu = 2u$, pero no logra avanzar, al afirmar que solo tiene por eigenvalores a 1 y 3, E11 se sustenta en algo que recuerda, pero no con claridad.

Figura 10. Producción de E11 para justificar el ítem a) en S3



Frente al estancamiento de E11 con el item d) en S1 el investigador decide usar S3. En la figura 10 se muestra la producción de E11 respecto al primer item de S3.

E11: [...] bueno aquí sería como mirar el espacio nulo, dado que al multiplicar por cero se obtiene el vector cero [...]

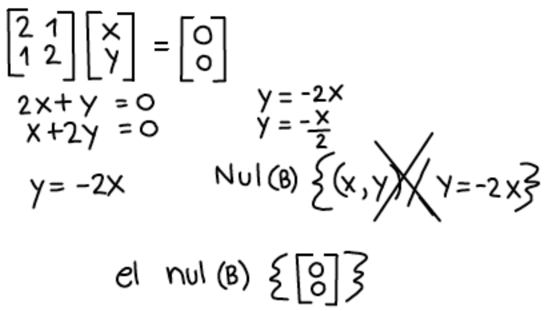
I: ¿Esto le puede ayudar a determinar si tiene por eigenvalor al cero? ¿Cuál sería un vector del espacio nulo de la matriz?

E11: [...] el vector $(1,0,1)$ está en el espacio nulo [...] el producto con la matriz debe ser cero.

I: ¿Cuál sería el eigenvalor?

E11: Umm sería el cero [...]

Figura 11. Producción de E11 para determinar espacio nulo de B en S1



I: ¿Tiene dudas sobre el eigenvalor?

E11: Es que estaba pensado si era el eigenvalor el que no podía ser cero o era el eigenvector. Pero ya, el eigenvector es el que no puede ser cero [...]

I: ¿Puede justificar de otra forma que cero es un eigenvalor?

E11: [...] bueno y si en el punto anterior (S1) le encontraba el espacio nulo quizás podría mostrar que el eigenvalor es cero (Figura 11). [...] el cero no es un eigenvector de la matriz B. Eso apoya la idea que la matriz no tiene más de dos eigenvalores.

E11 reconoce que analizar si 0 es un eigenvalor de D se relaciona con el espacio nulo, puede determinar las características de los vectores que pertenecen a tal subespacio y dar ejemplos específicos. Al determinar el espacio nulo de B y D, E11 lo intepreta como la solución de la ecuación vectorial $Bx = 0$. Al identificar que $Bx = 0$ tiene solución trivial reconoce que el vector cero no es un eigenvector de B y re-afirma que la matriz B tiene solamente a 1 y 3 como eigenvalores.

I: ¿Puede justificar de otra forma que cero es un eigenvalor?

E11: [...] en la matriz B sus filas o columnas son linealmente independientes. Esto pasaría si tengo otra matriz que tiene solo el vector cero en el espacio nulo. Y por eso me va a dar que el determinante es diferente de cero [...]

I: ¿Qué pasa si tengo otra matriz cuyo espacio nulo solo es el vector cero?

E11: [...] siempre que el determinante sea diferente de cero solo va a tener en el espacio nulo al vector cero [...] la matriz D tiene una columna de ceros, por lo que tiene determinante cero y la columna 3 es un múltiplo escalar de la 1 [...] por eso el espacio nulo tiene infinitos vectores.

Aunque E11 evidencia una concepción Proceso de espacio nulo, su concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector está en construcción. E11 muestra interiorizar Acciones y coordinar ciertos Procesos. En particular, coordina el Proceso de conjunto solución de ecuaciones de la forma $Ax = 0$ con el respectivo espacio nulo de A, esto le permite decidir si 0 es un eigenvalor o no de A. E11 logra concluir que 0 será un eigenvalor de una matriz cuadrada si el determinante es cero.

4.3. Procesos subyacentes a la concepción Proceso

La construcción de un Proceso adecuado es transcendental en la construcción de un Objeto. Mediante la evidencia empírica proveniente de la implementación de la enseñanza y las entrevistas didácticas, se ha identificado que tal estructura proviene de la coordinación de ciertos Procesos subyacentes.

Para referirnos a evidencias en relación con este tópico, presentamos un fragmento de la entrevista con E7 sobre la situación 2 (S2).

Figura 12. Interpretación de E7 para garantizar que 3 sea un eigenvalor en S2

$$\begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha x_1 - x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \alpha x_1 - x_2 = 3x_1 \\ x_1 + 4x_2 = 3x_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha - 3)x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

E7: […] se debe garantizar que 3 sea un eigenvalor […] algunas cosas no conozco. Ese valor de α y los eigenvectores de 3. Pero los puse así, general (Figura 12).

I: ¿Por qué está igualando eso?

E7: […] Si 3 es un eigenvalor deben existir vectores (x_1, x_2) y se cumple esta igualdad (se refiere a $Cx = 3x$, Figura 12). Lo que veo es mirar el sistema que me resulta.

I: ¿Qué vas a mirar en el sistema? ¿Por qué el sistema?

E7: […] este sistema lo puedo expresar como esto (señala la matriz amentada en la Figura 13) y ahí ya solo está el α […] el sistema es porque según su solución se cumple o no, que 3 sea eigenvalor.

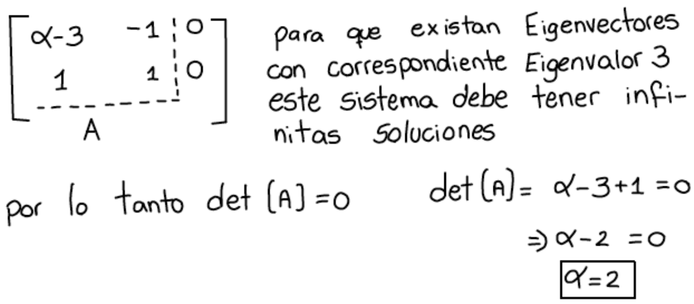
I: ¿Según sea la solución 3 es o no es un eigenvalor?

E7: Exacto. Si el sistema tiene soluciones infinitas entonces 3 es un eigenvalor de la matriz.

I: ¿Por qué debe tener infinitas soluciones?

E7: Es como hallar el espacio nulo de esa matriz (Figura 13). Debe tener infinitos vectores porque el cero no es un eigenvector […] entonces el determinante debe ser cero […] ya puedo tener información sobre α […] El valor es 2 y se cumple que tiene por eigenvalor a 3.

Figura 13. Producción de E7 para argumentar sobre el ítem a) en S2



E7 muestra comprender que 3 es un eigenvalor si existen vectores no nulos que verifican $Cx = 3x$. El razonamiento de E7 sobre vectores generales considerándolos como eigenvectores asociados a 3 le permite reconocer un sistema de ecuaciones lineales bajo la igualdad $Cx = 3x$. Al preguntar por los valores de α tal que 3 sea un eigenvalor, E7 argumenta que el conjunto solución de $Cx = 3x$ debe ser infinito, dado que el vector cero no es un eigenvector. Al actuar y reflexionar sobre el sistema $Cx = 3x$ identifica la matriz asociada al sistema homogéno, la cual depende solo de α. Mediante el mecanismo de coordinación E7 argumenta que el conjunto solución para este sistema corresponde al espacio nulo de $C - 3I$ y agrega que tiene infinitos vectores cuando su determinante es cero.

En las explicaciones orientadas con E11 y las justificaciones de E7 se muestra evidencia de la necesidad y construcción de ciertos Procesos subyacentes al Proceso de eigenvalor y eigenvector. Los Procesos identificados son: Proceso vector cero - no es un eigenvector; Proceso de conjunto solución de $T(v) = \lambda_0 v$; Proceso de espacio nulo; y Proceso de determinante.

4.4. Reflexiones sobre la totalidad del Proceso

La totalidad de un Proceso se relaciona con la capacidad de concebir el Proceso como un todo. Para el concepto de eigenvalor y eigenvector, parece estar relacionado con la capacidad de argumentar sobre todos los eigenvalores y eigenvectores asociados a un operador lineal y cómo estos elementos van caracterizando al operador.

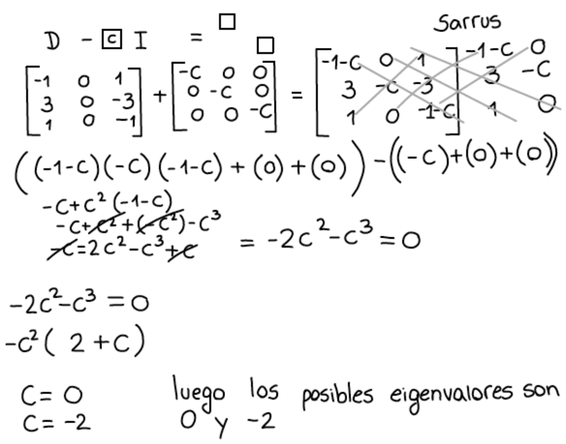
En el diálogo con E7 en S1 sobre el ítem d), sus reflexiones muestran una forma de caracterizar los eigenvalores de un operador. En las siguientes líneas se resaltan unos fragmentos al respecto.

> E7: [...] dos dos. Ya sabemos que 3 y 1 son eigenvectores.
>
> I: ¿Qué dices acerca de 2?
>
> E7: La matriz es de tamaño 2×2, el polinomio característico de esta matriz es de grado 2, no puede tener más de dos raíces. Umm diría que no puede ser un eigenvalor de B.
>
> I: ¿3 y 1 son raíces del polinomio característico de la matriz B?
>
> E7: [...] el polinomio característico me da información sobre todos los eigenvectores [...] Si son raíces del polinomio. Mi argumento sería que ese polinomio no puede tener otras raíces, 2 no puede ser otra raíz.

E7 evoca en su justificación el polinomio característico, asocia los eigenvalores con las raíces del polinomio sin realizar cálculos. De esa manera argumenta que 2 no puede ser otra raíz, dado que el polinomio es de grado 2 y por tanto no será un eigenvalor de B. El argumento muestra evidencia de una concepción Proceso de polinomio característico.

En diálogo con E11, después de reflexionar sobre S1 y S3, se identifica que este estudiante relaciona la existencia de eigenvalores con las raíces del polinomio característico. Mediante la reflexión motivada por el investigador en S3, E11 evoca explicaciones en relación con el polinomio característico y deja ver que lo reconoce en términos del determinante, esto emerge tras una pregunta del investigador (ver figura 15).

Figura 14. Producción de E11 sobre todos los eigenvalores de D en S3



I: ¿Cómo podemos conocer cuáles son todos lo eigenvalores de D?

E11: [...] Sería hacer el determinante con un escalar general.

I: ¿Ya puedes saber cuáles son los eigenvalores?

E11: Sí, creo que sí. Umm, pues el polinomio característico me podría dar información si lo igualo a cero.

I: ¿Por qué igualarlo a cero?

E11: Para garantizar que el escalar que obtenga en realidad tenga eigenvectores asociados ¿No? (Figura 14).

I: ¿Esos son los posibles eigenvalores?

E11: Tengo que mirar cuáles son sus eigenvectores (Figura 14).

E11 reflexiona sobre los eigenvalores y eigenvectores de un operador lineal. En sus explicaciones evidencia que activa construcciones de eigenvalores y eigenvectores con relación al polinomio característico y reflexiona sobre ellas. Las reflexiones de E7 se distinguen de las de E11 por su avance en la progresión propuesta por APOE, para describir la comprensión. E11 no puede concebir que el polinomio característico de un operador determina totalmente los eigenvalores, es decir, todas las raíces del polinomio sobre el respectivo campo. La forma de razonar de E7 muestra evidencias de una concepción Proceso de polinomio característico, elemento que se identifica como clave en la totalidad del proceso de eigenvalor y eigenvector.

5. Conclusiones

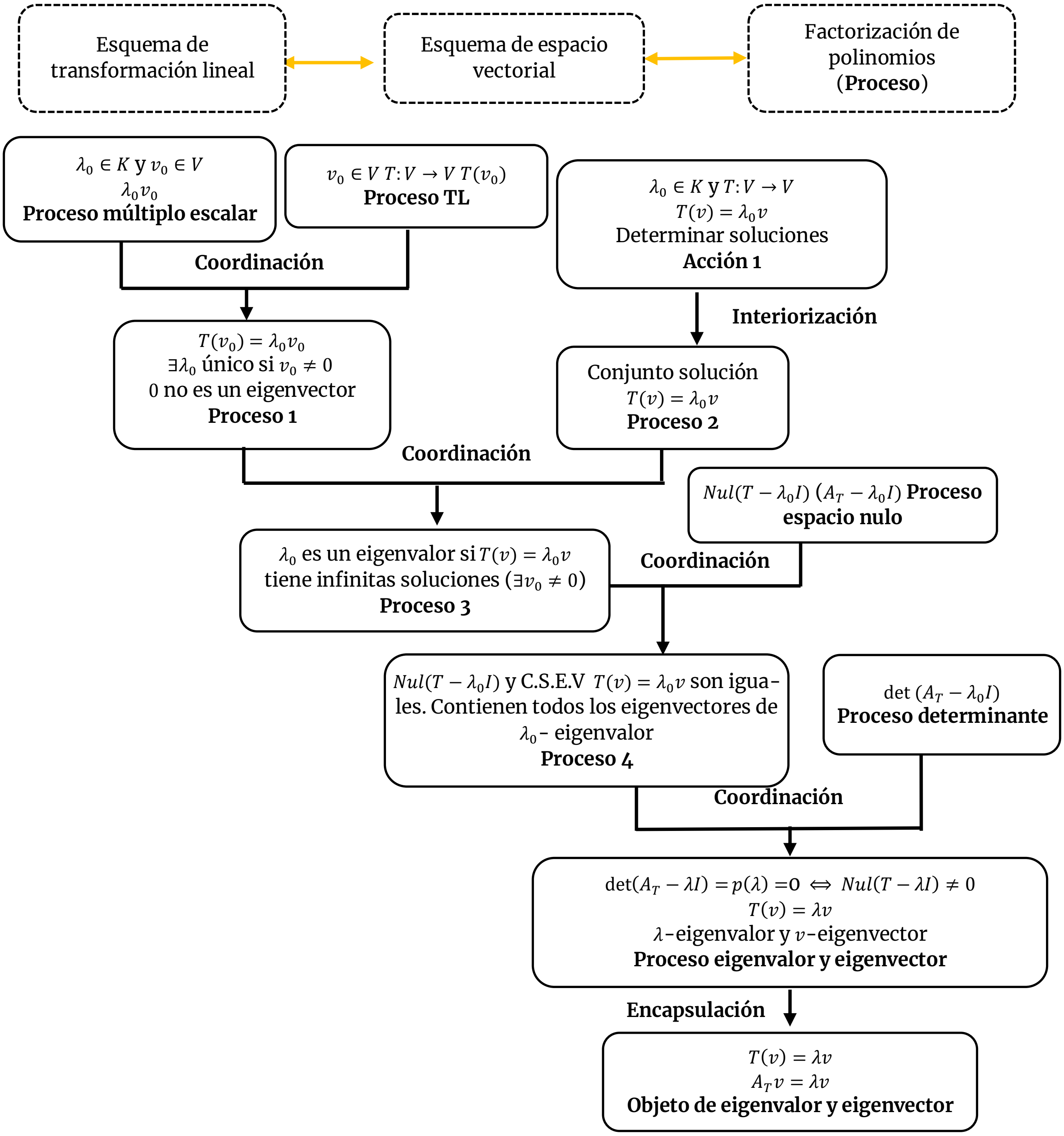
A continuación, se presentan dos apartados en los que se destacan los principales aportes de esta investigación, principalmente centrado en la DG refinada y sugerencias sobre sus implicaciones en la enseñanza del concepto de eigenvalor y eigenvector.

5.1. Modelo cognitivo refinado

El análisis de datos derivados de la instrucción y las entrevistas didácticas respaldan estructuras y mecanismos mentales considerados en la DG preliminar. La evidencia empírica muestra la importancia de la coordinación entre los Procesos de múltiplo escalar y TL bajo la relación de igualdad. Esto resulta fundamental para comprender que el vector cero no es un eigenvector.

La Acción de determinar soluciones de una ecuación vectorial de la forma $T(v) = \lambda_0 v$ sugiere desarrollarse en las tres interpretaciones de una TL (González y Roa-Fuentes, 2017). La interiorización de esta Acción motiva a interpretar dichas ecuaciones con la existencia de vectores que al ser transformados su efecto puede describirse mediante el múltiplo escalar, esto es apoyado por Larson y Zandieh (2013) y Andrews-Larson et al. (2017) sobre la interpretación de la ecuación $Ax = b$ como una transformación.

Figura 15. Descomposición genética refinada



Con base en la evidencia encontrada, entendemos que la construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector inicia cuando el estudiante ha reflexionado sobre la TL y el múltiplo escalar; reconoce vectores en V (dimensión finita) tal que su imagen al transformarlos equivale a multiplicar el vector por un escalar.

La reflexión sobre la Acción 1, determinar soluciones de la ecuación vectorial $T(v) = \lambda_0 v$, permite interiorizarla en un Proceso (Proceso 2) para reconocer que el vector cero siempre es solución y argumentar cuándo la solución es única o cuándo existen infinitas soluciones. Mediante la coordinación de los Procesos 1 y 2 se puede entender que un escalar λ_0 es un eigenvalor cuando el conjunto de solución de $T(v) = \lambda_0 v$ es infinito (Proceso 3).

La coordinación entre el Proceso 3 y el Proceso de espacio nulo mediante la pertenencia da paso a un entendimiento del conjunto solución de la ecuación vectorial $T(v) = \lambda_0 v$ en términos de un subespacio vectorial, eigenespacio (Proceso 4). La reflexión sobre tal pertenencia favorece la construcción de la equivalencia entre $T(v) = \lambda_0 v$ y $(T - \lambda_0 I)v = 0$.

El Proceso 4 es coordinado con el Proceso de determinante para caracterizar los valores escalares que corresponde como eigenvalores λ_0 de un operador lineal T o matriz asociada A_T y garantizan que $T - \lambda_0 I$ o $A_T - \lambda_0 I$ no sea invertible. Resultado de la coordinación de los Procesos subyacentes, se construye una concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector. Esta permite entender y justificar el porqué de la existencia de las eigenparejas (λ, v), es decir, que refiere un eigenvalor asociado a un operador T implica la existencia de eigenvectores; aún más, todos los eigenvectores asociados al eigenvalor λ (eigenespacio E_λ). Así mismo, si se tiene un eigenvector de un operador lineal T necesariamente debe existir su respectivo eigenvalor.

En la medida que el estudiante reflexiona sobre el Proceso de eigenvalor y eigenvector, puede ir reconociendo la totalidad que actúa sobre este y vincular todos los eigenvalores y eigenvectores correspondientes a un operador lineal T con las raíces del polinomio característico respectivo. Es necesario profundizar sobre cómo el polinomio característico contribuye en la evolución de las estructuras asociadas a los eigenvalores y eigenvectores. Dado que en la segunda y tercera componente de esta investigación se enfatizan situaciones que involucran operadores lineales definidos en $\mathbb{R}^2$ sobre el campo de los números reales, no se hace tan evidente la necesidad de analizar con detalle el polinomio característico. Por tanto, en la construcción de la relación entre el determinante de $(A_T - \lambda I)$ con el espacio nulo de $(A_T - \lambda I)$, tal como se muestra en la Figura 15, se encontró poca evidencia sobre cómo el polinomio característico se extiende más allá del solo hecho de factorizarlo, encontrar sus raíces y definirlas como eigenvalores.

5.2. Reflexiones para la enseñanza y otros estudios

Los resultados de este estudio muestran la importancia de estructurar Procesos que promuevan la construcción de relaciones entre la TL y sus eigenvalores y eigenvectores. Como resultado del diseño e implementación de la segunda componente del Ciclo de investigación, se destaca la importancia de orientar la reflexión de los estudiantes hacia la comprensión de la ecuación vectorial $Ax = b$ como una transformación (Larson y Zandieh, 2013). Así mismo, se reconoce que una transformación lineal no “deforma” de la misma manera a todos los vectores del espacio vectorial dominio. Tales situaciones proporcionan oportunidades para reconocer que existen vectores “especiales” que, al ser transformados, sufren un alargamiento, una comprensión o un giro de 180º (Parraguez et al., 2022).

La reflexión sobre la implementación en la segunda fase de la investigación muestra la importancia de proponer tareas que fomenten la coordinación de los Procesos subyacentes al Proceso de eigenvalor y eigenvector. Cuando un diseño de instrucción no favorece la construcción y uso de tales coordinaciones, la instrucción puede enfocarse en repetir un algoritmo y no motivar la reflexión y comprensión de los estudiantes. Consideramos que en $\mathbb{R}^2$ la estrategia propuesta por Schonefeld (1995) de "eigenpicture", para representar geométricamente cómo son transformados varios vectores bajo un operador lineal, favorece un entendimiento de los eigenvectores como vectores cuya imagen está sobre la misma recta.

Durante el desarrollo de esta investigación detectamos diferentes Procesos subyacentes al Proceso de eigenvalor y eigenvector, su construcción y coordinación son importantes para construir un Proceso estable. Aunque no se abordó la estructura Objeto, las reflexiones alrededor de la totalidad del Proceso plantean algunas preguntas: ¿Qué significa concebir la totalidad del Proceso de eigenvalor y eigenvector? ¿Qué tipo de Acciones se pueden realizar sobre dicha totalidad? ¿Cómo la construcción del polinomio característico puede promover la evolución del concepto al trabajar sobre diversos operadores lineales? Estas son cuestiones que motivan la reflexión a partir de este estudio y quedan abiertas para futuras investigaciones.

Agradecimientos

Al programa de Movilidad de la Vicerrectoría de Investigación y Extensión de la Universidad Industrial de Santander (VIE – UIS).

Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por el proyecto Fondecyt 1180468.

Los autores agradecen la buena disposición de los participantes en la implementación de la enseñanza y las entrevistas didácticas.

Referencias

Andrews-Larson, C., Wawro, M., & Zandieh, M. (2017). A hypothetical learning trajectory for conceptualizing matrices as linear transformations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(6), 809-829. https://doi.org//10.1080/0020739X.2016.1276225

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory a framework for research and curriculum education*. Springer Netherlands. https://doi.org.//10.1007/978-1-4614-7966-6

Beltrán-Meneu, M., Murillo-Arcila, M., & Albarracin, L. (2017). Emphasizing visualization and physical applications in the study of eigevectors and eigenvalors. *Teaching Mathematics and its applications, 36*(3), 123-135. http://doi.org//10.1093/teamat/hrw018

Beltrán-Meneu, M., Murillo-Arcila, M., & Jordán, E. (2017). A teaching proposal for the study of eigevectors and eigenvalors. *Journal of Technology and Science Education,* 7(1), 100-113. http://doi.org.//10.3926/jotse.260

Betancur-Sánchez, A., Roa-Fuentes, S., & Ballesteros, S. (2021). Una descomposición genética preliminar del concepto de eigenvalor y eigenvector: el análisis de libros de texto como sustrato en la construcción de modelos cognitivos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 24(3), 245-276. https://doi.org/10.12802/relime.21.2431

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–123). Kluwer.

González, D., & Roa-Fuentes, S. (2017). Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas. *Enseñanza de las ciencias*, *35*(2), 89-107. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2150

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. *Linear algebra and its applications*, *432*(8), 2100-2111. http://doi.10.1016/j.laa.2009.08.039

Larson, C., & Zandieh, M. (2013). Three interpretations of the matrix equation Ax = b. *For the Learning of Mathematics*, *33*(2), 11–17.

Parraguez, M., & Oktaç, A. (2012). El desarrollo de un Esquema del concepto de espacio vectorial. *Paradigma*, *33*(1), 103-134.

Parraguez, M., Roa-Fuentes, S., Jiménez, R., & Betancur-Sanchez, A. (2022). Estructuras y mecanismos mentales que desde una perspectiva geométrica modelan y articulan el aprendizaje de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *25*(1), 63-92. http://doi.org/10.12802/relime.22.2513

Piaget, J. (1975). Piaget’s theory (G. Cellerier & J. Langer, trans.). In P.B. Neubauer (Ed.), The process of child development (pp. 164–212). Jason Aronson.

Plaxco, D., Zandieh, M., &Wawro, M. (2018) Stretch Directions and Stretch Factors: A Sequence Intended to Support Guided Reinvention of Eigenvector and Eigenvalue. In: S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman, & M. Zandieh (Eds.), *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra* (pp. 175-192). ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Roa-Fuentes, S. & Oktaç, A. (2010). Construción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(1), 89-112.

Roa-Fuentes, S. & Parraguez, M. (2017). Estructuras Mentales que Modelan el Aprendizaje de un Teorema del Álgebra Lineal: Un Estudio de Casos en el Contexto Universitario. *Formación Universitaria, 10*(4), 15-32. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062017000400003

Salgado, H., & Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. *Educación Matemática*, *26*(3), 75-107.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 100-120. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.005

Schonefeld, S. (1995). Eigenpictures: Picturing the Eigenvector Problem. *The College Mathematics Journal*, *26*(4), 316-319.

Stewart, S., Andrews-Larson, C., Berman, A., & Zandieh, M. (Eds.) (2018). *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*. Springer.

Thomas, M., & Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: embodied, symbolic, and formal thinking. *Mathematics Education Research Group of Austaralasia*, *23*(275), 275-296. https://doi.org/10.1007/s13394-011-0016-1

Wawro, M., Zandieh, M., Rasmussen, C., & Andrews-Larson, C. (2013). *Inquiry oriented linear algebra: Course materials*. http://iola.math.vt.edu

Yáñez, A. (2015). *Construcción de los conceptos de valores y vectores propios en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, desde la teoría APOE* [Tesis de Maestría no publicada]. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

∞

Alexander Betancur

Universidad Industrial de Santander (Colombia)
albetsan@correo.uis.edu.co | https://orcid.org/0000-003-2404-289X

Solange Roa Fuentes

Universidad Industrial de Santander (Colombia)
doraroaf@uis.edu.co | https://orcid.org/0000-0001-8580-2763

Marcela Parraguez González

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
marcela.parraguez@pucv.cl | https://orcid.org/0000-0002-6164-3056

Recibido: 18 de agosto de 2021
Aceptado: 29 de agosto de 2022

Mental constructs associated with eigenvalues and eigenvectors: refining a cognitive model

Alexander Betancur @ [1], Solange Roa Fuentes @ [1],
Marcela Parraguez González @ [2]

[1] Universidad Industrial de Santander (Colombia)
[2] Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)

This article presents a genetic decomposition of the concept of eigenvalue and eigenvector, based on the concept of linear transformation. The study data is the result of the implementation of a teaching model based on a Genetic Decomposition, designed based on the APOS theory. The empirical evidence allows us to show a refined genetic decomposition in relation to the key structures and mechanisms, to account for the Processes that underlie the Process of eigenvalue and eigenvector, and to generate discussion in relation to the Process as a whole.

The methodology followed the research cycle proposed by the APOS theory and the cycle for instruction called ACE (questions or tasks in small groups, general discussions and tasks outside the class space to reflect and deepen). The implementation of the teaching was carried out in a regular Linear Algebra course with 30 students from the science and engineering programs at a public university in Colombia. During 7 sessions of 120 minutes, the researchers monitored the students' productions in relation to eigenvalues and eigenvectors through video recordings of the class and the analysis of the students' written productions, to later select two students to carry out didactic interviews.

The reflection on the implementation in the second phase of the research shows the importance of proposing tasks that promote the coordination of the Processes that underlie the eigenvalue and eigenvector Process. These are: "0 is not an eigenvector", solution set of $T(v) = \lambda_0 v$, null space of the operator $T - \lambda_0 I$ and $\det(T - \lambda_0 I)$ to give rise to a value construction Process eigenvalue and eigenvector. When a didactic design does not promote the construction and use of such coordinations, it can focus on repeating an algorithm, without motivating students' reflection and understanding. A very important aspect is the design of tasks that promote the different interpretations of linear transformation. We consider that in $\mathbb{R}^2$ the strategy proposed by Schönefeld of "eigenpicture" to geometrically represent how several vectors are transformed under a linear operator, allows the understanding of eigenvectors as vectors whose image is in the same straight line. In addition, the evidence shows the importance of the coordination mechanism and the role of the teacher to promote the connections between concepts of linear algebra through questions or tasks designed under the lens of refined genetic decomposition.

Reflections emerge from the study around the entire Process of eigenvalues and eigenvectors in relation to the characteristic polynomial and the scalar field referred to the vector space where the linear operator is defined. Some of the questions left by the study are: What type of Actions can be carried out on said totality? How the construction of the characteristic polynomial can promote the evolution of the concept when working on various linear operators?