

## El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la Universidad

### *Learning and teaching mathematics at the University*

María Trigueros @ <sup>1</sup>, Gloria Sánchez-Matamoros @ <sup>2</sup>

<sup>1</sup>Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

<sup>2</sup>Universidad de Sevilla (España)

**Resumen** ∞ Las investigaciones en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a nivel universitario no se focalizan únicamente en la transición del Bachillerato a los primeros años de la universidad, sino también en matemáticas más avanzadas. El monográfico que se presenta en esta ocasión toma en consideración la necesidad de acercar los resultados de investigación en educación matemática en la universidad a sus lectores.

**Palabras clave** ∞ Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; Universidad; Formación de profesores; Modelización matemática

**Abstract** ∞ Research on the learning and teaching of mathematics at the university level does not focus only on the transition from high school to the first years of university, but also on more advanced mathematics. The monograph presented on this occasion takes into consideration the need to bring the results of research in mathematics education at the university closer to the readers.

**Keywords** ∞ Learning and teaching of mathematics; University; Teacher education; Mathematical modelling

La investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario representa hoy en día un campo maduro de investigación. Actualmente esta investigación no se centra únicamente en el tránsito de la escuela secundaria a la universidad o en el estudio del aprendizaje de las matemáticas en los primeros cursos universitarios. Sin dejar atrás estos primeros intereses, las investigaciones se han ampliado hacia el estudio del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas más avanzadas, del papel que juegan el uso de modelos y la interdisciplinariedad en la enseñanza de las matemáticas, de la forma en que estudiantes de diversas disciplinas aprenden matemáticas y de asuntos sociales relacionados con lo anterior.

Hoy en día muchas de las disciplinas que se enseñan en la universidad requieren de conocimiento matemático. La búsqueda de nuevas formas de enseñar matemáticas a estudiantes con diversos intereses y las posibilidades que ofrecen las tecnologías digitales han favorecido el surgimiento de estudios enfocados en las necesidades de los estudiantes y de los profesores para, más allá de motivar a los estudiantes, ayudarles a comprender el papel de las matemáticas en diversos campos de estudio y a entender las restricciones involucradas en el logro de esta tarea.

El crecimiento de la importancia de la investigación en la enseñanza de las matemáticas en la universidad ha dado lugar a la creación de congresos internacionales especializados: *Conference for research on undergraduate mathematics education* en los Estados Unidos y más recientemente *International didactic research on university mathematics* para difundir y discutir tanto aspectos teóricos como resultados de la investigación. Por otra parte, hace ocho años nació una revista especializada en la investigación sobre enseñanza de matemáticas en la universidad: *International Journal of Research in University Mathematics Education*.

El monográfico que se presenta en esta ocasión se une a este interés tomando en consideración la necesidad de acercar los resultados de investigación en educación matemática en la universidad a los lectores de la revista AIEM. Este monográfico recoge investigaciones internacionales que reflejan diversas aproximaciones conceptuales. Está formado por seis artículos en los que han participado 18 autores de 11 universidades y de 6 países distintos. Las investigaciones reportadas muestran, además, la importancia del trabajo colaborativo en la investigación.

Los artículos en este número incluyen contribuciones a teorías de la educación matemática, visiones diversas sobre temas de interés actual, sobre la enseñanza de conceptos específicos, formación de profesores universitarios y el papel de la modelización matemática en la enseñanza de las matemáticas a estudiantes de ingeniería.

Tres artículos incluyen contribuciones teóricas, dos de ellos a la teoría APOE y uno a la Teoría Antropológica de los didáctico. La teoría APOE ha sido desde los años 1980 un referente teórico importante para la comunidad que estudia el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario. Lejos de ver esta teoría como inamovible, el artículo de Oktaç proporciona una visión de su historia y su evolución. Señala propuestas de nuevos desarrollos teóricos que han contribuido a su evolución y a su fortaleza teórica. En su artículo, la autora centra la

atención en la más recientemente introducida estructura, Totalidad, y en la posibilidad de aprovechar los niveles entre las estructuras Acción, Proceso y Objeto para lograr una descripción más sutil y fidedigna de la evolución del conocimiento matemático y con ello a mejorar el aprendizaje de los estudiantes. A través de ejemplos que provienen de investigaciones recientes con base en APOE, la autora puntualiza desarrollos en los que ha sido posible describir las diferencias en el aprendizaje de los estudiantes en el paso, por ejemplo, entre una concepción Acción y una concepción Proceso, que permiten comprender con mayor precisión los puntos de transición y la dinámica de la construcción del conocimiento y con ello estimular el aprendizaje de los estudiantes. Por otra parte, al tratar sobre la estructura Totalidad, la autora subraya la importancia de encontrar situaciones específicas y diversas en las que esta estructura, intermedia entre el Proceso y el Objeto, pueda evidenciarse en distintos contextos de las matemáticas avanzadas.

También en el contexto de la teoría APOE, pero enfocándose en la estructura Esquema y, en particular, en el análisis del mecanismo de tematización —que se refiere a la construcción del Esquema como un objeto de conocimiento sobre el cual los aprendices pueden ejercer nuevas Acciones para construir nuevo conocimiento—, Fuentealba, Trigueros, Sánchez Matamoros y Badillo, analizan cómo estudiantes, que han mostrado un conocimiento avanzado del Cálculo Diferencial, enfrentan tareas que ponen a prueba su conocimiento acerca de la derivada en un contexto gráfico. A partir de un diseño cuidadoso de tareas, basado en la descomposición genética del Esquema de Derivada, los autores confrontan el conocimiento de estudiantes que han mostrado la construcción de un Esquema coherente en el nivel Trans-Derivada. Un análisis muy detallado de los datos obtenidos a partir de dicha confrontación pone de manifiesto distintas formas de abordar las tareas que evidencian cómo el Esquema previamente construido por los estudiantes se desequilibra ante la necesidad de resolver cuestiones que causan conflicto. A través de las nociones de acomodación y asimilación de la teoría de Piaget, poco utilizadas previamente, los autores explican diferentes maneras en que los estudiantes afrontan y resuelven exitosamente sus dificultades, en particular, el uso de la derivada para explicar gráficas que muestran el comportamiento de la derivada o de derivadas de orden superior. Sus resultados muestran distintas formas en que los estudiantes re-equilibran sus Esquemas de derivada y los tematizan.

Dos artículos abordan, desde diferentes perspectivas, un tema importante del álgebra lineal tanto por sus aplicaciones prácticas cuanto por su papel en la comprensión de otros conceptos de esta disciplina: los sistemas de ecuaciones lineales. En uno de ellos, las autoras Smith, Lee, Zandieh y Andrews-Larson estudian el cambio del razonamiento de dos estudiantes de matemáticas acerca del significado de la solución de un sistema de ecuaciones lineales durante un experimento de enseñanza basado en el enfoque Realista de las Matemáticas. El seguimiento se hizo utilizando la práctica disciplinaria de la simbolización como lente analítico. A través de una secuencia de tareas basadas en dicho marco teórico se favoreció el desarrollo del significado de la colección de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales. Mediante el análisis de la documentación del razonamiento de dos estudiantes universitarios, durante los cuatro días del experimento, las autoras muestran cómo

los estudiantes pasaron de expresiones simbólicas y formas de razonamiento fuertemente ligadas al tipo de tarea de la secuencia a formas diferentes de razonamiento útiles en una situación dada en las que combinaron razonamiento algebraico, numérico y geométrico a lo largo del proceso de resolución. En el otro artículo, Henriques y Martins en su investigación, a partir de un estudio cualitativo e interpretativo, analizan el razonamiento matemático que los futuros docentes que cursan la licenciatura en matemáticas utilizan en la resolución de tareas que involucran sistemas lineales propuestas a lo largo de un experimento didáctico exploratorio y cómo este contexto contribuye a su aprendizaje. Sus resultados mostraron que los futuros docentes evolucionaron positivamente en su comprensión y capacidad de razonamiento matemático en relación con los sistemas lineales. Concluyen que las ventajas evidenciadas en el estudio pueden contribuir a reflexionar sobre esta forma de mejorar los contextos educativos, incluida la formación inicial de docentes, a superar sus dificultades en el aprendizaje y a desarrollar sus conocimientos para la enseñanza.

En relación con la formación inicial del profesorado, el artículo de Barquero, Bosch y Florensa se centra en la implementación de propuestas de enseñanza a nivel universitario que promuevan un cambio del paradigma pedagógico. En su investigación, proponen avanzar del paradigma dominante en las instituciones universitarias, principalmente basado en la visita de los saberes como si fueran monumentos, hacia un nuevo paradigma, más centrado en la indagación y estudio de cuestiones problemáticas. Para ello, utilizan la teoría antropológica de lo didáctico para diseñar y analizar los recorridos de estudio e investigación (REI) como dispositivos de enseñanza en la transición hacia el nuevo paradigma. Los autores explican la metodología de investigación para el diseño y análisis de los REI en general y su adaptación al caso de la formación del profesorado (REI-FP). Viendo en qué sentido los REI-FP permiten avanzar en el estudio de las condiciones y restricciones que emergen en la difusión de los REI en las aulas.

Para finalizar, el artículo de Siero, Echavarría, Romo y Navarro se enmarca en el problema de proponer una enseñanza de las matemáticas propicia para los futuros ingenieros, centrándose en el papel de la modelización matemática en la enseñanza de las matemáticas para estos estudiantes. En su investigación los autores consideran que establecer relaciones entre matemáticas y cursos de especialidad es el primer paso para formar ingenieros matemáticamente competentes. Enmarcado en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, en este trabajo los autores diseñan y presentan una actividad de modelización matemática que consiste en el diseño de un dispositivo rehabilitador de trombosis. Ante la necesidad de desarrollar un prototipo de rehabilitación, los autores muestran las adaptaciones necesarias para diseñar una actividad didáctica que se pueda implementar en el aula. El análisis del trabajo de los estudiantes permite a los autores concluir que esta actividad permite a los estudiantes de ingeniería comprender que las matemáticas son fundamentales y apreciar el trabajo con otros profesionales.

Mirados globalmente, los artículos de este monográfico muestran los motivos por los que se considera la investigación en la educación matemática universitaria como un área distinta de investigación dentro de la educación matemática. Uno de

estos motivos es el contenido matemático, los focos de atención de dicho contenido a nivel escolar y a nivel universitario difieren en relación con el equilibrio que hay entre la abstracción matemática y las aplicaciones de las ideas matemáticas. Sin embargo, el rigor que se espera en cursos para los especialistas de las matemáticas no es tan esencial en cursos para los especialistas de áreas no-matemáticas, en las que se presta más atención a las aplicaciones de las matemáticas, la modelización y la programación en lugar de los principios axiomáticos de la teoría matemática.

∞

**María Trigueros**

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

[mtriguerosg@gmail.com](mailto:mtriguerosg@gmail.com) | <https://orcid.org/0000-0001-7527-6704>

**Gloria Sánchez-Matamoros**

Universidad de Sevilla (España)

[gsanchezmatamoros@us.es](mailto:gsanchezmatamoros@us.es) | <https://orcid.org/0000-0002-7502-7924>