AIEM

Avances de Investigación en Educación Matemática

Revista de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

ISSN 2254-4313 | (2022) 21, 23-44 | aiem.es

seiem.es

Los mecanismos de asimilación y acomodación en la tematización de un Esquema de derivada

Assimilation and accommodation mechanisms in the thematization of the derivative Schema

Claudio Fuentealba @ [1], María Trigueros @ [2], Gloria Sánchez-Matamoros @ [3], Edelmira Badillo @ [4]

[1] Universidad Austral de Chile (Chile)
[2] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)
[3] Universidad de Sevilla (España)
[4] Universidad Autónoma de Barcelona (España)

Resumen ∞ En este artículo se usa la teoría Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE) para examinar la tematización del Esquema de derivada y el papel que juegan los mecanismos de equilibración de dicho Esquema a través de la evidencia mostrada por estudiantes avanzados al enfrentar tareas diseñadas para confrontar el equilibrio de sus Esquemas y obtener evidencia de su posible tematización. Esta investigación contribuye al estudio de la tematización de un Esquema al enfocarse en los mecanismos que pueden ponerse en juego cuando los estudiantes requieren hacer Acciones sobre su Esquema de derivada. Los resultados del estudio muestran evidencias que hacen visible el papel que los mecanismos de acomodación y asimilación juegan en las estrategias de los estudiantes para re-equilibrar su Esquema y demostrar su tematización. Algo que no ha recibido atención previa.

Palabras clave ∞ Esquema; Tematización; Acomodación; Asimilación; Derivada

Abstract ∞ In this article, Action-Process-Object-Schema (APOS) theory is used to examine the thematization of the derivative Schema and the role played by the equilibration mechanisms evidenced by some advanced students while facing tasks designed to confront the equilibrium of their Schemas and obtain thematization evidence. This investigation contributes to the study of Schema thematization by focusing on the mechanisms involved when students need to perform Action on their derivative Schema. Results show evidences on the role that accommodation and assimilation mechanisms play in students' strategies when they re-equilibrate their Schema and evidence its thematization Which has not received previous attention.

Keywords ∞ Schema; Thematization; Accommodation; Assimilation; Derivative

Fuentealba, C., Trigueros M., Sánchez-Matamoros G. y Badillo E. (2022). Los mecanismos de asimilación y acomodación en la tematización de un Esquema de derivada. *AIEM - Avances de investigación en educación matemática, 21*, 23-44. https://doi.org/10.35763/aiem21.4241

1. INTRODUCCIÓN

El Cálculo es uno de los mayores y más importantes logros del intelecto humano por su potencialidad como un marco para modelar problemas relacionados con la variación y como herramienta conceptual para predecir, a partir de esos modelos, en las más diversas áreas del conocimiento tales como: matemáticas, física, ingeniería, ciencias sociales y biología, entre otras (Pepin et al., 2021). A pesar de su importancia, un problema aún sin solución es cómo lograr la comprensión por parte de los estudiantes universitarios de los conceptos fundamentales de este curso.

En particular, en este trabajo nos centramos en el estudio de la comprensión del concepto de derivada, que es una herramienta fundamental en el estudio de fenómenos que involucran el cambio o variación de magnitudes. Este hecho ha provocado que el concepto forme parte de los currículos universitarios tanto del área de matemáticas como de otras relacionadas (Lerman, 2014; Vrancken y Engler, 2014). Sin embargo, a pesar de su transversalidad e importancia, el aprendizaje del concepto de derivada en el nivel universitario resulta complejo porque tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica, evaluando en esencia las competencias adquiridas en este dominio (Artigue, 1995). Esta práctica provoca que un gran número de estudiantes utilicen dichas técnicas y automatismos para resolver una tipología de tareas, sin embargo, no les funciona cuando se enfrentan a otras que requieren la comprensión del significado de la derivada (Sánchez-Matamoros et al., 2006).

Dada la importancia del concepto de derivada y las dificultades presentes en su comprensión, se han realizado numerosas investigaciones que abordan la problemática desde diversos enfoques teóricos (Asiala et al., 1997; Baker et al., 2000; Cooley et al., 2007; Font et al, 2016; Fuentealba et al., 2017, 2019; García et al., 2011; Sánchez-Matamoros et al., 2006). Dichos estudios aportan información sobre aspectos muy importantes como son: errores y dificultades en la comprensión del concepto de derivada; actividades que pueden favorecer su comprensión; relación entre razón de cambio y cociente incremental; los sistemas de representación como herramientas para pensar sobre las derivadas; la relación entre la derivada en un punto $f'(a)$ y la función derivada $f'(x)$; el desarrollo del Esquema de derivada, y la aplicación del concepto y el uso de la tecnología en su enseñanza.

Los avances de los distintos estudios y sus implicaciones directas en el desarrollo del currículo vinculado al concepto de derivada han permitido una mayor comprensión de la complejidad del concepto, proporcionando directrices para promover la posibilidad de que los estudiantes desarrollen una visión más profunda de la derivada y de su papel en las matemáticas. Esta visión está, desde nuestra perspectiva, ligada al desarrollo de un Esquema de derivada tematizado. Sin embargo, el estudio de la tematización de un Esquema es muy escaso, solamente encontramos un artículo sobre este tema y está justamente relacionado con el Esquema de la derivada (Cooley et al., 2007). Desde este contexto, este artículo tiene como objetivo contribuir a la comprensión de la tematización del Esquema, en particular del Esquema de derivada, a través del estudio de la relación del mecanismo de tematización de la teoría APOE con los mecanismos involucrados en el proceso de equilibración de los Esquemas en la teoría de Piaget, a saber, la acomodación y la asimilación (Piaget, 1975).

Dada la complejidad del fenómeno de tematización del Esquema de derivada, estudiamos estos mecanismos a través del trabajo de estudiantes universitarios con instrucción previa en Cálculo Diferencial y que en un estudio previo mostraron la construcción del Esquema de derivada a nivel Trans-derivada.

2. Marco Teórico

Este estudio se basa en la Teoría APOE (Arnon et al., 2014; Asiala et al., 1997), que aporta elementos teóricos y analíticos para describir la construcción de las estructuras cognitivas realizadas por un individuo durante el proceso de aprendizaje de un concepto matemático. En términos concretos, la Teoría APOE intenta estudiar y modelar la forma en que un estudiante aprende matemáticas, pero también dar cuenta de cómo estas se pueden enseñar de forma efectiva (Trigueros y Oktaç, 2005).

2.1. La noción de Esquema y los niveles de desarrollo

Arnon et al. (2014) señalan que un Esquema corresponde a la colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente, y que pueden ser empleados en la solución de una situación problemática que involucre esa área de las matemáticas. En este sentido, Trigueros (2005) indica que cuando un estudiante se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas evoca un Esquema para abordar su resolución. Al evocar el Esquema pone en juego aquellas estructuras construidas y las relaciones que dispone en ese momento. Ante una misma tarea, diferentes estudiantes pueden utilizar distintas estructuras y relaciones entre ellas. De esta forma, cuando se toman en consideración las relaciones que establecen entre las estructuras construidas, es posible identificar, en las respuestas de los estudiantes que resuelven una misma tarea, diferentes matices en el nivel de desarrollo del Esquema.

Los Esquemas son estructuras dinámicas utilizadas por los estudiantes cuando se enfrentan a cualquier problema matemático y se están reconstruyendo continuamente a través de los mecanismos de asimilación y acomodación (Piaget, 1975). La asimilación permite incorporar una nueva estructura en un Esquema existente a través de la construcción de nuevas relaciones entre las componentes del Esquema, mientras que la acomodación es un mecanismo por el cual se reconstruye un Esquema para hacer frente a nuevas situaciones (Arnon et al., 2014; Roa y Oktaç, 2010; Trigueros, 2019).

Piaget y García (1982) plantean que los Esquemas evolucionan según ciertos mecanismos y se desarrollan pasando por tres niveles: Intra-, Inter- y Trans-, denominado Triada. Estos niveles se suceden según un orden fijo, caracterizándose por el grado de construcción de relaciones entre las estructuras cognitivas relacionadas con los elementos matemáticos constitutivos del concepto. En el proceso de aprendizaje, el sujeto desarrolla diferentes Esquemas cuya evolución puede ser descrita utilizando la Triada, considerando que el mecanismo involucrado en la progresión entre los diferentes niveles es la acomodación (Arnon et al, 2014, Baker et al., 2000).

El desarrollo de un Esquema es descrito por el mecanismo de la "Triada" (Piaget y García, 1982). Consta de tres etapas: Intra-, Inter- y Trans-, que se identifican por el tipo de relaciones construidas entre las estructuras del Esquema. Así, las relaciones de correspondencia son las utilizadas por los individuos para comparar estructuras en términos de similitudes, las de transformación se desarrollan cuando descubren que algunas estructuras en el Esquema pueden estar relacionadas en términos de cambios en la otra, y las de equivalencia implican la conservación de propiedades en las que una estructura depende de las otras. La etapa Intra- del Esquema se caracteriza por un enfoque en los componentes individuales del Esquema de forma aislada de los demás. Las estructuras están relacionadas principalmente por las relaciones de correspondencia y por su uso en problemas similares. En la transformación entre etapas se construyen más relaciones dentro del Esquema y en la etapa Inter- se identifican grupos de elementos. Cuando se construyen relaciones de equivalencia, el Esquema evoluciona al nivel Trans-, en él se reconoce una estructura subyacente implícita o explícita, y las relaciones desarrolladas en el nivel Inter- se coordinan y entienden, alcanzando así la coherencias del Esquema. La comparación del trabajo de los estudiantes revela diferencias que pueden relacionarse con la etapa de desarrollo del Esquema que muestran (Arnon et al., 2014). Por lo tanto, es posible asociar el aprendizaje de un estudiante con el nivel del Esquema que ponen en evidencia cuando trabajan con las tareas propuestas.

2.2. Descomposición genética

Tomando en consideración la descomposición genética del Esquema de derivada (Baker et al., 2000; Cooley et al., 2007), en este trabajo consideramos que, en el nivel Intra-derivada, los estudiantes pueden interpretar la derivada como razón de cambio o como pendiente de la recta tangente en puntos específicos y calcular la derivada en puntos o intervalos específicos, como Procesos. Los estudiantes reconocen, además, dos tipos de procesos asociados con su representación: el analítico y el gráfico. El estudiante puede resolver algunos problemas, pero no ha construido relaciones lógicas entre los distintos componentes del Esquema o éstas aparecen como esbozos de relación y el foco de atención del estudiante se centra en las Acciones y Procesos individuales. En el nivel Inter-derivada, se construyen relaciones entre los distintos componentes, involucrando procesos relacionados con una sola forma de representación. Las relaciones que se establecen entre los elementos del Esquema son limitadas. En el nivel Trans-derivada, el estudiante hace una síntesis de los problemas que incluyen la variación, así como de las distintas formas de representación de la derivada. Aumenta el número y el tipo de relaciones construidas y éstas permiten al estudiante determinar las condiciones en que es posible utilizar la derivada.

2.3. La tematización de un Esquema

La tematización de un Esquema en la teoría APOE es el mecanismo asociado a la transformación de un Esquema en un Objeto, es decir, cuando es posible ejercer Acciones o Procesos sobre él. Por ejemplo, al operar con él es posible descomponerlo y reconstruirlo cuando las condiciones de un problema cambian y es necesario comparar Esquemas con las mismas componentes, pero distintas relaciones entre ellos (Cooley et al., 2007). En este sentido, los resultados de García et al. (2011) indican que la tematización del Esquema de la derivada se evidencia cuando el estudiante es capaz de transferir todas las relaciones que ha construido y organizado para el par (f, f') al par (f', f''). Esta transferencia implica que el estudiante toma conciencia que el operador derivada corresponde a una transformación lineal que se puede generalizar y sobre el que puede operar y reconocer las propiedades de la función derivada cuando se conoce información sobre la segunda derivada y viceversa.

La epistemología genética de Piaget se basa en dos principios generales que permiten el desarrollo del conocimiento: la adaptación y la organización. La primera permite el cambio de un estado de conocimiento a otro a través de un proceso de equilibración progresiva de los Esquemas del individuo, al enfrentar nuevas situaciones o problemas (Piaget, 1975). Para Piaget, dicho proceso es el resultado de la interacción entre el sujeto y el objeto a través de los mecanismos de acomodación y asimilación. La acomodación se refiere al mecanismo que permite cambiar el o los Esquemas para que se ajusten a la necesidad percibida. Esto ocurre cuando un Esquema debe modificarse o cuando es necesario crear un nuevo Esquema para dar sentido a una nueva experiencia. Por su parte, la asimilación es el mecanismo que permite al individuo entender la realidad externa con sus Esquemas. Ocurre cuando el individuo percibe nuevos Objetos o eventos en términos de sus Esquemas existentes. Es importante destacar que estos mecanismos se apoyan mutuamente.

Los mecanismos de asimilación y acomodación no han recibido mucha atención en estudios con la teoría APOE, pero están detrás tanto de la evolución del Esquema (Roa y Oktaç, 2010; Trigueros, 2019) como de su tematización. Cuando un estudiante enfrenta un problema nuevo, él o ella, puede requerir del mecanismo de acomodación para reorganizar su Esquema y operar sobre él o puede enfrentarlo, asimilando la información nueva a su Esquema existente mediante la reconstrucción de las relaciones entre sus componentes, de forma tal que pueda operar sobre él. En ambos casos, estos mecanismos promueven la re-equilibración del Esquema y permiten actuar sobre él, es decir, la posibilidad de tematizarlo.

Las preguntas de investigación de este estudio son:

¿Qué papel juegan las derivadas de orden superior en las tareas que promueven que los estudiantes apliquen Acciones sobre su Esquema de derivada?

¿Qué estrategias utilizan los estudiantes que muestran la tematización del Esquema? ¿Cómo se manifiestan los mecanismos de acomodación y asimilación en los argumentos de los estudiantes y cómo se relacionan con la tematización del Esquema?

3. Metodología

En relación con los objetivos de este estudio se buscaron evidencias de posibles diferencias en los mecanismos que los estudiantes dan evidencia de utilizar cuando tematizan el Esquema. Para ello, utilizamos las herramientas teóricas y analíticas que aporta APOE para caracterizar la tematización de un Esquema, apoyándonos en los aportes realizados por Baker et al. (2000) y en los resultados de García et al. (2011). El análisis de los mecanismos que los estudiantes utilizan cuando ponen en evidencia la tematización del Esquema proporciona información sobre posibles diferencias en la construcción del Esquema como Objeto y, con ello, el diseño de actividades específicas para promover la tematización del Esquema de derivada.

3.1. Participantes y contexto

El presente estudio es de tipo cualitativo con carácter descriptivo y la muestra estaba conformada por 40 estudiantes universitarios de la provincia de Barcelona de la doble titulación de Matemáticas y Física. Los estudiantes habían cursado y aprobado como mínimo una asignatura de Cálculo Diferencial. Además, poseían muy buenas calificaciones e ingresaron al grado con altos puntajes en las pruebas de selectividad.

3.2. Instrumentos de recogida de datos y métodos de análisis

Se diseñaron dos instrumentos para la recogida de datos, un cuestionario y una entrevista clínica semiestructurada. El análisis se realizó en tres fases. La primera fase se centra en la identificación de los niveles de desarrollo del Esquema de derivada exhibida por los estudiantes participantes. En la segunda fase se identifican estudiantes con un nivel Trans-derivada de desarrollo. Finalmente, en la tercera fase se caracterizan los mecanismos de asimilación y acomodación, mostrando cómo estos se relacionan con la tematización del Esquema. Concretamente, en esta fase nos enfocamos en el análisis de las relaciones construidas entre las derivadas sucesivas que se ponen de manifiesto en la resolución de las tareas y entrevistas por parte de los estudiantes.

Esta sección la hemos estructurado en dos subapartados en los que describimos los dos instrumentos utilizados en nuestra investigación, el cuestionario y la entrevista, junto con el análisis llevado a cabo con cada uno de ellos.

3.2.1. El cuestionario

El primer instrumento se aplicó a los 40 estudiantes y correspondió a un cuestionario (Figura 1) con tres tareas para determinar el nivel de desarrollo del Esquema de derivada. Estas tareas fueron tomadas y/o adaptadas de las propuestas por investigaciones previas sobre el tema (Baker et al., 2000; García et al., 2011; Sánchez-Matamoros et al., 2006).

Figura 1. Enunciado de las tareas del cuestionario

Tarea 1

Esboza la gráfica de una función f que satisface las siguientes condiciones:

a) f es continua en su dominio

b) $f(2) = 0$

c) $f'(2) = f'(5) = 0$

d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -4$

e) $\lim_{x \to -8^-} f(x) = -\infty$

f) $f'(x) < 0$ cuando $5 < x < 8$

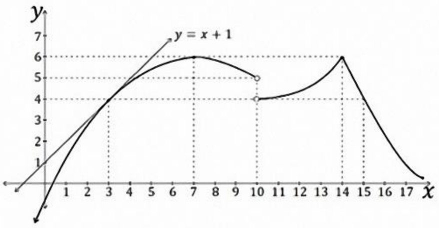
g) $f'(x) \geq 0$ cuando $x < 5$

h) $f''(x) < 0$ cuando $3 < x < 8$

i) $f''(x) > 0$ cuando $x < 3$

Tarea 2

Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas

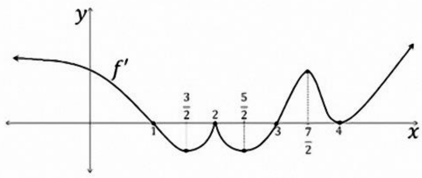


a) Obtener los valores de $f'(3)$, $f'(7)$, $f'(10)$, $f'(14)$ y $f'(15)$. Explicando cómo los obtienes.

b) Realiza un esbozo de la gráfica de f'. Explica cómo los has obtenido.

Tarea 3

La figura muestra la gráfica de la derivada de f, esboza las posibles gráficas de f.



3.2.2. Objetivos y fundamentación de las tareas del cuestionario

A continuación, describimos brevemente los objetivos que perseguían cada una de las tareas propuestas en el cuestionario en términos de la descomposición genética.

La Tarea 1 (Figura 1) proporciona información analítica de la función f en términos de f, f' y f''. Con ello se pide esbozar la gráfica de la función f. El objetivo de esta tarea fue observar si el estudiante era capaz de identificar las contradicciones entre las condiciones analíticas del enunciado que proporcionarían evidencias sobre la construcción de distintos tipos de relaciones entre los elementos del Esquema.

Para esbozar la gráfica de f, un estudiante debe coordinar los Procesos correspondientes a la interpretación de la información analítica, proporcionada por las condiciones del enunciado, y los relativos a su conversión al modo gráfico en un Proceso de representación gráfica que sea coherente con toda la información. El considerar la condición c) referente a los ceros de f' permite al estudiante coordinar los Procesos de cambio en el comportamiento de la razón de cambio con aquellos que relacionan dicho comportamiento con los posibles valores extremos o puntos de inflexión de la función. La coordinación de los Procesos asociados a la interpretación de las condiciones c), f) y g) del enunciado hace posible el Proceso por el cual el estudiante pueda establecer que la gráfica de f posee un máximo absoluto. Además, la coordinación de las condiciones b), d) y e), respectivamente, le permite construir el Proceso que hace posible determinar el cero y las asíntotas de la gráfica de f. Sin embargo, la posibilidad de esbozar con precisión la gráfica de f requiere que el estudiante establezca relaciones entre los Procesos asociados al signo de f'' con aquellos que los relacionan a la curvatura de f. Finalmente, el estudiante puede coordinar el cambio de curvatura de las condiciones h) e i) como Proceso, con el Proceso asociado a la condición c) $f'(3) = 0$ para inferir que en $x = 3$ existe un punto de inflexión.

Lo anterior podría ser posible, sin embargo, existe una contradicción entre las condiciones (c, f, g, h e i) del enunciado. La posibilidad de percibir dicha contradicción está asociada a la construcción de una relación entre la información que proporciona f'' y aquella que proporciona f', considerada como función en términos del comportamiento de la curva que representa a la función en los distintos intervalos del dominio de la función. En este caso, las condiciones g) e i) indican que f' es positiva y creciente cuando $x < 3$ y, por otro lado, las condiciones g) y h) indican que f' es positiva y estrictamente decreciente cuando $x > 3$. Por tanto, en $x = 3$ se tiene que f' alcanza un máximo que se encuentra sobre el eje X que hace imposible que $f'(3) = 0$. La Figura 2a es una posible gráfica de f' en un entorno de $x = 3$. Finalmente, si se considera la condición $f'(3) = 0$, y se supone que f' es continua, entonces necesariamente debe existir un cambio de monotonía de f' en un entorno de $x = 3$, lo que produciría dos nuevos cambios de signos de f'' que se corresponderían con dos puntos de inflexión de f, no descritos en las condiciones analíticas de la tarea. La Figura 2b es una posible gráfica de f', para el caso descrito anteriormente.

Figura 2. Contradicción de las condiciones del enunciado de la Tarea 1

Figura 2a. Gráfica de f' con $f'(3) \neq 0$

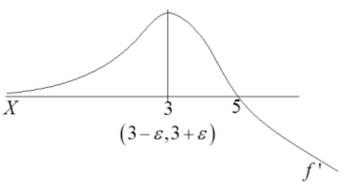
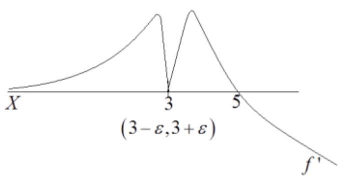


Figura 2b. Gráfica de f' con $f'(3) = 0$



De todo lo anterior, el estudiante debería llegar a la conclusión de que no puede esbozar la gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones del enunciado, ya que la gráfica de la Figura 2 se correspondería con una función que verificaría todas las condiciones excepto una: $f'(3) = 0$. Esto llevaría al estudiante a concluir que la tarea propuesta no tiene solución.

La segunda tarea (Figura 1) presentada en modo gráfico, tenía dos partes. La primera se centraba en comportamiento local de la función y se les solicitó a los estudiantes calcular la derivada en puntos específicos. El objetivo de esta primera parte fue observar si los estudiantes eran capaces de hacer las Acciones o Procesos necesarios para calcular la derivada en puntos que poseen distintos comportamientos. En la segunda parte se les solicitó esbozar el gráfico de f' a partir del gráfico de f, en este caso, pretendíamos observar si los estudiantes habían construido la función derivada como un Objeto y si lograban coordinar los Procesos involucrados en el manejo de la información, local y global, en un contexto analítico con aquéllos correspondientes al manejo de la información en el contexto gráfico.

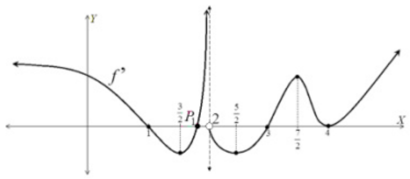
En la tercera tarea (Figura 1), se les proporcionó a los estudiantes la gráfica de la función f', la cual contempla varios cambios de signo, crecimiento, ceros, puntos de tangencia horizontal y un punto anguloso. La tarea consistía en esbozar todas las posibles gráficas para la función f. El objetivo de esta tarea fue valorar si los estudiantes podían coordinar los Procesos relacionados con los valores extremos de f' con los Procesos asociados a los valores extremos y puntos de inflexión de f, los Procesos asociados con el signo de f' con los relacionados con la monotonía de f y los Procesos relativos al crecimiento de f' con los Procesos relacionados con la convexidad de f.

3.2.3. Entrevista clínica

El análisis del cuestionario nos permitió, por un lado, identificar el nivel de desarrollo del Esquema de derivada (Intra-derivada, Inter-derivada, Trans-derivada) que mostraba cada uno de los estudiantes. Y, por otro lado, nos sirvió como insumo para la elaboración del segundo instrumento que fue aplicado a los estudiantes que mostraron un nivel de desarrollo Trans-derivada del Esquema. Este segundo instrumento es una entrevista clínica diseñada para: (i) profundizar en el proceso de resolución de las tareas propuestas a los estudiantes; y (ii) indagar en los mecanismos involucrados en la posible necesidad de reconstrucción del Esquema de derivada para hacer posible su tematización. La entrevista semiestructurada constó de dos partes. En la primera parte realizamos modificaciones a las condiciones de las tareas del cuestionario. En la Tabla 1 mostramos algunos ejemplos del tipo de modificaciones que hicimos en cada una de las tareas, con el propósito de observar si los estudiantes eran capaces de movilizar las relaciones, que habían construido y formaban parte de su Esquema, a una situación diferente y cómo lo hacían.

La información obtenida en la primera parte de la entrevista clínica nos permitió confirmar que los estudiantes habían logrado construir un nivel de desarrollo Trans-derivada del Esquema con evidencias de posible tematización. El Esquema en el nivel Trans-derivada implica coherencia y flexibilidad en el uso de las relaciones construidas entre las estructuras que conforman el Esquema a la hora de enfrentarse a la resolución de situaciones diferentes. La tematización exige, además, evidencia de que es posible hacer Acciones sobre el Esquema, que pueden traducirse en reconstruir las relaciones previamente construidas. El haberlo construido como un Objeto sobre el cual poder operar le permitirá al estudiante trasladar las relaciones del par (f, f') al par (f', f'').

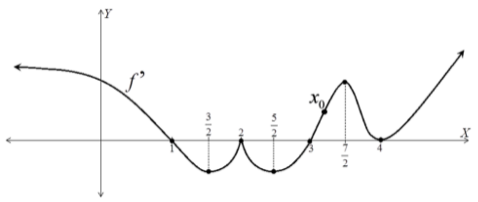
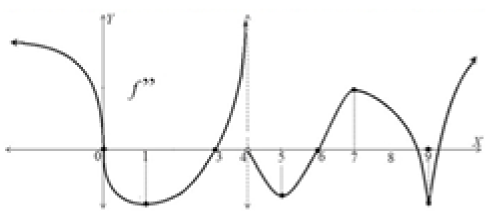
Tabla 1. Modificaciones de las tareas planteadas en la primera parte de la entrevista

Tarea	Pregunta	Justificación de la modificación
1	¿Existe algún cambio significativo en la gráfica de si eliminamos la condición c?	Buscar evidencias de si el estudiante es capaz de darse cuenta de la contradicción del enunciado de la tarea. Para ello se incide en el apartado donde el enunciado presenta dicha contradicción (apartado *c)*). De esta forma se pretende dar la oportunidad al estudiante, que no lo hizo, de que se fije en dicha contradicción o, en el caso no hacerlo, que la justifique.
2	Si la gráfica corresponde a f' y no a f¿Cómo determinarías el crecimiento y decrecimiento de f'?	Buscar evidencias de si el estudiante es capaz de relacionar el crecimiento y decrecimiento de f' con la curvatura de f (f''). Es decir, si es capaz de establecer la monotonía de f' a partir del signo de f'', y trasladar las relaciones entre los elementos matemáticos del par (f', f'').
3	Si modificamos la gráfica de f' en $x = 2$  ¿Qué sucedería con la gráfica de f en $x = 2$, si sabemos que f es continua?	Buscar evidencia de si el estudiante es capaz de identificar que en $x = 2$ existe un máximo local de la función f, correspondiente a un punto anguloso en donde la función no es derivable.

Para profundizar en la caracterización del Esquema y la posible manifestación de los mecanismos de asimilación y acomodación, se diseñó una segunda parte de la entrevista clínica, focalizada en algunas modificaciones de las tareas del cuestionario y nuevas tareas, poniendo hincapié en las relaciones que establecen los estudiantes entre las derivadas sucesivas de una función (García et al., 2011). La segunda parte se aplicó solo a los estudiantes que mostraban una posible tematización del Esquema. Algunas modificaciones y nuevas tareas planteadas se presentan en la Tabla 2.

El análisis se realizó en tres fases. La primera se centró en la identificación de los niveles de desarrollo del Esquema de derivada exhibido por los estudiantes participantes. En la segunda se identifican estudiantes con un nivel Trans-derivada y que muestran algunas evidencias de posible tematización del Esquema. Finalmente, en la tercera se caracterizan los mecanismos de asimilación y acomodación que se ponen de manifiesto en las respuestas de estudiantes que han mostrado haber tematizado el Esquema de derivada de una función y el papel que juegan en relación con la tematización.

Tabla 2. Modificaciones y tareas planteadas en la segunda parte de la entrevista

Tarea	Pregunta	Justificación de la modificación
1	Atendiendo los elementos matemáticos del enunciado, me podrías ampliar en qué te basas cuando consideras que $f'(3) \neq 0$. Y cómo influye esto sobre las otras condiciones de la tarea.	Ahondar en el tipo de justificación del estudiante relativo a la contradicción.
2	Si la gráfica corresponde a f' en lugar de a f ¿Qué sucedería con la gráfica de f en los puntos de abscisas $x = 7$ y $x = 14$?	Profundizar en el tipo de justificación del estudiante relativo al comportamiento en los puntos de abscisa $x = 7$ y $x = 14$. Es decir, si el estudiante es capaz de ver el comportamiento de puntos singulares en derivadas sucesivas. Así en $x = 7$, punto máximo local en el que existe la derivada en la tarea inicial, pasa a ser punto de inflexión en la tarea modificada y en $x = 14$, punto máximo local en el que no existe la derivada (punto anguloso) en la tarea inicial, se mantiene como punto anguloso, pero no es punto extremo de la función.
3	Explica cómo interpretas la información de x_0. ¿Qué puedes decir sobre las derivadas sucesivas (f', f'' y f''') en $x = 1$, $x = 3$ y x_0? Justifícalo. (x_0 correspondía a un punto de inflexión de f') 	Ahondar en el tipo de justificación del estudiante relativo al operador derivada en sus relaciones en derivadas de orden superior a f''.
4 Nueva	Si consideramos la gráfica de la derivada de orden 3 de una función f en el entorno del punto x = a, como la que se muestra en la siguiente figura  ¿Qué sucede con las derivadas f'' y $f^{(4)}$ en el entorno de x = a?	Ahondar en el tratamiento de una tangente vertical en una función derivada de orden 3 y, además, en el uso del significado de la derivada, ya que no se dispone de una expresión explícita para la tercera derivada que permita transitar directamente a la segunda o cuarta derivadas. El objetivo de esta interrogante es observar si el estudiante ha tematizado el Esquema y, puede transitar entre derivadas de distintos órdenes sin dificultad a pesar de no disponer de una expresión que define a $f^{(3)}$.
5 Nueva	La figura que se muestra corresponde a la segunda derivada de f, esboza las posibles gráficas de f' y f'''. 	Ahondar en el tratamiento de tres tipos de puntos conflictivos en una función derivada de orden 2, mediante una pregunta de mayor dificultad. Además, al igual que en la pregunta anterior, requiere del uso del significado de la derivada, pues no se dispone de una expresión explícita para la segunda derivada que permita ir directamente a la primera o tercera derivada. El objetivo de esta interrogante es observar si el estudiante ha construido el Esquema de derivada como Objeto y puede descomponerlo en sus partes constituyentes, para dar respuesta a lo solicitado.

4. RESULTADOS

Como ya se mencionó, la primera parte se enfocó en la clasificación de los 40 estudiantes en los distintos niveles de desarrollo del Esquema. Concretamente, 9 estudiantes fueron clasificados en el nivel de desarrollo Trans-derivada del Esquema y solo 4 de ellos accedieron, voluntariamente, a participar de las entrevistas clínicas (E_1, E_3, E_4, E_{26}). Dichas entrevistas permitieron acceder a la reflexión de los estudiantes y proporcionaron evidencia de que solo 3 de ellos lo habían tematizado. A continuación, se discuten los resultados para cada uno de ellos.

4.1. Esquema a nivel Trans-derivada no tematizado

El estudiante E_3, en las respuestas que proporcionó al cuestionario, parecía mostrar indicios de tematización del Esquema de derivada. Sin embargo, al enfrentarse a las modificaciones de las tareas presentó dudas respecto al comportamiento de derivadas de orden superior en puntos específicos, tal y como se muestra en el siguiente fragmento de entrevista correspondiente a una modificación de la Tarea 3 (Tabla 2-Tarea 3):

> I: El signo o el valor numérico, si puedes establecerlo.
>
> E_3: A ver, en uno, $f'(1) = 0$ claramente, f'' va a ser un valor negativo porque es como la pendiente de esta función y no lo sé, para saberlo [...]
>
> I: Bueno, pero ¿qué signo tendría $f''(1)$?
>
> E_3: Negativo.
>
> I: ¿Por qué?
>
> E_3: Decrece entonces es negativo.
>
> I: ¿y $f'''(1)$?
>
> E_3: $f'''(1)$, a ver si mi punto de inflexión está en $x = 1$, entonces claro aquí hay un cambio de pasar de creciente a decreciente con lo que la $f'''(1)$ será cero, supongo. Tenemos un cambio de sentido de f'' (indicando cambio de signo).
>
> I: ¿y en $x = 3$?
>
> E_3: En $x = 3$ pasa lo mismo, porque tenemos un..., primero es cóncava después convexa, cambia de sentido, cambia de... no sé cuánto, no estoy muy segura de esto, f'''... está muy lejos para saberlo.

Esta estudiante mostró un desarrollo del Esquema a nivel Trans-derivada. Mostró la posibilidad de operar sin dificultades con los Procesos que vinculan los signos de las dos primeras derivadas de una función con sus intervalos de monotonía y concavidad (curvatura). Pudo establecer valores extremos y puntos de inflexión de una función combinando información puntual y global. Sin embargo, sus respuestas relacionadas con la segunda derivada y cuando era necesario movilizar sus relaciones, ya construidas, a una nueva situación, mostraron una construcción Proceso de la segunda derivada y la necesidad de construir un Esquema coherente y flexible. Lo anterior no le permitía realizar nuevas Acciones sobre él a fin de abordar interrogantes sobre terceras derivadas u otras de orden superior, lo cual puso en evidencia que no había tematizado el Esquema.

4.2. Esquema tematizado a partir de la asimilación

Los estudiantes E_1 y E_{26} mostraron construcciones y argumentos similares para dar cuenta de la contradicción presente en la Tarea 1 del cuestionario. Utilizaron la estructura subyacente de su Esquema para establecer una relación de transformación inversa entre el signo de la segunda derivada y su efecto sobre la monotonía de la primera derivada que da evidencia de la construcción de una relación lógica de equivalencia entre estas derivadas. Esto es muy interesante, ya que la mayor parte de los estudiantes solo recurre a relaciones directas. El siguiente extracto correspondiente a la justificación de la contradicción presente en la Tarea 1, ejemplifica esta relación:

> I: ¿Qué es creciente cuando $x < 3$?
>
> E_1: La primera derivada... aumenta cuando $x < 3$, ya que la segunda derivada es estrictamente positiva. Está aumentando estrictamente. Es positivo aquí [indicando el lado izquierdo de $x = 3$]. Tiene un máximo en tres que estará por aquí [indicando $x = 3$].
>
> I: ¿Quién tiene un máximo en tres?
>
> E_1: La primera derivada tiene un máximo en tres.
>
> I: Ah, Ok.
>
> E_1: Dado que hay cambios en el signo de la segunda derivada, de positivo a negativo, cambia de creciente a decreciente [haciendo mención a la primera derivada].
>
> I: ¿Y este es tu argumento para decir que la derivada no puede ser cero en tres?
>
> E_1: Sí, porque aquí es positivo y crece [apuntando a la izquierda de $x = 3$]. Además, no puede cortar aquí, quiero decir, no es posible ...
>
> I: ¿Y tú entonces lo que haces es eliminar esto [señalando la condición c]? Porque eso es lo que dices.
>
> E_1: Sí, en realidad sí. Más que nada lo vi sobre todo porque intentaba dibujar aquí un cambio de concavidad mientras crecía la función pasando de concavidad negativa a positiva [indicando de derecha a izquierda $x = 3$].
>
> I: ¿Cómo te hubiese quedado esa función?
>
> E_1: No, es que no podía hacerla aquí, tenía que hacer que la concavidad estuviese hacia abajo y luego pasase a estar hacia arriba, mientras que la función crecía y yo tenía un problema, entonces fui a mirar la causa de este problema...
>
> I: ¿Qué hubiese implicado si tú hubieses seguido con esta condición de que $f'(3) = 0$?
>
> E_1: Ah, pues que debería haber eliminado otras condiciones. Debería haber eliminado que la derivada segunda fuese estrictamente mayor que cero, por ejemplo...

El estudiante E_1 se centra en la contradicción presente en las propiedades analíticas proporcionadas en el enunciado de la Tarea 1 (condiciones c, f, g, h e i). Para ello utiliza las estructuras mentales en su Esquema de derivada y, en particular, revierte la relación entre el signo de la segunda derivada y la monotonía de la primera derivada. Es decir, que relacionan el par (f', f'') cuando señala: "Dado que hay cambios en el signo de la segunda derivada, de positivo a negativo, cambia de creciente a decreciente (haciendo mención a la primera derivada)", lo cual muestra que ha construido relaciones de equivalencia entre estas derivadas.

Para continuar con su proceso de resolución, el estudiante E_1 toma la decisión de cambiar la condición "c" proporcionada por $f'(3) \neq 0$ y es capaz de continuar con el desarrollo de la Tarea 1 mostrando la construcción de relaciones globales y puntuales asociadas a las demás condiciones analíticas presentadas en el enunciado. El estudiante E_1, hace uso de las relaciones de equivalencia que asocian los signos de las dos primeras derivadas con la monotonía y curvatura de la función respectivamente. A partir de esto, el estudiante E_1 realiza un esbozo correcto que muestra todos los elementos esenciales, una vez que estableció que $f'(3) \neq 0$.

Respecto a los nuevos interrogantes sobre derivadas sucesivas ambos estudiantes, E_1 y E_{26}, responden sin dificultades durante la entrevista. Por ejemplo, al consultar al estudiante E_{26}, en relación con el comportamiento de la segunda y cuarta derivadas, asociadas a la tercera que posee una tangente de tipo vertical en $x = a$, en la Tarea 4 de la segunda parte de la entrevista (Tabla 2-Tarea 4), el estudiante responde:

> I: ¿Qué sucede con la segunda derivada y con la cuarta derivada? Si consideramos la gráfica de la derivada de orden 3, esto es f''' de una función f en el entorno de $x = a$ ¿qué sucede con la segunda derivada y la cuarta derivada en el entorno de este punto?
>
> E_{26}: Vale, en la cuarta..., empezamos con la cuarta que es más fácil, tiene una asíntota hacia más infinito.
>
> I: ¿Por qué?
>
> E_{26}: Porque la recta tangente aquí es vertical.
>
> I: ¿Y por qué hacía más infinito?
>
> E_{26}: Porque es creciente. Y la segunda, bueno depende si esto es positivo o negativo. O sea, depende de qué valor tiene aquí la función esta, o sea si tiene un valor positivo será creciente, si tiene un valor negativo será decreciente.
>
> I: O sea ¿depende del signo? Si esto está...
>
> E_{26}: Encima o debajo
>
> I: ¿Si está sobre el eje o bajo el eje X?
>
> E_{26}: Exacto.

E_{26} muestra un claro dominio de las relaciones e implicaciones de una función con su primera y segunda derivada. Además, muestra evidencia de haber construido los Objetos segunda derivada y derivadas de orden superior como función y que los ha asimilado a su Esquema. Es capaz de reconsiderar las relaciones entre estructuras del Esquema para extrapolarlas a pares de derivadas sucesivas de distinto orden que muestra haber asimilado a su Esquema de derivada re-equilibrado. El estudiante muestra la construcción de un Esquema coherente y flexible que le permite aplicar Acciones sobre él para adaptarlo a este nuevo contexto. Asimismo, es interesante observar que el estudiante puede transitar entre derivadas de distintos órdenes sin dificultad, a pesar de no disponer de una expresión analítica que defina a f'''. Este tránsito entre las derivadas es también evidencia de que las estructuras asociadas a la segunda derivada y derivada de orden superior se han construido como Objetos.

Los argumentos expuestos por los estudiantes E_1 y E_{26} dan cuenta de la asimilación de los Objetos segunda derivada y derivadas de orden superior a un Esquema de derivada y la re-equilibración del mismo. Los estudiantes son capaces de hacer Acciones sobre este Esquema, mostrando con ello haberlo tematizado a partir de la asimilación de las estructuras antes mencionadas al Esquema. Esta asimilación puede haber ocurrido antes de la entrevista o durante la misma. Ambos estudiantes son capaces de redefinir las propiedades analíticas en términos de sus Esquemas existentes e integrarlas para solucionar, por ejemplo, la Tarea 1. Además, el mecanismo de asimilación permite explicar la coherencia y flexibilidad del Esquema de estos estudiantes al enfrentarse a nuevas tareas y hacer uso de la estructura subyacente, ya construida, adaptándola adecuadamente para proporcionar respuestas correctas a las nuevas interrogantes.

4.3. Esquema tematizado a partir de la acomodación

Por su parte, el estudiante E_4 mostró relaciones y argumentos que dan cuenta de un Esquema tematizado. Sin embargo, al enfrentarse a interrogantes que requieren del análisis de derivadas sucesivas necesita reconsiderar las estructuras construidas y sus relaciones para afrontarlas. Esta reconsideración da evidencia del mecanismo de acomodación que le permite introducir nuevos Objetos a su Esquema y re-equilibrarlo para adaptar la nueva información y hacer uso de las relaciones construidas, tal y como lo muestra en su respuesta a la modificación de Tarea 3 (Tabla 2-Tarea 3):

> I: Ese punto x_0 que está ahí que correspondería a punto de inflexión de la primera derivada, porque estaría cambiando de concavidad, no es cierto ¿Qué cosas podrías decir sobre este punto x_0 con respecto a la segunda derivada o la tercera derivada?
>
> E_4: Ah, sí cogemos la función esta como la función normal digamos...
>
> I: O sea ¿cómo es eso de la función normal? Estás tomando que esta...
>
> E_4: Sí eso es F ya no es f', le llamo F.
>
> I: La estás llamando F, ok.
>
> E_4: Porque puedo llamarla así, básicamente. Con lo cual ahora, yo estoy hablando de un punto de inflexión normal, en la función primitiva, simplemente es un punto de inflexión. Me indica que la segunda derivada será cero.
>
> I: ¿Pero tu segunda derivada sería...?
>
> E_4: La tercera derivada.
>
> I: ¿Sería la tercera derivada?

E_4: Sí, si yo digo que F, digamos f′ la llamo F, con lo cual $f^{(n)} = F^{(n-1)}$, me voy ahí, y yo trabajo con la función que estoy acostumbrado y no cambio funciones, me es más fácil así.

El estudiante E_4 logra construir las relaciones entre el par (f', f'') y otras derivadas sucesivas de orden superior a dos, pero para ello debe apoyarse en un nuevo Objeto, la función F, que le permita utilizar las relaciones construidas para dar cuenta de nuevas relaciones asociadas a las propiedades de la función original. Esto le permite acomodar el Objeto segunda derivada como función para re-equilibrar el Esquema y poder operar sobre él. En particular, este estudiante requiere de la utilización de una función auxiliar F que hace corresponder con f'. Así, considera que F'' se corresponde con f''' y realizar el análisis del punto de inflexión de f' a través de F'' para establecer las relaciones asociadas al par (f'', f'''). E_4 no resuelve el problema directamente, sino solo por medio de una relación de recursividad entre derivadas sucesivas. Esta operación le permite acomodar en su esquema los Objetos relacionados con las derivadas de orden superior y reorganizar las relaciones entre los componentes de su Esquema. Este estudiante pone de manifiesto, explícitamente, el uso de esta estructura de recurrencia para vincular la relación entre f, f' y f'', en otros pares de derivadas sucesivas. Por ejemplo, al preguntarle por el comportamiento de f'' y $f^{(4)}$ en $x = a$, cuando se le ha proporcionado la gráfica de f''' en el entorno de este punto de tangencia vertical (Tabla 2-Tarea 4), el estudiante menciona: "Haciendo lo mismo que antes, ahora $f^{(n)} = F^{(n-2)}$, entonces mi tercera derivada en $x = a$ sería la primera derivada de F, por tanto, la segunda sería la función y la cuarta la segunda derivada y, luego trabajo con lo que yo sé". El uso reiterado de esta relación de recursividad entre funciones derivadas, considerando siempre la función auxiliar F como nexo, pone de manifiesto la función del mecanismo de acomodación y de la reconstrucción de las relaciones entre las componentes para re-equilibrar el Esquema. Más adelante explica:

I: Entonces ¿qué sucedería f′′ y $f^{(4)}$ en el entorno de $x = a$?

E_4: Pues F′ tiene una tangente vertical allí, además, podría ser cero y cambiar de signo ¿el eje de coordenadas corta en el punto de tangencia?

I: No necesariamente.

E_4: Ah, vale, o sea, no se puede determinar porque dependerá de la posición de esta porción de gráfica, pero en el caso más sencillo, o sea... si corta en punto de tangencia habrá un mínimo local en la función.

I: ¿En qué función?

E_4: De mi función F, que en este caso sería la f′′.

La evidencia en el trabajo de E_4 muestra que la re-equilibración de su Esquema de derivada hace posible las Acciones sobre el Esquema, es decir, que a partir de la acomodación lo ha tematizado, dado que es capaz de destematizarlo y reconstruirlo ante el nuevo reto de describir las propiedades de la función en términos de derivadas de orden superior. Para efectuar la reconstrucción que implica la incorporación de nuevos Objetos y relaciones, E_4 nuevamente hace uso del proceso recursivo. Específicamente, este estudiante incorpora nuevos Objetos y reconstruye las relaciones entre el signo de la derivada F' (F' que se corresponde con F''') y la monotonía de la función F (F que se corresponde con f'') suponiendo que la tangente vertical está en $x = 0$; es decir que $F'(0) = 0$. De esta forma, E_4 determina que F tendrá un mínimo local en $x = 0$. A partir de la acomodación y la re-equilibración del Esquema de derivada, el estudiante puede hacer Acciones sobre él mostrando así su tematización.

5. Discusión y conclusiones

El análisis de los resultados de este estudio muestra, en primer término, que la tematización de un Esquema, en este caso el Esquema de derivada, es difícil. Considerando la muestra inicial del estudio, y el hecho de que únicamente tres estudiantes mostraran la construcción del Esquema como un Objeto, indica que es necesario un mayor esfuerzo didáctico para lograr una construcción coherente y flexible del Esquema de derivada en el nivel universitario. Aun estudiantes que dan muestra del nivel Trans-derivada, al trabajar con problemas que exigen la construcción de relaciones flexibles entre las derivadas primera y segunda de una función, tienen dificultades para hacer Acciones sobre él. Uno de ellos da muestra de la necesidad de construcción de un Esquema coherente para enfrentar un problema que incluye contradicciones entre las distintas propiedades de una función.

El análisis de las entrevistas a los otros estudiantes que mostraron una construcción con nivel Trans-derivada del Esquema de derivada da evidencia que —frente a una situación nueva que desequilibra el Esquema de derivada construido— distintos estudiantes —que mostraron la tematización de este— presentan diferentes estrategias al abordarlo. Dichas estrategias demuestran que, ante la necesidad de hacer Acciones sobre el Esquema y mostrar su posible tematización, los estudiantes requieren en ocasiones de equilibrar el Esquema construido a partir de los mecanismos de asimilación o de acomodación.

Efectivamente, dos estudiantes mostraron la equilibración del Esquema y su posibilidad de operar sobre él a través de la construcción, en un caso, de una función auxiliar y, en otro, mediante la comparación de distintos pares de derivadas sucesivas que hizo posible acomodar estos Objetos en su Esquema para reconstruirlo, dar sentido a las relaciones entre sus componentes y operar sobre él.

Un estudiante mostró, a través de sus respuestas, la posibilidad de asimilar nuevas estructuras y relaciones a su Esquema mostrando más directamente la tematización del Esquema. Sus respuestas dan evidencia de cómo enfrenta las preguntas utilizando las estructuras del Esquema construido y reconstruyendo las relaciones entre ellas para responder a cada reto enfrentado.

El uso de los diferentes mecanismos de equilibración del Esquema permite dar cuenta de la forma en que los Esquemas de derivada de los estudiantes están en constante evolución. Esta evolución se estimula mediante el enfrentamiento a problemas nuevos que confrontan el conocimiento construido, permitiendo explorar y desarrollar distintas estrategias para resolverlos. Dichas estrategias requieren de la incorporación de nuevos Objetos al Esquema y de la reorganización de las relaciones entre las estructuras que lo componen a fin de re-equilibrar el Esquema o recomponerlo a su estado de equilibrio. Una contribución importante de este estudio es proporcionar evidencia del papel que juegan la asimilación y la acomodación, permitiendo que estos estudiantes muestren o construyan un Esquema de derivada tematizado.

A través de los resultados obtenidos este trabajo contribuye, además, al desarrollo de la propia teoría APOE al ir más allá del estudio de las estructuras que muestran los estudiantes a partir del aprendizaje de diversos conceptos y pasar al estudio de los mecanismos que permiten estas construcciones. El estudio provee evidencias claras de los mecanismos de equilibración del Esquema y su relación con el mecanismo de tematización del mismo. Este proceso y estos mecanismos han recibido muy poca atención y permiten comprender con mayor profundidad la evolución de los Esquemas, al tiempo que se muestra evidencia del papel que juegan los mecanismos de asimilación y acomodación al actuar sobre el Esquema y mostrar así su tematización. Este estudio desvela los retos involucrados en la posibilidad de tematizar los Esquemas relacionados con la construcción de los conceptos abstractos de las matemáticas que se estudian en la universidad. Por otra parte, este estudio muestra la potencialidad de preguntas de investigación que incluyen tareas con distintos grados de complejidad y de entrevistas que indagan a fondo en la argumentación de los estudiantes y que permiten acceder al reconocimiento de las estructuras que ponen en juego cuando los estudiantes se enfrentan a retos interesantes.

Los hallazgos de este estudio complementan a los obtenidos en investigaciones previas en relación con los Esquemas y su tematización utilizando la teoría APOE antes mencionados. En el caso del Esquema de derivada se cuenta ahora con mucha información que puede contribuir al diseño de actividades didácticas que permitan a los estudiantes ahondar en detalles de este importante concepto del Cálculo Diferencial y lograr con ello un aprendizaje más profundo y sólido. La importancia de la construcción de relaciones entre distintos aspectos del concepto de derivada que entran en juego en la construcción, evolución y tematización del Esquema no debe soslayarse en la enseñanza.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por los proyectos: Fondecyt N°11180899 de la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo de Chile; PID2019-104964GB-I00 y PID2020-116514GB-I00 (MINECO-España) y GIPEAM, SGR-2017-101. Además, ha contado con el apoyo del Departamento de Matemática Educativa de la BUAP.

Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady & P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). Grupo Editorial Iberoamérica.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer.

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivate. *Journal of Mathematics Behavior*, *16*(4), 399-430. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(97)90015-8

Baker, B., Cooley, L., & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for research in mathematics education, 31*(5), 557-578. https://doi.org/10.2307/749887

Cooley, L., Trigueros, M., & Baker, B. (2007). *Schema thematization: A framework and an example. Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(4), 370-392. https://doi.org/10.2307/30034879

Font, V., Trigueros, M., Badillo, E., & Rubio, N. (2016). Mathematical objects through the lens of two different theoretical perspectives: APOS and OSA. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(1), 107-122. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9639-6

Fuentealba, C., Badillo, E., & Sánchez-Matamoros, G. (2019). Identificación y caracterización de los subniveles de desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, *37*(2), 63-84. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2518

Fuentealba, C., Sánchez-Matamoros, G., Badillo, E., & Trigueros, M. (2017). Thematization of derivative schema in university students: nuances in constructing relations between a function's successive derivatives. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(3), 374-392. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1248508

García, M., Llinares, S., & Sánchez-Matamoros, G. (2011). Characterizing thematized derivative schema by the underlying emergent structures. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *9*(5), 1023-1045. https://doi.org/10.1007/s10763-010-9227-2

Lerman, S. (2014). *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 579-582). Springer.

Pepin, B., Biehler, R. & Gueudet, G. (2021). Mathematic in Engineering Education; a Review of Recent Literature with a View towards Innovative Practices. International *Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 7, 168-188. https://doi.org/10.1007/s40753-021-00139-8

Piaget, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives*. Presses Universitaires de France.

Piaget, J., & García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. Siglo Veintiuno Editores S.A.

Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto de transformación lineal. *Relime*, *13*(1), 89-112.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, *24*(1), 85-98.

Trigueros, M. (2019). The development of a Linear Algebra schema: learning as result of the use of a cognitive theory and models. *ZDM*, *51*(7), 1055-1068. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01064-6

Trigueros, M. (2005). La noción de Esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática, 17*(1), 5-31.

Trigueros, M., & Oktaç, A. (2005). La théorie APOS et l'enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 157–176.

Vrancken, S., & Engler, A. (2014). Una Introducción a la Derivada desde la Variación y el Cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. *Bolema*, *28*(48), 449-468. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a22

∞

Claudio Fuentealba

Universidad Austral de Chile (Chile)
cfuentealba@uach.cl | https://orcid.org/0000-0001-8071-5150

María Trigueros

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)
mtriguerosg@gmail.com | https://orcid.org/0000-0001-7527-6704

Gloria Sánchez-Matamoros

Universidad de Sevilla (España)
gsanchezmatamoros@us.es | https://orcid.org/0000-0002-7502-7924

Edelmira Badillo

Universidad Autónoma de Barcelona (España)
edelmira.badillo@uab.cat | https://orcid.org/0000-0001-6296-4591

Recibido: 20 de enero de 2022
Aceptado: 31 de marzo de 2022

Assimilation and accommodation mechanisms in the thematization of the derivative Schema

Claudio Fuentealba @ [1], María Trigueros @ [2], Gloria Sánchez-Matamoros @ [3], Edelmira Badillo @ [4]

[1] Universidad Austral de Chile (Chile)
[2] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)
[3] Universidad de Sevilla (España)
[4] Universidad Autónoma de Barcelona (España)

The notion of Schema in APOS theory has received less attention from the mathematics education community using APOS (Action, Process, Object, Schema) Theory as a theoretical and methodological research framework. Schema plays a very important role in Piaget's epistemology and its evolution is clearly analyzed in Piaget's genetic epistemology. This study contributes to the study of the Derivative Schema and, particularly, to its thematization, which describes the mechanism involved in making possible to do Actions on the Schema.

Specifically, the study reported focuses on the analysis of the role of assimilation and accommodation mechanisms in the equilibration process of the Schema, and its relationship with thematization. The authors designed two data collection instruments: a questionnaire and a semi-structured clinical interview consisting in two sessions. The questionnaire was intended to identify the levels of understanding of the Derivative Schema exhibited by the 40 participating advanced students and was analyzed in a firs methodological phase of the study. As a result of this phase, nine students who showed the construction of a Trans-derivative level of Scheme development were identified and interviewed. A third analysis phase of the study was conducted focusing on the characterization of the assimilation and accommodation mechanisms and their relation to the equilibration and thematization of the Derivative Schema.

The authors of the study provide evidence of the strategies followed by different student to address facing modifications of the original tasks, and new situations, that intended to unbalance their knowledge and to carefully follow their strategies related to the structures included in their Schema and the possible need for the reconstruction of structures, the relations among them together with their changes and reorganization in the construction of a Trans-Derivative Schema and students' possibility to perform Actions on this Schema, demonstrating its thematization.

The analysis of results obtained through this experience evidenced differences in students' strategies when trying to re-equilibrate their derivative Schema. Authors explain them in this study through the accommodation and assimilation re- equilibration mechanisms, which had not received much attention in studies using APOS Theory as theoretical framework.

Results of this study show, according to its authors, that thematization of a Schema, the derivative Schema in this case, is a challenging endeavor and difficult to achieve. In addition, the authors' results show that the Derivative Schema is a dynamic and constantly volving structure. Moreover, the authors that through the use of carefully designed questions it is possible to confront students with their constructed knowledge and stimulate their thinking, thus attesting their Schema dynamics and the mechanisms involved in their re-equilibration efforts. The findings of this study add to existing knowledge about the role of Schemas in APOS theory. In particular they address important aspects related to Schema thematization and provide evidence of students struggles and success to re-equilibrate their Schema when they face disequilibrating situations. In particular, this work complements previous studies on the Derivative Schema and provides valuable information that can contribute to the design of didactic activities that may foster students' learning by allowing them to delve into important details involved in the learning of Differential Calculus.