

Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las Matemáticas a través del análisis de vídeos

Nuria Climent, Universidad de Huelva (España)

Miguel Ángel Montes, Universidad de Huelva (España)

Luis Carlos Contreras, Universidad de Huelva (España)

José Carrillo, Universidad de Huelva (España)

M. Mar Liñán, Centro de Estudios Universitarios Cardenal Spínola-CEU (España)

M. Cinta Muñoz-Catalán, Universidad de Sevilla (España)

Víctor J. Barrera, Centro de Estudios Universitarios Cardenal Spínola-CEU (España)

Fernando León, Universidad de Huelva (España)

Recibido el 10 de abril de 2015; aceptado el 1 de octubre de 2015

Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las matemáticas a través del análisis de videos

Resumen

En este artículo abordamos la construcción de conocimiento sobre las características de aprendizaje matemático. Nos centramos en cómo tres estudiantes para maestro analizan un video en el que una maestra de primaria trabaja contenidos de geometría con sus alumnos. Mostraremos cómo la discusión del video da a estos tres estudiantes para maestro la oportunidad de mirar profesionalmente el aprendizaje de los alumnos que en él aparecen, movilizándolo en cursos previos y creando la posibilidad de generar nuevo conocimiento a través de sus intentos por comprender a los alumnos.

Palabras clave. MTSK; conocimiento sobre el aprendizaje matemático; análisis de video; estudiantes para maestro.

Construção de conhecimento sobre característica de aprendizagem da matemática através da análise de vídeos

Resumo

Neste artigo focamo-nos na construção de conhecimento sobre as características de aprendizagem matemática por três futuros professores dos primeiros anos através da análise de um vídeo onde uma professora explora conteúdos geometria. Mostraremos como a discussão do vídeo permite a estes três futuros professores a oportunidade de analisar as aprendizagens dos alunos,

Para citar: Climent, N., Montes, M.A., Contreras, L.C., Carrillo, J., Liñan, M.M., Muñoz-Catalán, M., Barrera, V.J., León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las matemáticas a través del análisis de videos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 9, 85 - 103.

Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las matemáticas a través del análisis de videos

mobilizando as discussões ocorridas na sua própria formação inicial e criando a possibilidade de gerar novos conhecimentos através das suas tentativas de compreender os alunos.

Palavras chave. MTSK; conhecimento da aprendizagem matemática; análise de vídeo; professores-alunos.

Building knowledge of features of learning mathematics by analyzing videos

Abstract

In this paper, we approach the development of knowledge of features of the learning of mathematics, by three prospective primary teachers through the analysis of a video where a primary teacher teaches geometry to her pupils. We show how the discussion of the video gives to the three prospective primary teachers the opportunity of professionally noticing pupils' learning, implementing what they learnt in previous courses and creating the possibility to generate new knowledge when they try to understand the pupils.

Key words. MTSK; Knowledge about mathematics learning; video analysis; prospective primary teachers.

La construcción de la connaissance sur les caractéristiques de l'apprentissage des mathématiques à travers des analyses de vidéos

Résumé

Cet article traite de la construction de la connaissance des caractéristiques de l'apprentissage des mathématiques de trois étudiants de DPPE (Diplôme Professionnel de Professeur des Écoles) à travers l'analyse d'une vidéo dans laquelle un enseignant de l'école primaire utilise concepts géométriques avec leurs élèves. On va montrer comment la discussion de la vidéo donne à ces trois étudiants de DPPE l'occasion d'observer l'apprentissage des élèves d'une manière professionnelle, en utilisant ce qu'ils ont appris et en générant la possibilité de créer de nouvelles connaissances par des tentatives pour comprendre les élèves.

Paroles clés. MTSK; connaissance sur l'apprentissage mathématique; analyse de vidéo; étudiant de professeur des écoles.

1. Introducción

El conocimiento de los futuros maestros ha sido, en los últimos veinte años, un foco de atención significativo en educación matemática. Partiendo de la tradición del área en la investigación en conocimiento profesional, y de nuestro bagaje como investigadores en este campo, hemos pretendido profundizar en un aspecto concreto del conocimiento profesional de los estudiantes para maestro (EPM): el conocimiento acerca del aprendizaje de los alumnos. Considerando que el análisis de la práctica de enseñar matemáticas crea las condiciones para la construcción de conocimiento útil para dicha enseñanza, incidiremos en el conocimiento que tres EPM movilizan en el análisis de un video en el que una maestra experta aborda la clasificación de triángulos.

De forma general, desde la investigación en educación matemática no existe un consenso sobre el contenido de la formación inicial del EPM para la enseñanza de la matemática. Sin embargo, parece haber más acuerdo en que el conocimiento de estos estudiantes debe llegar a ser profundo en la matemática fundamental (Ma, 1999). Algunos estudios muestran las dificultades de los EPM para considerar las

clasificaciones de triángulos respecto de sus lados y de sus ángulos como no disjuntas, lo que genera errores posteriores en ciertos resultados, confirmando que los EPM tienen una tendencia clara a dejarse llevar por el aspecto de las figuras geométricas (Gutiérrez & Jaime, 1996), en particular, de los triángulos, y no tener en cuenta sus características críticas (Blanco & Contreras, 2012). Así, difícilmente serán capaces de decidir qué tipo, respecto de sus ángulos, es un triángulo que no tiene alguno de sus lados en la horizontal; incluso cuando sí lo está, necesitan observar la figura en su forma prototípica, del mismo modo que les resulta difícil en este caso localizar su altura (Blanco & Contreras, 2012).

Estos resultados, ligados a las dificultades y errores habituales de los EPM al tratar con la geometría, fundamentan nuestro interés en conocer cómo estos futuros maestros podrán comprender a sus estudiantes, ya que es una tarea propia del profesor conocer e interpretar los argumentos de sus alumnos, incluyendo esta interpretación una componente ligada a la matemática de forma intrínseca.

Para dar sustento teórico a la investigación aquí mostrada, usaremos el modelo de conocimiento profesional MTSK -Mathematics Teachers Specialized Knowledge- (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2014), que aporta a los EPM la posibilidad de desarrollar de forma fundamentada su competencia de 'mirar con sentido' (Llinares, 2012).

El foco de este artículo se sitúa en la construcción y uso, por parte de tres EPM seleccionados, de conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), uno de los subdominios de MTSK, sobre el contenido de clasificación de triángulos. Este contenido es de difícil construcción en la formación inicial (Ponte, 2011), siendo “una buena elección para trabajar en pequeños grupos, donde se puede prestar atención a eventos reales de clase” (p. 253).

La pregunta de investigación que orienta este trabajo es ¿qué y cómo se construye KFLM durante el análisis de un video de enseñanza? Nos planteamos además qué relación se evidencia entre el KFLM que se construye y otros elementos del MTSK que usan los EPM.

2. Marco teórico

En esta investigación partimos de la base de que la práctica docente conlleva la toma de decisiones por parte del profesor, basándose en su conocimiento, orientado por sus creencias y con vistas a alcanzar ciertas metas (cf. Schoenfeld 2010). Esta perspectiva se basa en que el conocimiento es “información potencialmente disponible para usar” (Schoenfeld 2010, p. 25), aportando a la visión habitual sobre conocimiento, asociada a la información conocida, la necesidad de que dicha información deba poder usarse. Basándonos en este enfoque, el sustento teórico de esta investigación es fundamentalmente el modelo de conocimiento del profesor MTSK (Carrillo et al., 2014), a través del cual pretendemos identificar el conocimiento que posibilita las acciones y toma de decisiones del profesor. Además, al centrarnos en el conocimiento de los EPM que emerge y se pone en juego en la interpretación de una situación de enseñanza-aprendizaje, abordamos el carácter útil de dicho conocimiento. La interpretación de situaciones de enseñanza-aprendizaje es considerada una competencia profesional del profesor (Mason, 2002; Llinares, 2013). En este trabajo nos ocupamos del conocimiento en uso y construcción en relación con dicha competencia.

El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (*Mathematics Teacher Specialised Knowledge* -MTSK) es un modelo analítico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de tipo descriptivo desarrollado en la Universidad de Huelva (e.g. Rojas, Flores & Carrillo, 2013; Montes, Contreras, et al., 2015). Este modelo enfoca el conocimiento del profesor desde un punto de vista integral, considerando las distintas naturalezas, tanto del dominio matemático como del dominio didáctico específico, es decir, tiene en cuenta las diferencias que existen en cuanto a los criterios de validez de uno y otro dominio y destaca las diferentes facetas en las que el profesor conoce el contenido matemático. En este modelo, la noción de especialización es intrínseca al tipo de reflexiones que el profesor establece sobre el contenido, de forma que se entiende su contenido como ‘especializado’, en cuanto a que contempla todos los conocimientos de índole matemática que el profesor pudiera requerir en su labor profesional. Presentamos brevemente el modelo, remitiendo al lector a los trabajos anteriormente citados.

En lo correspondiente al conocimiento matemático (MK), el modelo MTSK propone una distinción de subdominios basada en las diferentes formas de conocer la matemática disciplinar, escolar y didáctica. Refleja de este modo un conocimiento local de la propia matemática (referido al conocimiento profundo de los temas matemáticos), global (en cuanto al conocimiento de la conectividad entre diferentes conceptos), y de la forma de articular la propia disciplina (formas habituales de proceder en matemáticas).

Así, el conocimiento de los temas matemáticos (KoT) supone conocer los contenidos matemáticos y sus significados de manera fundamentada, integrando el contenido que queremos que aprenda el alumno, con un nivel de profundización mayor. El conocimiento de la estructura de la matemática (KSM) se refiere a las relaciones que establece el profesor entre distintos contenidos matemáticos, ya sea en un curso específico o con contenidos de otros cursos o niveles educativos. El conocimiento de la práctica matemática (KPM), finalmente, se refiere a las formas de conocer y crear o producir en Matemáticas, los aspectos de la comunicación matemática, el razonamiento y la prueba.

En el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), el MTSK identifica tres subdominios de conocimiento donde el contenido matemático condiciona la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (no se contemplan conocimientos pedagógicos en contextos de actividades matemáticas). Describiremos con más detalle uno de ellos, el conocimiento sobre las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), por ser el foco de este trabajo.

En el KFLM consideramos las formas de aprendizaje, referidas al conocimiento que tiene el profesor acerca de los posibles modos de aprehensión asociados a la naturaleza misma del contenido matemático. Cuatro categorías permiten profundizar en la naturaleza del mismo:

- *Conocimiento sobre Formas de Aprendizaje*: conocimiento de estructuras o teorías personales o institucionalizadas sobre el aprendizaje del estudiante tanto de la matemática en general, como de contenidos particulares. Por ejemplo, un profesor puede conocer, de manera formal o informal, los niveles de Van Hiele del desarrollo del pensamiento geométrico y sus consecuencias en el proceso de aprender a clasificar triángulos.

- *Conocimiento de Fortalezas y Dificultades asociadas al Aprendizaje:* conocimientos sobre los errores, obstáculos y dificultades asociados a la matemática en general y a temas concretos. Por ejemplo, el conocimiento de las dificultades de los estudiantes para integrar las clasificaciones de los triángulos según lados y ángulos (como saber que un estudiante puede afirmar que un triángulo rectángulo no puede ser isósceles y sí equilátero).
- *Conocimiento de las Formas de Interacción de los Alumnos con el Contenido Matemático:* conocimiento de los procesos y estrategias de los estudiantes, tanto los típicos como los atípicos, conocimiento sobre el posible lenguaje o vocabulario usado comúnmente al abordar un determinado contenido. Por ejemplo, el conocimiento sobre los hábitos de los estudiantes de representar los triángulos con uno de sus lados paralelos a la base del papel o la pizarra.
- *Conocimiento de Concepciones de los Estudiantes sobre Matemáticas:* conocimiento sobre las expectativas e intereses que tienen los estudiantes con respecto a las matemáticas. Por ejemplo, el conocimiento sobre lo innecesario que es para los estudiantes demostrar lo que en un dibujo parece evidente.

Continuando con los subdominios del dominio del PCK, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) incluye las teorías personales o institucionalizadas de enseñanza, las distintas actividades, tareas, analogías o ejemplos que conoce el profesor, así como los conocimientos sobre el potencial y limitaciones que pueden tener los recursos materiales o virtuales disponibles para la instrucción, al abordar determinados contenidos matemáticos. Por último, el conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS) recoge el conocimiento de los contenidos propuestos en las normativas curriculares institucionales para saber lo que se prescribe en cada etapa, es decir, dar una ubicación temporal y contextual al contenido abordado. Además, se incluye la identificación del conocimiento de objetivos y estándares de aprendizaje no oficiales que pueda tener el profesor, de la investigación, o procedentes de su experiencia respecto a los logros de aprendizaje, en relación con lo prescrito por la administración educativa.

Nos interesa analizar la construcción de KFLM desde nuestra concepción de conocimiento, anteriormente referida, en la que es fundamental su potencial para usarse. En este sentido, nos parece que el análisis de la práctica es una vía fundamental para dicha construcción, pudiéndose generar situaciones de discusión muy ricas, tanto en contenido matemático como propio de la didáctica de las matemáticas (e.g. Climent & Carrillo 2002), centrándose de forma habitual las discusiones de los EPM en la discusión de la acción de los alumnos (Ponte, 2011). La propia actividad de análisis de la práctica permite a los EPM desarrollar sus habilidades como maestros para interpretar qué conocimiento del aprendizaje de los alumnos se requiere para gestionar una situación en concreto, desarrollando también su capacidad de toma de decisiones al respecto (Llinares, 2013). En particular, el análisis de la práctica permitirá a los futuros maestros desarrollar su capacidad para activar información aprendida durante el curso, dándole el sentido de conocimiento en el que nos basamos.

En nuestro caso, la reflexión fue guiada hacia consideraciones propias de las características del aprendizaje en matemáticas de los alumnos (con el objetivo de que los EPM mostrasen y desarrollasen su KFLM). Se ha abundado en este sentido (Jacobs, Lamb, & Philipp 2010), proponiendo que los estudiantes para maestro establecen reflexiones basadas en habilidades de tres naturalezas diferentes: la capacidad de percibir y comprender los detalles matemáticos en las estrategias de los alumnos; la capacidad para establecer conexiones entre las estrategias de alumnos

específicos y aspectos derivados de la investigación sobre el desarrollo del pensamiento de los estudiantes; y la capacidad para usar lo aprendido sobre la comprensión de los estudiantes acerca de situaciones específicas, poniéndolo en relación de forma consistente con los resultados de investigación sobre el desarrollo del pensamiento del alumnado. Estas categorías están referidas al uso que pueden hacer los profesores tanto de su conocimiento matemático, principalmente el KoT, como de su conocimiento sobre el aprendizaje de los alumnos, KFLM, para interpretar y gestionar el aprendizaje de sus alumnos.

3. Diseño del estudio

Las investigaciones orientadas a comprender la potencialidad del vídeo en las aulas de formación suelen centrarse en contextos de grupos naturales (e.g. Ortega & Pecharromán, 2015). Estos estudios han puesto de manifiesto el potencial formativo de este recurso que, en ocasiones, se ve mermado por las carencias en conocimiento matemático de los propios EPM (e. g. Climent et al., 2013). Así, en esta ocasión, nos interesaba profundizar en cómo influye este tipo de actividad en el conocimiento de estudiantes con una buena base matemática y una disposición favorable a efectuar una reflexión didáctica. Los objetivos que han guiado esta investigación son comprender qué KFLM movilizan tres EPM cuando visualizan un vídeo de enseñanza, e identificar posibles relaciones entre el KFLM y otros elementos del MTSK de estos EPM.

Posicionándonos en un paradigma interpretativo (Bassegy, 1995), accedemos al campo de estudio mediante un diseño de investigación que se caracteriza por: el uso de un vídeo de enseñanza alrededor del cual gira una actividad formativa en un aula de formación inicial de maestros (de 4º curso del Grado de Primaria); la selección de tres EPM del grupo natural con los que se realiza una entrevista grupal posterior; y el enfoque cualitativo con el que se abordan los procesos de recogida y análisis de los datos.

La recogida de información se realizó en el contexto de una actividad formativa basada en el visionado y análisis de un vídeo de enseñanza, en el que una maestra gestionaba una actividad de clasificación de triángulos con alumnos de 4º de Educación Primaria. Como tarea previa al inicio del visionado, los EPM debían realizar un diseño de una sesión para introducir el mismo contenido matemático a alumnos de 4º de Educación Primaria. Contaban con las fichas del libro de texto que la maestra utilizó. Dicho diseño fue puesto en común por alumnos voluntarios. El visionado estaba guiado por un instrumento en forma de tabla, en el que cada estudiante debía atender a una serie de indicadores (Figura 1), diferenciando lo que observaban y los comentarios que les suscitaba dicha observación. En la siguiente sesión, se procedería a la puesta en común y a la discusión.

Los tres informantes de esta investigación (a los que denominaremos como Jaime, Joaquín y Daniel) habían cursado asignaturas del área en años anteriores y fueron seleccionados atendiendo a los criterios arriba mencionados: posesión de un conocimiento matemático aceptable y buena disposición a la reflexión didáctica. Después del visionado conjunto, se les proporcionó una copia del vídeo, se les pidió que completaran con mayor detalle el instrumento de análisis proporcionado, elaboraran un informe individual, y se les emplazó a una entrevista conjunta un mes

después. En esta entrevista (videograbada) estuvieron presentes el investigador-formador y un investigador novel, quienes solo intervenían formulando preguntas con el fin de que explicaran sus ideas con mayor claridad. La entrevista conjunta de los informantes pretendía propiciar la explicitación, discusión y argumentación de las propias respuestas, frente a posibles opiniones contrarias.

-Estrategias seguidas por la maestra;	-Ejemplos usados, representaciones del contenido y su problemática;
-Estrategias de pensamiento y dificultades de los alumnos, ideas intuitivas;	-Conocimiento de la maestra sobre el contenido;
-Contenidos trabajados y en qué se pone el énfasis;	- Conocimiento de la maestra sobre la enseñanza y el aprendizaje del contenido;
-Tipo de actividades;	
-Recursos: potencialidad, limitaciones y uso;	
-Adecuación al currículo	

Figura 1. Dimensiones del instrumento para el visionado del vídeo.

En el análisis de la información hemos procedido según el proceso de codificación descrito por Kvale (1996), organizándolo en dos fases. En la primera, hemos analizado la transcripción completa de la discusión de los tres EPM, identificando elementos de MTSK que como investigadores interpretamos que se movilizaron en el análisis del vídeo. Seleccionamos tres episodios (fragmentos coincidentes con un cambio de actividad o de objetivo en el trabajo en desarrollo) de esta transcripción, en los que la discusión de los EPM es más rica, en términos de la presencia de evidencias de conocimiento. En una segunda fase, analizamos cada uno de estos episodios, profundizando en el MTSK que se observa. Identificamos subdominios y categorías y establecimos relaciones entre elementos de conocimiento de distintos subdominios. Se llevó a cabo un proceso de triangulación por discusión de expertos. Aquí nos hemos centrado en las unidades de información que evidencian construcción de KFLM, identificando la presencia de otros subdominios del MTSK en dichas unidades, con el fin de explicar la relación entre la construcción del KFLM y el conocimiento en otros subdominios.

4. Resultados

De los aspectos discutidos por los EPM respecto del análisis del vídeo, los más abundantes son los relativos al aprendizaje de los alumnos (KFLM, categorías *fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje* y *formas de interacción de los alumnos con el contenido*). No obstante, en el razonamiento de los EPM se observan reflexiones que se corresponden con modelos sobre el aprendizaje del contenido matemático reflejados en la literatura de investigación (que no han sido estudiados en las materias cursadas). Asociamos esta correspondencia con una construcción informal (pudiera ser los inicios de ésta) de conocimiento de los EPM sobre *formas de aprendizaje*.

A continuación presentamos estos aspectos del KFLM agrupados por el pensamiento de los alumnos de EP a los que hacen referencia. Además de analizar el KFLM que identificamos en cada uno de los casos, exponemos qué otros subdominios del MTSK parecen emerger en las reflexiones de los estudiantes, buscando relaciones entre los subdominios.

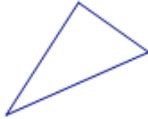
a) Restricciones en el concepto de triángulo

En el vídeo, la maestra comienza proponiendo la actividad y resolviendo las dudas que surgen. Transcribimos un fragmento que constituye el primer episodio que seleccionan los EPM para su discusión.

[La maestra ejemplifica a los alumnos cómo hacer un triángulo en la trama de puntos, con vértices sobre los puntos de la trama. Su ejemplo causa sorpresa en un alumno].

M: *Yo voy a hacer un triángulo (dibujando en la pizarra sobre una de las tramas) donde un vértice va a ser éste, otro vértice va a ser éste y otro vértice va a ser éste (señalando tres puntos sobre la trama). Entonces ahora junto éste con éste, éste con éste y éste con éste (dibujando los lados del triángulo correspondiente):*

PIZARRA [sobre una trama]:



A1: *¿Pero hay que dibujar triángulos normales o...?*

Figura 2. Extracto del vídeo de Primaria.

En su discusión, los EPM identifican como dificultad de aprendizaje habitual el reconocimiento de polígonos que no tienen un lado sobre la horizontal.

Jaime *...un niño habla de triángulos normales o triángulos que no son normales [...] que por no tener la base paralela al suelo, a la horizontal, no son triángulos normales.*

Se preguntan por el origen de esta *concepción* (sic). Lo asocian a la propia enseñanza, por la representación convencional en los libros de texto, reconociendo la problemática de las representaciones prototípicas.

Jaime *Yo lo que he pensado es: primero, ¿por qué puede tener esa concepción? Primero, porque yo creo que de toda la vida tradicionalmente se han hecho los triángulos así, es más cómodo de ver un triángulo con la base paralela al suelo porque es como nos han enseñado siempre.*

Joaquín *...que como en los libros de texto ha aparecido con la base [horizontal], pues ahora les cuesta trabajo verlo inclinado.*

Por otra parte, parece que lo asocian a la idea de equilibrio presente en los objetos reales. Este hecho se relaciona con la interferencia entre el concepto de altura de un triángulo y la altura de un edificio o de un objeto real (significado cotidiano de la altura, que corresponde a la vertical según la gravedad, Azcárate, 1997).

Jaime *Y también he pensado en el tema de equilibrio, porque el niño a lo mejor al ver el triángulo... que la horizontal [...] está apoyada en un vértice, a lo mejor lo ve que no mantendría el equilibrio, si estuviera apoyado sobre la base ese triángulo se mantendría en equilibrio.*

Finalmente, uno de los EPM lo atribuye a la mayor facilidad para dibujar triángulos:

Daniel *Yo creo que es más sencillo hacer una línea debajo y ahora ya haces los otros dos que si haces así y ya luego vas poniendo en todas las esquinas un poquito para cerrarlo.*

Además, asocian la dificultad para reconocer triángulos en determinadas posiciones (considerando la posición como una característica relevante del concepto) al hecho de que el alumno de Primaria no ha trabajado los movimientos en el plano como transformación geométrica. Este hecho está relacionado con la rigidez de las imágenes de triángulo.

Jaime *A lo mejor un niño hasta ese curso no está acostumbrado a hacer giros con figuras planas [...] les cuesta trabajo ver que un triángulo con base en la horizontal pueda estar doblado, pueda girarlo en su cabeza.*

En este caso, esta reflexión sobre el aprendizaje de los alumnos, que consideramos KFLM relativo a la categoría *formas de interacción con el contenido* (cómo piensan los alumnos el objeto triángulo), se posibilita por el conocimiento del EPM sobre qué contenidos se trabajan en 4º de Primaria (KMLS). También enlaza esa reflexión con la aparente toma de conciencia de que los maestros no suelen reparar en la posición de las figuras hasta que trabajan los movimientos (unidad que sigue). De este modo, reflexionan sobre la necesidad de mencionar esta característica, que parece relevante para los alumnos, en el trabajo con objetos geométricos.

Daniel *Todos los maestros pintan así, yo creo que es de forma inconsciente, yo no sé si es que nadie se lo ha planteado [...] a mí nunca me lo han pintado [...] hasta que no vimos los giros y eso, pero siempre paralelo.*

Los estudiantes aluden de manera implícita a la idea de imagen de triángulo ligada a su definición (*definición en su cabeza, como está acostumbrado a verlo-sic*) (*la definición pueden tenerla clara pero están acostumbrados a verla así-sic*):

Jaime *Yo también he pensado que puede ser que en la definición de triángulo que el niño pueda tener, para él mismo en su cabeza [...] como está acostumbrado a verlo así, puede que ya dentro de esa definición entre que el triángulo debe tener una base que sea paralela a la horizontal, entonces a lo mejor por eso no lo ve como un triángulo normal.*

Daniel *...yo creo que la definición pueden tenerla clara pero están acostumbrados a verlos con la base así, entonces en la mayoría de otros sitios es que ni se lo imaginan.*

Asociamos esta reflexión a la diferenciación en la literatura de investigación entre la imagen conceptual de un objeto y su definición (Vinner, 1991). Aunque sin conocer la teoría referida, los EPM intuyen que la idea de un aprendiz sobre un concepto geométrico como el de triángulo, no sólo está constituida por la definición que conoce, como enunciado verbal, sino por el conjunto de imágenes que le asocia, y que este conjunto puede ser restrictivo respecto del concepto. Además, los EPM parecen ser conscientes de la mayor fuerza de la imagen del concepto frente a su definición verbal (Vinner, 1991) y de que los alumnos pueden tomar de los ejemplos que se les muestran, algunas de sus características secundarias como definitorias. El análisis antes expuesto muestra la idea de los EPM de que en la construcción de dichas imágenes juega un papel fundamental la experiencia del aprendiz y los ejemplos que ha visto o usado tanto en el contexto escolar como extraescolar (Gutiérrez & Jaime, 1996).

La percepción de los EPM sobre la influencia de la posición en el reconocimiento de triángulos permite también que identifiquen la confusión de los alumnos entre horizontalidad y lado recto, asociado a la idea de una única base en los triángulos, ligada a la horizontal:

Jaime *Yo de los errores también tengo que en la clasificación por lados un alumno llama a una base, a un lado de la horizontal, "lado recto" [...] yo no creo que sea porque piense en algo, él concibe como una línea recta la que está en la horizontal y la que está en la vertical, no concibe como una línea recta la que está oblicua. [El formador cuestiona si el propio niño hacía mención al término "base"]. Ahora mismo no recuerdo.*

Los aspectos señalados de KFLM, que consideramos se activan en la discusión, se relacionan con el conocimiento de los temas (KoT). Parece claro que sus reflexiones sobre cómo comprenden los alumnos de Primaria el contenido y las dificultades asociadas, se basan en una imagen de triángulo no vinculada a la posición como característica relevante y la consciencia de dicho hecho en su concepto de triángulo. Parece que estos EPM tienen una idea de altura que no se asocia con verticalidad. Además, el KFLM que se hace explícito va parejo a reflexiones sobre la enseñanza del contenido, en cuanto a formas habituales de tratarlo por parte del maestro y en los libros de texto. Asociamos estos elementos a conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas (KMT), referido a estrategias de enseñanza y recursos. Finalmente, como hemos indicado en el análisis anterior, el conocimiento sobre qué se trabaja en el nivel de Primaria correspondiente (en este caso 4º de Ed. Primaria) (KMLS) posibilita comprender cómo piensan el contenido los alumnos de Primaria. Respecto del propio KFLM, las reflexiones de los EPM sobre el episodio seleccionado del vídeo de Primaria evidencian construcción de conocimiento relativo a la categorías *formas de interacción de los alumnos con el contenido, fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje, y formas de aprendizaje.*

b) Dificultades con el concepto de ángulo

En el vídeo, algunos niños hablan de *vértices obtusos o agudos*, y en otra ocasión de *lados obtusos*. Un EPM asocia estas confusiones a la necesidad del vértice y los lados para definir el ángulo. En concreto, destaca la confusión ángulo-vértice, lo que en su opinión se debe a la cercanía de ambos y a la propia forma de señalar los ángulos, con un arco de circunferencia cerca del vértice. Identifica el origen de la dificultad en la epistemología del propio concepto:

Daniel *Hay un momento en el que dicen que el vértice es agudo, o que el vértice es obtuso, entonces [...] yo creo que eso es una dificultad que tienen ellos más que nada por la cercanía de vértice y ángulo y porque son algo parecidos. Un vértice es un punto y un ángulo está relacionado con los dos lados que llegan a ese punto, entonces, como están tan cerca uno de otro, además cuando lo dibujamos, dibujamos el angulito al ladito del punto [...]. Entonces yo creo que pueden confundir lo de vértice y ángulo.*

Un segundo EPM apoya esta argumentación:

Jaime *Yo creo que pasa porque un ángulo tú lo formas alrededor de un vértice, casi siempre.*

Otro EPM, sin embargo, lo había asociado a que los alumnos no recuerdan bien los conceptos implicados.

Joaquín *Yo encontré que [...] los niños [...] conocen todos los nombres pero a lo mejor no lo asignan a lo que lo deberían de asignar aquí, pero una vez que se les recuerda y se les... ya lo siguen planteando bien.*

La idea de ángulo que refleja este último EPM (KoT) es la de región del plano limitada por dos rectas secantes.

Podemos enlazar la percepción de esta dificultad por parte de los EPM con su valoración del abanico como recurso usado por la maestra para representar ángulos (KMT):

Daniel *...me llamó mucho la atención... cuando coge el abanico para explicarle a los alumnos el ángulo recto... cuando abre el abanico y dice: "mira, un ángulo recto es esto", y lo pone sobre el que tenían [en la trama] y dice: "esto no puede ser recto", entonces los alumnos ven que es verdad. Es algo muy poco convencional pero muy útil.*

Jaime *Va haciendo el arco y todo.*

Daniel *Como está por tablitas [varillas], se ve claramente, por ejemplo, recto, 8 varillas, si tenemos 4, ¿de cuánto es?*

Esta apreciación pudiera reflejar una idea del ángulo como apertura (KoT). En esta última reflexión sobre el abanico como recurso, intervienen los dos EPM que valoraban las dificultades del concepto de ángulo (Daniel y Jaime), analizando posibles variables que intervenían. La idea de ángulo que estos EPM ponen en juego en su análisis parece ser más rica que la del tercer EPM, que lo entiende como espacio delimitado y que considera no problemática la confusión ángulo-vértice-lados.

c) El ejemplo como caso concreto

Un EPM destaca la dificultad de un alumno del aula de Primaria para imaginar un triángulo *con un lado largo, otro mediano, y otro corto* (sic), lo que asocia a que, en su conjunto de imágenes de triángulo, deben ser hegemónicos los triángulos equiláteros e isósceles. Otro EPM interpreta este pensamiento del alumno como la imposibilidad de que se construya un triángulo determinado en el que está pensando, más que en la imposibilidad general de hacer un triángulo con dichas características.

Daniel *...dice que no puede haber un triángulo formado por un lado largo, otro mediano y otro corto [...] Eso será porque están acostumbrados a ver los triángulos siempre equiláteros o isósceles, que son los que tienden a representar y a lo mejor cuando ven un escaleno no se paran a pensar en cómo tiene los lados o nunca se han fijado.*

Jaime *Yo he pensado, porque en la transcripción el niño hace como el dibujo y hace como que... [movimientos con la mano] [...] Yo creo que a lo mejor lo que ha puesto ese niño es que en un triángulo determinado, no piensa en cualquier triángulo. Ha pensado en uno determinado, y además ha pensado que dos segmentos no pueden variar entonces, varía nada más que uno, entonces será imposible formar un triángulo escaleno si dos lados no varían, por eso creo yo que el niño confunde también.*

En esta segunda reflexión, el EPM parece percibir la necesidad de los alumnos de primaria de pensar sobre ejemplos concretos (desde su particularidad), es decir, sus dificultades para imaginar un triángulo como representante de una clase general. Además, se observa su KoT sobre la desigualdad triangular, que le sirve, por un lado, de argumento para justificar el posible pensamiento del alumno y, por otro, pudiera ser que de base para interpretarlo.

d) Dificultades de los alumnos con la medida de longitudes

Los EPM se preguntan cómo los alumnos de Primaria reflejan concepciones erróneas sobre la medida de longitudes en su trabajo con la trama de puntos rectangular. Identifican como tales concepciones erróneas la percepción de la igualdad entre la longitud de la diagonal de un cuadrado y sus lados, así como que los alumnos asocien la distancia de un segmento al número de marcas que pueden establecerse sobre dicho segmento una vez elegida la unidad (más que a las veces en que está contenida la longitud del segmento unidad).

Daniel *...puede incitar a error a los alumnos si cuentan por puntos la diagonal,*

Jaime *Que tome como unidad...igual vertical, horizontal y diagonal.*

Daniel *Que cuenten de punto a punto porque al ser tan chicos no se dan cuenta que la distancia es mayor.*

Daniel *Empieza a contar puntos porque se lo dice una alumna...*

A la pregunta del formador *-¿Os parece buena idea contar los puntos?- responde*

Jaime *Es que es imposible contar... un triángulo en una trama es imposible saber lo que mide uno de los puntos porque siempre habrá un lado que no coincida [se entiende que con la horizontal o la vertical].*

Daniel *Pero para compararlos gráficamente sí, porque por ejemplo en éste (señala un triángulo de la trama) ves que son 4 y 4, sabes que son iguales y ése no. [...] yo creo que los alumnos cuando al principio empiezan a decirlo, inconscientemente, dicen que son iguales, pero yo creo que es porque cuentan los puntos a lo mejor sin darse cuenta, ven como la misma estructura y lo dicen. [El formador sintetiza la idea que parecen estar expresando -digamos como elemento para comparar segmentos en vertical u horizontal-]. Sí, para compararlos entre sí, ya no sabemos cuánto miden, pero tampoco importa mucho saber exactamente cuánto miden aquí.*

Además de interpretar cómo miden segmentos los alumnos en la trama (KFLM-*formas de interacción con el contenido*), el EPM que lleva el peso de la reflexión sobre la estrategia de contar puntos sobre un segmento (Daniel), defiende la validez de dicha estrategia para comparar la longitud de segmentos. De este modo, por un lado, refleja su diferenciación entre comparación y medida de magnitudes (en este caso longitud), como procesos diferentes, donde el primero no implica necesariamente el último (KoT relativo a la medida de magnitudes). Por otra parte, analiza la estrategia de los alumnos explorando en qué casos sería válida (lo que asociamos a una actitud ante los errores de los alumnos, como expresión de conocimiento y como fuente potencial para el maestro de generación de KFLM).

Las dos reflexiones reflejan conocimiento sobre la comparación de la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo con la de sus catetos, quizás asociado a su conocimiento del teorema de Pitágoras (KoT).

e) Dificultades para integrar las clasificaciones de triángulos según sus lados y según sus ángulos, y en la identificación de los tipos posibles de triángulos según sus ángulos

En el vídeo de Primaria, primero se clasifican los triángulos dibujados por los alumnos según sus lados y después según sus ángulos. Como resultado final, los triángulos quedan clasificados por ambos criterios. Los EPM reflexionan sobre las dificultades manifestadas por los alumnos con la compatibilidad de ambas clasificaciones:

Daniel *Yo tenía en errores [...] cuando los alumnos confunden la clasificación según sus lados o según sus ángulos y un alumno llega a decir que no puede haber un triángulo isósceles y rectángulo [...] no se paran triángulo por triángulo, lo suyo sería una vez lo construyesen, vamos a recortarlos y vamos a hacer montones, y una vez que tengamos los montones decimos, vamos a ver los isósceles. ¿De qué tipo hay?*

Asocian esta dificultad al modo de trabajo sobre las clasificaciones, de modo independiente, sin reparar en clasificar a la vez con ambos criterios. De este modo, diferencian la actividad de clasificar por un criterio o por dos criterios simultáneos, y la importancia de considerar esta segunda en la enseñanza del contenido (KMT). Además, ponen de manifiesto su conocimiento sobre la compatibilidad de ambas clasificaciones (KoT).

Además, los EPM constatan la dificultad de los alumnos para saber qué tipos de triángulos son posibles según sus ángulos. La forma de validación en el aula propicia esta dificultad, según los EPM. Además, el dibujo puede ser una buena herramienta para que los propios alumnos exploren las posibilidades:

Daniel *...y también otro error que tengo apuntado es cuando un alumno dice que puede haber un triángulo con dos “triángulos obtusángulos” porque además salen a demostrárselo a la pizarra porque al principio no se lo creían, y hasta que salen ellos mismos a la pizarra y lo hacen...*

Jaime *Yo creo que [el que] haya dos ángulos obtusos también puede salir porque antes habían hecho la clasificación de lados y en la clasificación de lados se había dado de todo, o sea, podía haber las 3 combinaciones (los 3 iguales, dos iguales y uno desigual, y los tres desiguales), entonces ahí valían todas las clasificaciones, incluso hubo uno que no salió, y sin salir también valía [se refiere al triángulo equilátero, que la maestra justifica que no ha salido pero podría salir], entonces los niños pueden pensar pues éste no salía pero puede existir.*

Daniel *A lo mejor hubiese sido más enriquecedor que ellos hubiesen dibujado mal, pero que ellos se lo creyesen, un equilátero para demostrarle que un equilátero rectángulo no puede ser, por ejemplo.*

En su intento de comprender el pensamiento de los alumnos, Jaime vislumbra una posible generalización, por parte de los niños, de la situación de la clasificación de triángulos según sus lados (donde todas las combinaciones son posibles) a la de la clasificación según sus ángulos (donde no todas las combinaciones son posibles). El hecho, además, de que la maestra dé por obvio que los alumnos crean que también existen triángulos equiláteros, cuando no se han obtenido en la trama de puntos, considera que refuerza esta generalización. De modo implícito, se evidencia el KoT de ambos EPM sobre los posibles ángulos de un triángulo, posiblemente apoyado en su conocimiento sobre la suma de los ángulos de un triángulo.

Es interesante ver cómo Daniel continúa con su reflexión sobre cómo pueden comprender los niños que se pueden obtener triángulos equiláteros. Propone el uso del compás y cree que, de modo implícito, los alumnos de Primaria pueden comprender que todos los triángulos equiláteros son semejantes entre sí y que es posible percibir su regularidad e identificarlos en distintas posiciones, frente al caso de otros tipos de triángulos. Esta reflexión refleja, además de KFLM (*formas de interacción de los alumnos con el contenido*), su KoT sobre la semejanza de triángulos, la regularidad de polígonos y las clases de triángulos según sus lados, poniendo de manifiesto el conocimiento de conexiones que consideramos intra-conceptuales en torno al concepto de polígono (triángulos, en este caso).

Daniel *...puedes manipular con un compás, aunque no sea sobre un punto [parece aludir a fuera de la trama de puntos], pero para decirles: “¡mira!, éste es el que falta”. [...] Y ya el equilátero, sea como sea, siempre va a ser el mismo porque el triángulo puede ser más grande o más chico, pero es el único que no cambia nunca, entonces, sobre ese ven que todos los ángulos son agudos, entonces sería bueno que lo hubiesen pintado.*

[Como respuesta a la pregunta del formador: *¿Qué es lo que no cambia?*] *Que a lo mejor el rectángulo puede ser o que esté girado, o que tenga un lado más grande que otro, no sé, como que tienen más variantes, pero un equilátero, al ser los tres ángulos y los tres lados iguales, siempre va a tener la misma forma.*

[Como respuesta a la pregunta del formador: *¿Y eso lo puede llegar a entender un niño?*] *Sí y no, yo creo que a lo mejor no, pero como que lo ve, que se acostumbra, bueno a lo mejor cuando una ya los criterios de uno y otro ya le dirá*

que... no puede ser rectángulo, entonces a lo mejor más para adelante, pero dibujarlos a ellos les da algo. Como ha dicho Jaime, esto tienes que creértelo porque yo te lo he dicho.

5. Conclusiones

Consideramos que el apartado anterior refleja cómo los tres EPM, en su discusión del vídeo de Primaria, formulan o construyen aspectos de su conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM). La discusión del vídeo por parte de los estudiantes está guiada por la percepción de dificultades de aprendizaje en los alumnos, a través de una mirada profesional al propio vídeo. De este modo, las dificultades de aprendizaje (ligadas a la construcción de KFLM –*fortalezas y dificultades*) parecen ser la puerta de entrada para reconstruir por qué piensan los alumnos de ese modo (categoría de *formas de interacción con el contenido*) y buscar posibles causas de las dificultades (en la enseñanza, en el propio contenido desde un punto de vista matemático, o en el pensamiento de los alumnos). Los EPM pasan de la constatación de la dificultad al estudio de su origen. En algunas ocasiones profundizan en cómo se aprende el contenido, de modo más general, lo que les lleva a observaciones que corresponden a teorías de aprendizaje (KFLM –*categoría formas de aprendizaje*). Asimismo, resulta llamativo cómo los EPM usan su conocimiento para determinar lo que es importante o significativo en las respuestas de los alumnos, a la vez que establecen conexiones entre las respuestas de los alumnos y su propio conocimiento, tanto del tema (KoT), como de las características de aprendizaje del tema (KFLM), desarrollando su conocimiento y poniéndolo en práctica, haciéndose partícipes, como potenciales profesionales de la enseñanza, de lo que ocurre en el vídeo. La potencialidad de la percepción de dificultades en los alumnos como punto de partida del aprendizaje del EPM, coincide con lo observado en otras investigaciones con maestros en ejercicio (Carrillo & Climent, 2008). En el caso de los maestros en ejercicio, se ha observado, frente a su rechazo de la actividad matemática como punto de partida en un proceso de desarrollo, su sensibilización a las dificultades de los alumnos, lo que resulta en que el análisis de éstas sea una buena vía de entrada en ese proceso. Es la constatación de dificultades en los alumnos lo que otorga sentido para el maestro al análisis del propio contenido matemático y su enseñanza.

En relación con los elementos del KFLM evidenciados en la discusión de los EPM, queremos destacar dos aspectos. Uno de ellos se refiere a la fuerza que parece tener para los EPM el hecho de identificar dichas dificultades en un vídeo de una clase real de Primaria. Parece que, de este modo, el conocimiento asociado es más significativo para ellos que si lo hubieran leído en un documento teórico. Por otra parte, el EPM puede profundizar en dichas dificultades y analizar las relaciones de éstas con otros aspectos del proceso de enseñanza y aprendizaje. Otro aspecto destacable es cómo los EPM parecen iniciarse en la construcción de elementos teóricos a partir del análisis de la experiencia. El caso más claro es el de la diferenciación entre imagen y definición de un concepto. Los dos aspectos destacados apoyan que el análisis de vídeos de situaciones de aula en la formación inicial puede suplir (al menos parcialmente) el papel que puede jugar la práctica en la formación del profesor en ejercicio.

En los resultados presentados se observan, además, relaciones entre el KFLM que se construye y el conocimiento de los EPM referidos a otros subdominios. Parece claro que el KFLM que se construye se apoya en un sólido KoT, especialmente en relación

con las habilidades relativas a la comprensión detallada del contenido matemático (Jacobs et al., 2010). Este hecho contrasta con el resultado respecto de estudiantes para maestro en general (en el propio estudio de Climent & Carrillo, 2002, respecto del mismo vídeo). Además, los resultados nos permiten concretar cómo se apoya la construcción de KFLM en el KoT de los EPM. Así, el conocimiento del EPM de procedimientos permite identificar qué procedimientos (esos mismos u otros relacionados) está usando el alumno y cuándo son válidos. Es el caso de la diferenciación por parte de uno de los EPM entre comparar y medir longitudes, lo que le permite reconocer que los alumnos están usando el conteo de puntos de la trama sobre segmentos para compararlos, lo que es válido si los segmentos son paralelos. En otros casos, el conocimiento de los EPM sobre propiedades de los objetos les permite percibir que hay características en las que el alumno está reparando que no son relevantes en la actividad (como la posición de las figuras). El propio KoT ha posibilitado al EPM entender qué puede llegar a comprender el alumno (es el caso de la hipótesis de un EPM sobre que los alumnos de tercer ciclo de Primaria pueden identificar los triángulos equiláteros independientemente de su posición y tamaño, por su regularidad y la semejanza entre todos ellos). Aunque no era nuestra intención diferenciar las intervenciones de los tres EPM, nos hemos encontrado con diferencias consistentes en toda la discusión, que pudieran estar relacionadas, entre otras cuestiones, con su conocimiento de los temas. Así, dos de ellos muestran un KoT más rico (por ejemplo, en los significados que evidencian asociaciones al concepto de ángulo) que parece ir unido a su mayor profundidad en el análisis de las dificultades de los alumnos (buscando causas, no sólo atribuibles a la enseñanza, a despistes o a no recordar los contenidos). Por otra parte, muchas de las observaciones de los EPM relacionadas con la enseñanza han ido de la mano de observaciones sobre dificultades de aprendizaje de los alumnos. Podemos decir que el desarrollo de elementos del KMT se ha realizado desde el KFLM. Es el caso de la valoración de recursos, actividades, y estrategias de enseñanza, y el análisis de potencialidades y limitaciones asociadas a éstos.

Los subdominios del MTSK y las categorías de análisis de éstos (especialmente del KFLM) nos han sido útiles para profundizar en el análisis del conocimiento que construyen y movilizan los EPM. En este sentido, consideramos que modelos de análisis del conocimiento del profesor de matemáticas que nos permitan detallar cómo conoce el (estudiante para) profesor y cómo se construye dicho conocimiento, contribuirán a seguir avanzando en su caracterización para poder intervenir mejor en la formación.

Para finalizar, queremos fijarnos en el papel del vídeo de Primaria y de su análisis y discusión en grupo. El vídeo seleccionado no es un vídeo preparado sobre dificultades de los alumnos, es un vídeo en el que la metodología de enseñanza da pie a que los alumnos formulen y expresen su comprensión del contenido, en el que podemos ver a alumnos discutiendo y argumentando sobre el mismo. Se acompañan, además, las producciones de los alumnos. Consideramos que este tipo de vídeo propicia el análisis del pensamiento de los alumnos, con los beneficios que le hemos atribuido en la construcción de KFLM. Además, la discusión de los EPM entre sí permite refinar sus análisis de las situaciones, profundizando en las mismas. Este hecho se puede apreciar especialmente en las unidades de información en que se observa un análisis compartido (complementario) entre Daniel y Jaime, principalmente

respecto del pensamiento de los alumnos. Coincidimos con Fortuny y Rodríguez (2012) en el potencial que tiene el análisis de video para el desarrollo de los estudiantes de una mirada profesional hacia la práctica docente, así como en la necesidad de una paulatina incorporación de dinámicas basadas en la visualización y análisis de vídeos en la formación inicial.

Agradecimientos

Financiado por el proyecto PIE (1315074), de la XVII Convocatoria de Proyectos de Innovación e Investigación para la Mejora en la Docencia Universitaria de la Universidad de Huelva y el proyecto «Caracterización del conocimiento especializado del profesorado de Matemáticas» (EDU2013-44047-P), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad. Agradecemos su colaboración al Centro de Estudios Universitarios *Cardenal Spínola* CEU.

Referencias

- Azcárate, C. (1997). Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo? *Suma*, 25, 23-30.
- Bassey, M. (1995). *Creating Education through Research*. Edimburgo: British Educational Research Association.
- Blanco, L.J., & Contreras, L.C. (2012). Conceptualizando y ejemplificando el conocimiento matemático para la enseñanza. *Unión*, 30, 101-123.
- Carrillo, J., & Climent, N. (2008). From professional tasks in collaborative environments to educational tasks in mathematics teacher education. En B. Clarke, B. Grevholm, & R. Millman (Eds.), *Tasks in primary mathematics teacher education. Purpose, use and exemplars* (pp. 215–234). Nueva York: Springer.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2014). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *CERME 8 Proceedings* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía.
- Climent, N., & Carrillo, J. (2002). Ejemplificación de una propuesta formativa: el uso de situaciones de primaria en la formación inicial. En Blanco, L.J., Contreras, L.C. (Eds.), *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: una mirada a la práctica docente* (pp. 119-180). Extremadura: Universidad de Extremadura.
- Climent, N., Romero, J.M., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M.C., & Contreras, L.C. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula? *Relime*, 15, 13-36
- Fortuny, J.M., & Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 23-37
- Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En J. Giménez, S. Llinares & V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la Educación Matemática* (pp. 143-170). Granada: Comares.
- Jacobs, V., Lamb, L., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169–202.
- Kvale, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing*. Thousand Oaks: Sage

- Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 53-70.
- Llinares, S. (2013). Professional noticing: a component of the mathematics teacher's professional practice. *Journal of Education* 1(3), 76-93.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. Londres: Routledge-Farmer.
- Montes, M., Contreras, L.C., Liñán, M.M., Muñoz-Catalán, M.C., Climent, N., y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación*, 367, 36-62.
- Ortega, T. & Pecharromás, C. (2015). Aprendizaje de contextos geométricos a través de visualizaciones. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7, 95-117
- Ponte, J.P. (2011). Using video episodes to reflect on the role of the teacher in mathematical discussions. En O. Zaslavsky & P. Sullivan (Eds.), *Constructing knowledge for Teaching Secondary Mathematics, Mathematics Teacher Education* 6 (pp. 249-261). Nueva York: Springer.
- Rojas, N., Flores, P., & Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de números racionales. *Avances de investigación en Educación Matemática*, 4, 47-64.
- Schoenfeld, A. (2010). *How we think*. New York: Routledge.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Referencias a los autores

- Nuria Climent, Universidad de Huelva (España). climent@uhu.es
- Miguel Ángel Montes, Universidad de Huelva (España). miguel.montes@ddcc.uhu.es
- Luis Carlos Contreras, Universidad de Huelva (España). lcarlos@uhu.es
- José Carrillo, Universidad de Huelva (España). carrillo@uhu.es
- M. Mar Liñán, Centro de Estudios Universitarios *Cardenal Spínola*-CEU (España). mlianan@ceuandalucia.com
- M. Cinta Muñoz-Catalán, Universidad de Sevilla (España). mcmunozcatalan@us.es
- Víctor J. Barrera, Centro de Estudios Universitarios *Cardenal Spínola*-CEU (España). vbarrera@ceuandalucia.com
- Fernando León, Universidad de Huelva (España). fleonmorales@gmail.com

Building knowledge of features of learning mathematics by analyzing videos

Nuria Climent, Universidad de Huelva (España)

Miguel Ángel Montes, Universidad de Huelva (España)

Luis Carlos Contreras, Universidad de Huelva (España)

José Carrillo, Universidad de Huelva (España)

M. Mar Liñán, Centro de Estudios Universitarios *Cardenal Spínola*-CEU (España)

M. Cinta Muñoz-Catalán, Universidad de Sevilla (España)

Víctor J. Barrera, Centro de Estudios Universitarios *Cardenal Spínola*-CEU (España)

Fernando León, Universidad de Huelva (España)

Based upon the research tradition of teacher knowledge and our own research, we have deepened in Prospective Primary Teachers' (PPT) knowledge about student learning, focusing on the knowledge gained when analyzing a real class video in which an expert teacher deals with the classification of triangles. The results of the research on PPT's knowledge of geometry, together with their difficulties and common errors, underlie our interest in finding out how they may understand their future pupils.

The framework of this research is the Mathematics Teachers' Specialised Knowledge (MTSK), which allows us to develop in a well- founded way, their skills in “observing with sense”. This descriptive, analytic framework about the Mathematics teacher's specialized knowledge focuses on teachers' knowledge from a holistic point of view, considering the different natures of both the mathematical domain, and the specific pedagogical one.

Within the Mathematical Knowledge, MTSK proposes a distinction of subdomains based on the different ways of knowing disciplinary, school and pedagogical mathematics; referring to Pedagogical Content Knowledge, it identifies subdomains where the mathematical content affects the teaching and learning of mathematics. In this paper we are focusing on one of these subdomains: *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM).

Positioning ourselves in an interpretive paradigm, we have carried out a research design characterized by the use of a real teaching video, which is the focus of a formative activity in the classroom of PPT, the selection of three informants, and a qualitative approach to the processes of collecting and analysis of data. The three informants of this research, all of them studying the last year of their initial training, were selected because of their mathematical knowledge and their willingness to carry out pedagogical reflection.

Most of the issues discussed by the PPT have been about students learning in the categories of KFLM *strengths and difficulties associated with learning* and *forms of interaction of students with content*. The results show how the informants formulate and construct aspects of their KFLM in a discussion guided by their perception of pupils' learning difficulties, through a professional view of the video. Thus, learning difficulties seem to be the gateway to recognizing pupils' way of thinking.

Finally, we have observed that the group video analysis and discussion causes the PPT to formulate and to express their understanding of the content.