Evaluación del conocimiento sobre esperanza matemática y juegos equitativos en estudiantes de bachillerato

Herminia Guerrero Treviño, I.E.S. Meléndez-Valdés, Villafranca de los Barros, Badajoz (España)

Juan Jesús Ortiz de Haro, Universidad de Granada (España)

José Miguel Contreras, Universidad de Granada (España)

Recibido el 5 de agosto de 2016; aceptado el 16 de febrero de 2017

Evaluación del conocimiento sobre esperanza matemática y juegos equitativos en estudiantes de bachillerato

Resumen

Este trabajo presenta un estudio exploratorio de evaluación de los conocimientos de estudiantes de Bachillerato sobre la esperanza matemática, que es considerada por Heitele más intuitiva que la de variable aleatoria e incluso que la de probabilidad. En el contexto de juegos equitativos analizamos las respuestas de una muestra de 63 estudiantes de Bachillerato a dos tareas con dos apartados, informando de la corrección de las respuestas y errores mostrados y comparándolos con los resultados obtenidos por otros autores.

Palabras clave: esperanza matemática; juego equitativo; bachillerato; variable aleatoria; probabilidad.

Avaliação do conhecimento sobre a expectativa e jogos justos em estudantes do ensino médio

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo exploratório realizado para avaliar o conhecimento dos estudantes do ensino médio sobre a esperança matemática, que é considerada por alguns autores mais intuitivas que variável aleatória e até mesmo a probabilidade, no contexto de jogos justos. Foram analisadas as respostas de uma amostra de 63 alunos do ensino médio de duas tarefas com duas seções, relatando as respostas corretas e erros obtidos e comparados com os resultados obtidos por outros autores.

Palavras chave: esperança; jogo justo; ensino médio; variável aleatória; probabilidade.

Assessing high school knowledge of expectation and fair games

Abstract

In this paper we present an exploratory study of high school knowledge of mathematical expectation, which is considered by some authors to be more intuitive than the random variable and even than probability, in the context of fair games. We analyzed responses from a sample of 63 high

Para citar: Guerrero Treviño, H., Ortiz de Haro, J.J. & Contreras, J.M. (2017). Evaluación del conocimiento sobre esperanza matemática y juegos equitativos en estudiantes de bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 11, 107 – 125.

school students two tasks with two parts each, report the correct answers and errors obtained and compare with results obtained by other authors.

Keywords: expectation; fair game; high school; random variable; probability

Évaluation des connaissances sur l'espérance et des jeux équitables chez les élèves du secondaire

Résumé

Cet article présente une étude exploratoire d'évaluation des connaissances des élèves du secondaire sur l'espérance mathématique, qui est considéré par certains auteurs plus intuitives que variable aléatoire et même la probabilité, dans le contexte des jeux équitables. Nous avons analysé les réponses d'un échantillon de 63 élèves du secondaire deux tâches avec deux sections, la présentation des réponses et des erreurs obtenus et comparés aux résultats obtenus par d'autres auteurs.

Paroles clés: espérance; jeu juste; école secondaire; variable aléatoire; probabilité

1. Introducción

La probabilidad se ha introducido en los diferentes niveles educativos en las últimas décadas, con la finalidad de formar el conocimiento y razonamiento probabilístico, para que el futuro ciudadano pueda desenvolverse con éxito en las situaciones inciertas (Gómez, Ortiz, & Gea, 2014). La adecuada organización de esta enseñanza requiere de estudios previos de evaluación que informen al profesorado de las capacidades y conocimientos de los estudiantes.

El objetivo del trabajo es evaluar algunos conocimientos de los alumnos de Bachillerato sobre la variable aleatoria discreta y la esperanza matemática, contenidos que se incluyen en el currículo de esta etapa educativa (MEC, 2007; MECD, 2014), donde se establece el estudio de variables aleatorias, distribución y algunos modelos de distribuciones (binomial y normal) en dos modalidades de Bachillerato. En particular, nos centramos en determinar los porcentajes de respuestas correctas en problemas relacionados con el tema y en identificar los errores cometidos por los participantes comparándolos con los resultados obtenidos por otros autores.

Aunque las investigaciones sobre razonamiento probabilístico son muy numerosas, las centradas en la comprensión de la esperanza matemática y en la idea de juego equitativo son escasas. Algunos autores, como Heitele (1975) sostienen que la idea de valor esperado es más intuitiva que la de variable aleatoria e incluso que la de probabilidad, por haber aparecido antes en la historia de la probabilidad. Para comprobar esta hipótesis, otros autores han realizado investigaciones sobre este tema con niños menores de 14 años o con futuros profesores. Sin embargo, no encontramos investigaciones realizadas con estudiantes de Bachillerato (cuya edad es intermedia entre los dos grupos anteriores).

En este trabajo presentamos un estudio exploratorio de evaluación que trata de llenar este hueco. Para ello utilizamos un cuestionario construido para esta investigación, cuyo contexto son los juegos de azar. Este contexto se elige debido a que los juegos de azar fueron el origen de la teoría de probabilidades, y es un contexto educativo importante para el aprendizaje de la probabilidad, las variables aleatorias discretas y el concepto de esperanza matemática.

En lo que sigue se describen los antecedentes del trabajo, que se dividen en dos apartados: a) los relacionados con la variable aleatoria y distribución y b) los que analizan la idea de juego equitativo. Se sigue con la descripción de la metodología y resultados, finalizando con la presentación de algunas conclusiones.

2. Antecedentes del trabajo

2.1. Variable aleatoria y distribución

Aunque son pocos los trabajos directamente relacionados con la variable aleatoria, encontramos bastantes sobre la idea de distribución. Reading y Shaughnessy (2004) en un estudio con seis estudiantes de educación primaria y otros seis de educación secundaria sugieren que este concepto es múltiple, pues se puede referir a distribución de datos (variable estadística), distribución de probabilidad (variable aleatoria) y distribución muestral (distribución del estadístico en el muestreo, que también es una variable aleatoria). Para comprender las ideas de variable aleatoria y distribución se necesitan previamente comprender las de variabilidad aleatoria, aleatoriedad, probabilidad, valor central y dispersión. Por ello no es un concepto sencillo.

Kazak y Confrey (2007) analizaron el razonamiento de cuatro niños de nueve años sobre la distribución y concluyen que el concepto engloba dos ideas: a) una visión estadística, como agregado de un conjunto de datos (distribución de la variable estadística); y b) una visión probabilística como conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio (distribución de la variable aleatoria). Sugieren la necesidad de conectar en la investigación y en el currículo escolar estos dos tipos de distribución. Es decir, los estudiantes al analizar los datos han de conectar los estadísticos de valor central y dispersión con los correspondientes parámetros en la distribución de probabilidad de la población y relacionar el modelo teórico de la variable aleatoria con el modelo empírico de la variable estadística.

Un trabajo muy completo sobre la variable aleatoria fue desarrollado por Ruiz (2014) con un grupo de 111 futuros profesores y también en una entrevista a dos estudiantes universitarios. La autora plantea problemas en que se debe usar la variable aleatoria y analiza las dificultades de comprensión de la idea de distribución o en la determinación de la distribución de probabilidad, pero no considera específicamente la idea de esperanza.

Centrándose específicamente en la distribución binomial, Sánchez, García y Medina (2014) describen los niveles de razonamiento de una muestra de 32 estudiantes de educación secundaria y 44 de Bachillerato en México a una tarea abierta. Los estudiantes perciben la aleatoriedad de la situación planteada y el concepto de distribución. Sin embargo, al pedirles construir una distribución, algunos simplemente dan un valor de la variable o bien el recorrido, mostrando algunos el sesgo de equiprobabilidad.

Respecto a la esperanza matemática, encontramos muy pocos trabajos. Schlottmann y Anderson (1994) estudiaron las intuiciones de niños de 5 a 10 años sobre la esperanza matemática, utilizando para ello dos tipos de juegos de azar con un solo jugador (el niño):

- Juegos con un solo premio, donde el niño puede obtener o no un premio en caso de resultar uno entre los dos sucesos de un experimento aleatorio;
- Juegos con dos premios, donde el niño siempre obtiene un premio, pero el premio tiene diferente valor, según el resultado de un experimento aleatorio con dos resultados posibles.

Los autores concluyen que, incluso los niños más pequeños, tienen una intuición correcta sobre la idea de esperanza matemática, y tienen en cuenta tanto la probabilidad de ganar el juego, como el valor del premio en caso de ganar para decidir si un juego es equitativo. Sin embargo, tienen dificultades para transformar un juego no equitativo en equitativo; por ejemplo, al calcular las probabilidades de ganar siguen, con frecuencia, estrategias aditivas en lugar de multiplicativas.

2.2. Comprensión del juego equitativo

A pesar de ser los juegos de azar uno de los principales contextos en los que los niños pueden comprender las características de las situaciones aleatorias, las investigaciones sobre su comprensión son pocas y han sido realizadas con niños o con futuros profesores.

Watson y Collis (1994) realizaron uno de los primeros estudios sobre comprensión del juego equitativo por niños, analizando las estrategias que utilizaron un grupo de niños australianos entre 8 y 10 años para decidir si un juego era o no equitativo. Los autores observan cómo las creencias de los niños influyen en la tarea, pues al jugar con un dado, aproximadamente la mitad de los alumnos creían que algunos números tenían más posibilidad que otros. Otros niños mostraron concepciones antropomórficas (pensaban que los dados podrían tener voluntad propia y favorecer a uno u otro jugador) o se guiaron por las características físicas de los dados (por ejemplo, el color) o sienten la necesidad de experimentación para decidir sobre la equitatividad de los dados.

Lidster, Watson, Collis y Pereira-Mendoza (1996) analizaron la influencia de las experiencias de niños de entre 12 y 14 años fuera de la escuela sobre sus ideas de equitatividad y probabilidad. Para ello, realizaron entrevistas a un grupo de niños, proponiéndoles algunos juegos de azar, estudiando sus representaciones gráficas (para llegar a la solución), sus interpretaciones de los resultados y sus predicciones. Lidster et al. (1996) describen otros dos estudios con alumnos de 8 a 14 años en los que trataron de relacionar las experiencias dentro y fuera de la escuela con el desarrollo de la noción de equitatividad. Los autores sugieren que la noción de equitatividad y sesgo se desarrolla antes del comienzo de la escuela.

Vahey, Enyedy y Gifford (1997) analizaron el razonamiento probabilístico de estudiantes de secundaria al estudiar la equitatividad de algunos juegos de azar en un entorno de aprendizaje basado en la tecnología. Aunque los estudiantes emplearon el razonamiento probabilístico para resolver la tarea, también mostraron sesgos de razonamiento, como la representatividad, que consiste en considerar el parecido de una muestra con la población, sin tener en cuenta el tamaño de la muestra.

Cañizares, Batanero, Serrano y Ortiz (1999) estudiaron la influencia de la edad y rendimiento matemático en la idea de juego equitativo. Para ello analizaron las respuestas a dos problemas, tomados respectivamente de Green (1983) y Fischbein y Gazit (1984), en muestras de niños entre 10 y 14 años, complementadas con entrevistas. La mayoría de los niños mostraron comprender qué es un juego equitativo, aunque algunos no diferenciaban sucesos equiprobables y no equiprobables. Algunos niños se basaron en factores externos, 'hacer trampas', o pedir jugar un número alto de partidas para considerar el juego equitativo, ignorando la independencia de cada partida elemental. Por otro lado, la mayoría fue capaz de establecer los premios que corresponden a dos jugadores para convertir un juego no equitativo en otro equitativo. Sin embargo, algunos consideraron que, aunque al modificar algún premio se igualen las ganancias, el juego sigue siendo no equitativo si en una sola partida las ganancias pueden ser diferentes.

Debido a la reciente incorporación del estudio de la probabilidad en la Educación Primaria, otras investigaciones se han centrado en analizar los conocimientos de los futuros profesores para asegurar su competencia para enseñar probabilidad, algunas de las cuáles se han centrado en su comprensión del juego equitativo.

Entre ellas encontramos la de Azcárate (1995), quien propuso a 57 profesores tres ítems sobre juegos equitativos en el contexto de lanzamiento de dos dados. Los participantes mostraron dificultad para identificar los juegos equitativos y presentaron errores al calcular la probabilidad de los sucesos involucrados en el juego. Sus argumentos para decidir si el juego es equitativo se basaron en la equiprobabilidad de los resultados (en este caso lo consideran equitativo), reglas aritméticas o argumentación combinatoria.

Como parte de un estudio más amplio sobre el conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad, Ortiz, Batanero y Contreras (2012) analizaron el conocimiento sobre el juego equitativo en 167 futuros profesores. La mayoría de los participantes fue capaz de diferenciar juegos equitativos y no equitativos y utilizaron estrategias correctas para comparar las probabilidades de ganar los diferentes jugadores, aunque hay errores de razonamiento proporcional, respuestas incompletas o no respuestas.

En un estudio también más amplio Mohamed (2012) evalúa los conocimientos de 283 futuros profesores de Educación Primaria en relación a la idea de juego equitativo a través de sus respuestas a una tarea abierta. En este estudio, pocos futuros profesores aplican correctamente la idea de juego equitativo para resolver el problema. El autor detecta errores en cálculos de probabilidad, falta de capacidad combinatoria, además de que la cuarta parte de los participantes no contestara al problema.

En resumen, las investigaciones relacionadas con la nuestra se han llevado a cabo con estudiantes de educación primaria o futuros profesores y en ambos casos se muestran dificultades con las ideas de juego equitativo o distribución. Son además muy pocas las centradas específicamente en la idea de esperanza por lo que nuestro trabajo puede aportar nueva información en este campo. Resaltamos además el hecho de que en el cálculo de la esperanza matemática interviene la probabilidad condicional, concepto que es difícil de aplicar para los estudiantes, como lo muestran Borovcnik (2012) y Fernandes, Ferreira y Contreras (2013).

3. Metodología

Para la investigación se han seleccionado tres cursos de bachillerato de un instituto público de enseñanza secundaria y formación profesional de la provincia de Cádiz. El centro se ubica en una localidad cuya economía se basa actualmente en la agricultura y el turismo, como ocurre en otras zonas de Andalucía. Respecto a otros centros donde se imparte la enseñanza secundaria obligatoria, en general, la situación económica, se puede considerar media.

Para nuestro estudio se seleccionaron tres grupos de Bachillerato, con las siguientes características y tamaño: 30 alumnos de primer curso de la modalidad de Ciencias Sociales y 33 de Segundo curso, 9 de ellos de Ciencias Sociales y el resto del Bachillerato Científico-Tecnológico.

Los alumnos de primer curso no habían estudiado ningún contenido de probabilidad cuando se les propuso el cuestionario, por lo que parten de lo aprendido en los cursos de enseñanza obligatoria secundaria o en educación primaria. Por otro lado, los alumnos de segundo curso tampoco la habían estudiado en dicho curso, por lo que parten de lo aprendido en primero de bachillerato. Se trata, por tanto, de una muestra intencional y nuestro estudio es exploratorio, por lo que no se pretende extrapolar a otros contextos.

El cuestionario dado a los estudiantes, que se presenta en la Figura 1, se compuso de dos problemas, cada uno de ellos con dos apartados abiertos, que los estudiantes debían responder individualmente y por escrito. El contexto en los dos casos es el de un juego no equitativo; más concretamente se tratan de juegos en la primera categoría definida por Schlottmann y Anderson (1994).

Problemas semejantes a los propuestos (aunque en contextos de dados) han sido planteados por Azcárate (1995) y Batanero, Gómez, Contreras y Díaz (2015) a futuros profesores. Los autores indican la dificultad que presentan algunos sujetos en su estudio al determinar la cantidad en un juego equitativo; pero sus problemas son más complejos que los planteados en nuestro trabajo, al involucrar la suma o producto de dos dados.

Problema 1. Ana y María juegan lanzando dos monedas al aire y observan el resultado. Ana gana 1 € si aparecen una o dos caras y María gana 1 € si no aparece ninguna cara.

a. Si jugaras ¿Prefieres ser Ana o María? ¿Por qué?

b. Un juego es justo cuando no favorece a ningún participante, es decir, ninguno tiene más ventaja que el otro. ¿Qué cantidad debería ganar María para que el juego fuera justo?

Problema 2. Miguel y Luis juegan a un juego con un dado ordinario (como sabes cada dado está numerado del 1 al 6). Miguel gana un euro si el número obtenido es 1, 2, 3, o 4. Si el número es 5 o 6 Luis gana tres euros.

a. ¿Tiene alguno de los chicos ventaja en el juego? ¿Por qué?

b. ¿Cuánto piensas que ganará cada chico si juegan 60 veces al juego? (aproximadamente)

Figura 1. Cuestionario utilizado

3.1. Análisis a priori del primer problema

El primer problema presenta una situación de experimento compuesto de dos experimentos simples idénticos, consistente en el lanzamiento de dos monedas, cuyo espacio maestral compuesto es $\{CC, CX, XC, XX\}$ siendo C el suceso obtener cara y X el suceso consistente en obtener cruz. Puesto que los experimentos simples (lanzamiento de cada moneda) son independientes, la probabilidad de cada uno de los sucesos en el experimento compuesto se obtiene por la regla del producto y es por tanto igual a ¼.

Si definimos los sucesos 'A'= gana Ana y 'M'= gana María, las probabilidades de estos sucesos son:

$$P(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \quad P(M)=\frac{1}{4}$$

En consecuencia, Ana tiene ventaja, por lo que la respuesta correcta a la primera parte sería indicar que se prefiere ser Ana, pues su probabilidad de ganar es tres veces mayor que la de María.

En la segunda pregunta se debe usar la propiedad que establece que en un juego equitativo o justo la probabilidad de ganar ha de ser inversamente proporcional al premio. Formalmente, si X es la variable aleatoria que tiene como valores las ganancias de Ana, y definimos m = ganancia de María, calculando $E(X)=\frac{3}{4}-m\frac{1}{4}$, el juego es justo o equitativo si $E(X)=0$, o lo que es equivalente, si María recibe 3€, cada vez que gane. Se puede llegar a la misma conclusión con un razonamiento intuitivo, pensando que, de 4 jugadas, 3 veces ganará Ana (ganancia 3€) y María 1 vez (por lo que, cuando gane, debe recibir 3€ para que sea justo).

3.2. Análisis a priori del segundo problema

Este problema está adaptado de otro utilizado por Green (1983) y Cañizares et al. (1999) en sus investigaciones con niños y por Mohamed (2012) en su estudio con futuros profesores de educación primaria. En todos estos trabajos se indica que, aunque el juego se reconoce como no equitativo, algunos sujetos tienen dificultad en establecer el valor del premio para hacerlo equitativo. Nosotros hemos cambiado el enunciado (que sólo tenía un caso favorable a Luis) y lo hemos transformado en un juego del segundo tipo descrito por Schlottmann y Anderson (1994). Además, se ha añadido la pregunta b para analizar la comprensión de la esperanza matemática (en vez de pedir por la cantidad necesaria para hacer el juego equitativo).

Este problema es similar al anterior pero ya en el enunciado, queda indicado que las ganancias de los dos jugadores son diferentes. Definiendo la variable aleatoria X=ganancia de Miguel, calculamos su esperanza matemática, sabiendo que la probabilidad de que gane Miguel es 4/6 (aplicando la regla de la suma) y la de que gane Luis 2/6 (aplicando la regla de la suma o la del suceso contrario):

$$E(X)=\frac{4}{6}-3\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

Al ser esta esperanza negativa, Miguel tiene desventaja. En la segunda pregunta aparecen nuevas variables aleatorias, que son las ganancias de ambos jugadores en 60 partidas. Si definimos X las ganancias de Miguel e Y las ganancias de Luis, sus esperanzas matemáticas son:

$$E(X)=60\frac{4}{6}=40 \qquad E(Y)=60\frac{3.2}{6}=60$$

Se puede llegar a la misma conclusión con un razonamiento intuitivo, pensando que en 60 partidas Miguel ganará 40 partidas, por tanto 40 € y Luis ganará 20 partidas, por tanto 60€. Observamos que este apartado permite poner en correspondencia la distribución de probabilidad y la distribución esperada de datos, según recomiendan Reading y Shaughnessy (2004).

4. Resultados

Una vez recogidos los cuestionarios, se analizaron los resultados. Para cada uno de los ítems y cada uno de los apartados se consideraron tres tipos de respuestas: correctas, parcialmente correctas, e incorrectas o no contestadas. A continuación, analizamos en primer lugar los resultados en cada problema y luego se hace una síntesis por problema. Comparamos los estudiantes de primero y segundo curso.

4.1. Cálculo de la probabilidad compuesta

Para resolver el primer apartado del Problema 1 los estudiantes han de calcular la probabilidad de ganar cada jugador en el experimento compuesto. La respuesta correcta es Ana, pues tiene una probabilidad de ¾ frente a la probabilidad de María (1/4). No consideramos respuestas parcialmente correctas, puesto que todos los estudiantes responden esta pregunta que resultó muy sencilla. La Figura 2 muestra los resultados obtenidos por curso. Las soluciones correctas son mayoría en los dos grupos, mejorando en el segundo curso. También en la investigación de Batanero et al. (2015) obtuvo un 90% de respuestas correctas en futuros profesores al pedirles identificar si un juego era equitativo. Azcárate (1995) y Mohamed (2012) obtienen un 69% de respuestas correctas en problemas muy similares.

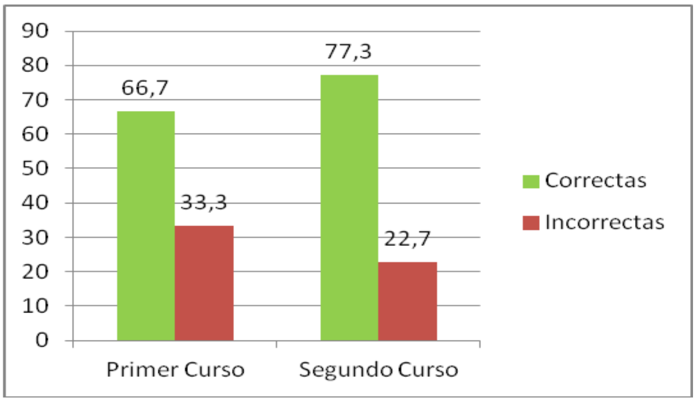

Figura 2. Porcentaje de respuestas al ítem 1-a por curso

Respecto a las respuestas incorrectas; las más frecuentes son las siguientes:

- *E1. Sesgo de equiprobabilidad.* Algunos estudiantes creen que ambos participantes tienen la misma probabilidad de ganar el juego, no teniendo en cuenta las probabilidades de cada jugador. Por tanto, caen en el sesgo de equiprobabilidad descrito por Lecoutre (1992), que consiste en suponer que todos los sucesos de un experimento aleatorio son equiprobables. Un ejemplo de este tipo respuesta es “No me importaría ser ni una ni otra ya que las dos tienen las mismas posibilidades”. Este sesgo aparece en el estudio de Azcárate (1995) en alrededor del 5% de sujetos y en Batanero et al. (2015) sólo en el 8,3% de los futuros profesores de su muestra, por lo que en nuestro caso es más frecuente.
- *E2. Cálculo incorrecto de probabilidades*. Solo contemplan tres sucesos ‘CC’, ‘CX’ y ‘XX’ (no contemplan el suceso ‘XC’), asignando a cada uno una probabilidad de 1/3. Un ejemplo de respuesta es “Ana, porque tiene 2/3 de probabilidad y María solo un 1/3”. En estas respuestas aparece el error de orden (no tener en cuenta el orden en las monedas) que es muy frecuente al resolver problemas de probabilidad.

La Figura 3 muestra la distribución de los tipos de errores en ambos cursos. Observamos que, mientras en el primer curso el error más frecuente es *E1. Sesgo de equiprobabilidad,* en segundo curso el más frecuente es *E2. Cálculo incorrecto de probabilidades,* porque los estudiantes de segundo curso han recibido más instrucción que los de primero, relativa a espacio muestral, álgebra de sucesos y cálculo de probabilidades. Ellos aplican estos conocimientos, pero a veces cometen el error de orden.

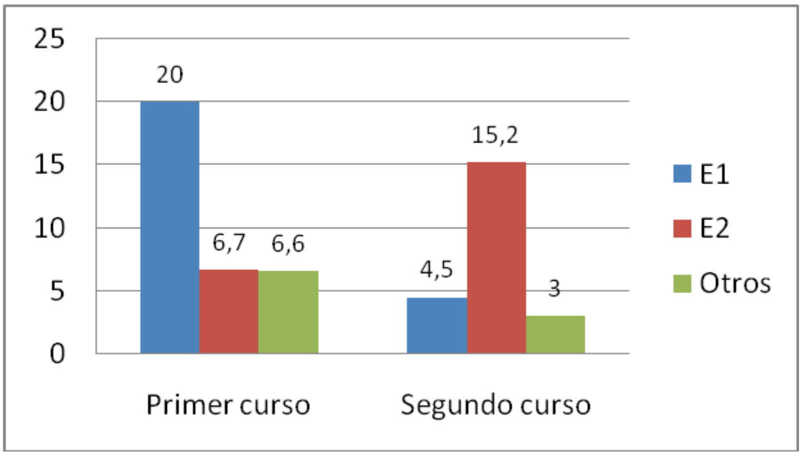

Figura 3. Porcentaje de tipos de error (respecto al total de estudiantes) por curso en el ítem 1a

4.2. Cálculo del valor esperado para transformar el juego en equitativo

Puesto que la probabilidad de ganar Ana es tres veces las de María, para que el juego sea equitativo la respuesta correcta a la cantidad de dinero a ganar por María es *"3€"*. Consideramos parcialmente correcta la respuesta de un estudiante "al menos 3€", porque incluye el cálculo del número 3; este tipo de respuestas también aparece en un problema similar en Batanero et al. (2015) quien obtiene un 50% de soluciones correctas al estimar el valor que transforma un juego en equitativo. Mohamed (2012) sólo obtiene el 11% de respuestas correctas en una pregunta similar.

La Figura 4 muestra los resultados obtenidos por curso, donde observamos el elevado porcentaje de respuestas incorrectas en ambos cursos, lo que suponemos se debe a que ningún estudiante ha recibido instrucción relativa al concepto esperanza matemática. Aquellos que responden correctamente, lo hacen por el razonamiento intuitivo que habíamos previsto. Respecto a las respuestas incorrectas; las más frecuentes son las siguientes:

- *E1. Sesgo de equiprobabilidad.* Algunos estudiantes fallan la pregunta al considerar que ambos participantes en el juego descrito en el ítem tienen la misma probabilidad de ganar. Estos estudiantes no intentaron calcular la probabilidad de ganar cada jugador y compararlas; simplemente, piensan que, al ser un contexto de azar, cualquiera de los dos jugadores puede resultar ganador. No comprenden que, si se repite muchas veces el juego, uno de ellos es favorecido, lo que indica que no se aprecia la idea de valor esperado. Un ejemplo de este tipo respuesta es "1€ porque las dos tienen la misma posibilidad". Este razonamiento no aparece en el trabajo de Batanero et al. (2015) pero sí en los niños del estudio de Cañizares et al. (1999).

- *E2. No calculan el valor del premio para transformar el juego en equitativo.* Son estudiantes que perciben que las probabilidades de ganar de los dos jugadores son diferentes, pero, no son capaces de determinar la ganancia justa para trasformar el juego en equitativo. En el siguiente ejemplo, se supone que es suficiente que el segundo jugador gane el doble que el primero: "Debe ganar 2€ en vez de uno, porque tiene menos posibilidades". En total en la investigación de Batanero et al. (2015) un 33,7% de futuros profesores dan esta respuesta y proporcionan valores incorrectos del premio en un problema parecido; se debe a la dificultad para aplicar la proporcionalidad inversa.
- *E3. No considerar necesario cambiar el premio para que el juego sea equitativo.* Los estudiantes no modifican las ganancias, sino que cambian las leyes del juego intentando que así sea equitativo; es decir, en vez de igualar el valor esperado del premio en ambos jugadores, tratan de igualar las probabilidades de ganar. Un ejemplo de respuesta es "Debe ganar 1€ si salen 1 o 2 cruces para que sea justo". Este tipo de respuestas aparece en los niños del trabajo de Cañizares et al. (1999).
- *E4. Suponer que se le pregunta por el resultado favorable al jugador con menos probabilidad.* Un ejemplo de respuesta es "Que no aparezca ninguna cara obviamente". Son estudiantes que no han entendido la pregunta planteada.

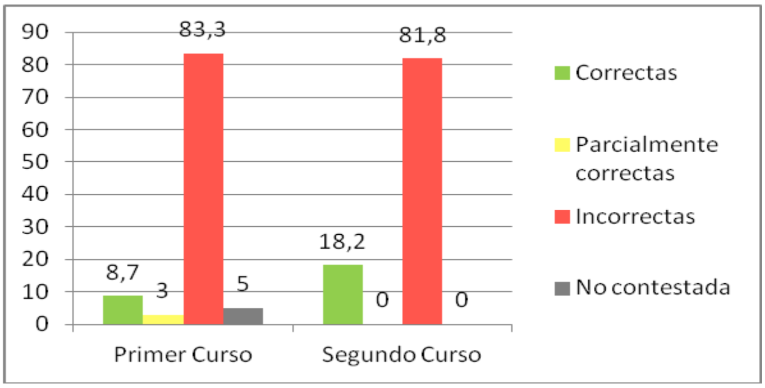

Figura 4. Porcentaje de respuestas al ítem 1-b por curso

La Figura 5 muestra la distribución de los tipos de errores en ambos cursos. Observamos que el error más frecuente en ambos cursos es *E2. No calculan el valor del premio para transformar el juego en equitativo.* Los estudiantes saben que el segundo jugador debe ganar más, pero no calculan cuánto más y dan valores incorrectos del premio. Pensamos que ello es debido a la dificultad del razonamiento proporcional, pues para responder a la pregunta se debe aplicar la proporcionalidad inversa.

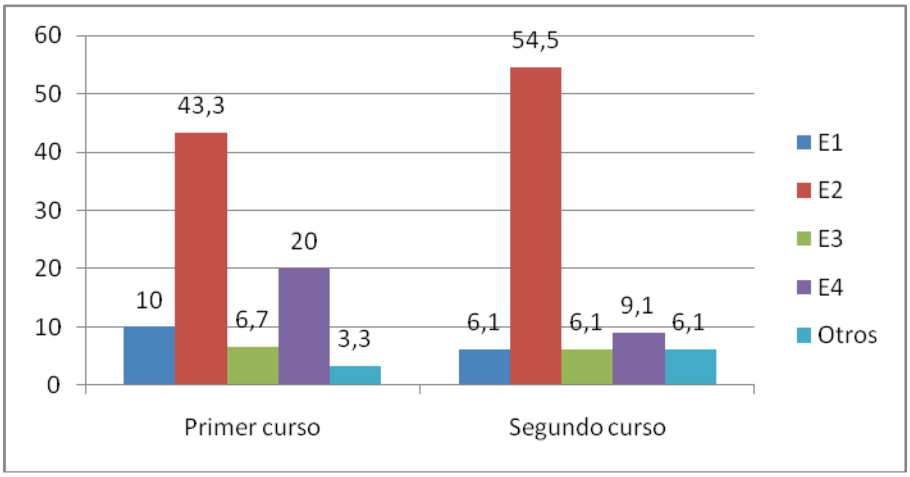

Figura 5. Porcentaje de tipos de error (respecto al total de estudiantes) en los dos cursos ítem 1-b

4.3. Cálculo de ganancia esperada por cada jugador

Proponemos en esta parte otro problema sobre juego equitativo, pero esta vez el experimento es simple y el estudiante ha de comparar dos sucesos compuestos de dicho experimento. Tanto Green (1983) como Cañizares et al. (1999) proponen uno parecido, aunque algo más sencillo que el nuestro. En nuestro caso también han de aplicar el razonamiento proporcional y la idea de esperanza matemática. Consideramos como respuesta correcta *"*Sí, Luis tiene ventaja porque, aunque la probabilidad de ganar de Luis es menor que la de Miguel (*P(L)*=2/6 y *P(M)*=4/6) en 6 partidas, Luis ganará 6€ y Miguel 4€". Consideramos como respuestas parcialmente correctas las siguientes:

- *"*Ninguno tiene ventaja, porque, aunque Miguel tenga más posibilidades de ganar que Luis (el estudiante calcula correctamente ambas probabilidades) gana menos dinero que Luis, lo cual es justo". La consideramos parcialmente correcta porque calcula correctamente las probabilidades y aplica el concepto esperanza ("Miguel gana menos que Luis"), aunque no la calcula.
- *"*Sí, Luis porque tiene menor probabilidad que Miguel (calcula correctamente ambas probabilidades) pero gana más euros (no calcula cuánto más)". La consideramos parcialmente correcta porque calcula correctamente las probabilidades y aplica el concepto esperanza ("Luis gana más que Miguel"), aunque no la calcula.

Todos los estudiantes responden. La Figura 6 muestra los resultados obtenidos por curso, donde observamos en ambos cursos el elevado número de respuestas incorrectas. La proporción de respuestas correctas es en este caso mucho menor que en los estudios de Green y Cañizares et al. (50% en su caso), pero el ítem propuesto por ellos era más sencillo, porque uno de los jugadores solo tiene una posibilidad de ganar y se da el valor del premio para el otro (1 moneda). Ahora los dos sucesos que se comparan son compuestos y se da el premio de los dos jugadores.

Por tanto, la esperanza matemática, para el caso en que implique sucesos compuestos pudiera ser no tan intuitiva como sugiere Heitele (1975) pues el cálculo de probabilidades y de la esperanza en el problema es muy sencillo. Aumenta algo la proporción de correctas en segundo curso, pero poco.

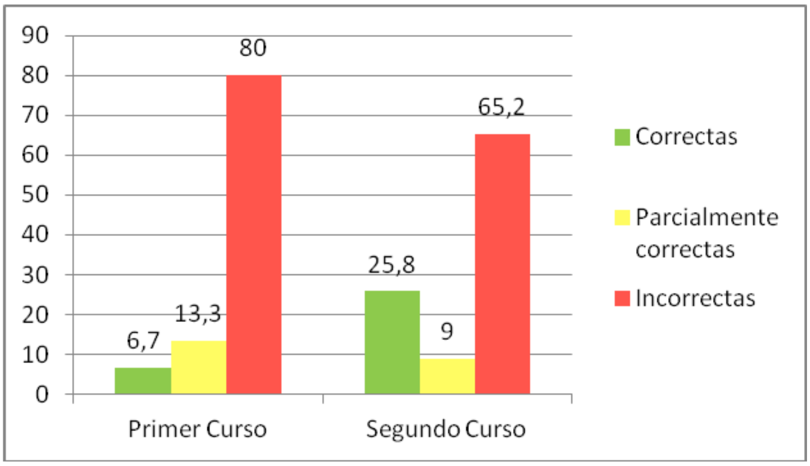

Figura 6. Porcentaje de respuestas al ítem 2-a por curso

Respecto a las respuestas incorrectas; las más frecuentes son las siguientes:

- *E1. Sesgo de equiprobabilidad.* Algunos estudiantes creen que ningún jugador tiene ventaja porque tienen la misma probabilidad; por tanto, calculan incorrectamente las probabilidades de un suceso compuesto. Un ejemplo de esta categoría de respuesta es la siguiente “Ninguno tiene ventaja porque tienen la misma posibilidad de que salgan unos números como otros”. En este caso no tenemos claro si el alumno comprende la idea de esperanza matemática, puesto que el sesgo de equiprobabilidad interfiere.
- *E2. No realizar correctamente el cálculo del valor esperado en el juego.* Los estudiantes incluidos en esta categoría no calculan las probabilidades, aunque aseguran que el primer jugador tiene mayor probabilidad de ganar. Muestran dificultad para aplicar el razonamiento proporcional inverso, necesitado para el cálculo del valor esperado. Un ejemplo de esta clase de respuesta es “No tiene ventaja ninguna porque, aunque Miguel tiene más probabilidad de ganar, Luis gana más”. El estudiante intuye la probabilidad de cada jugador, pero no llega a aplicar la idea de valor esperado.
- *E3. Cifra la ventaja sólo en las probabilidades sin calcular el valor esperado.* Solo consideran la probabilidad de ganar, por tanto, el alumno no utiliza la idea de valor esperado para decidir si el juego es equitativo. Un ejemplo de respuesta es “Miguel tiene ventaja porque tiene más posibilidades de ganar”.

La Figura 7 muestra la distribución de los tipos de errores en ambos cursos. Observamos que, mientras en primer curso se produce el error *E1. Sesgo de equiprobabilidad*, en segundo curso este sesgo no aparece. Todos los estudiantes (ninguno ha dejado la pregunta sin responder) saben que la probabilidad de ganar del primero es mayor que la del segundo, aunque algunos no sean capaces de calcularla correctamente. En ambos cursos el error más frecuente es E3, consistente en no considerar la ganancia a la hora de calcular el valor esperado, es decir, solo tienen en cuenta la probabilidad a la hora de decidir si el juego es equitativo, olvidando la esperanza matemática.

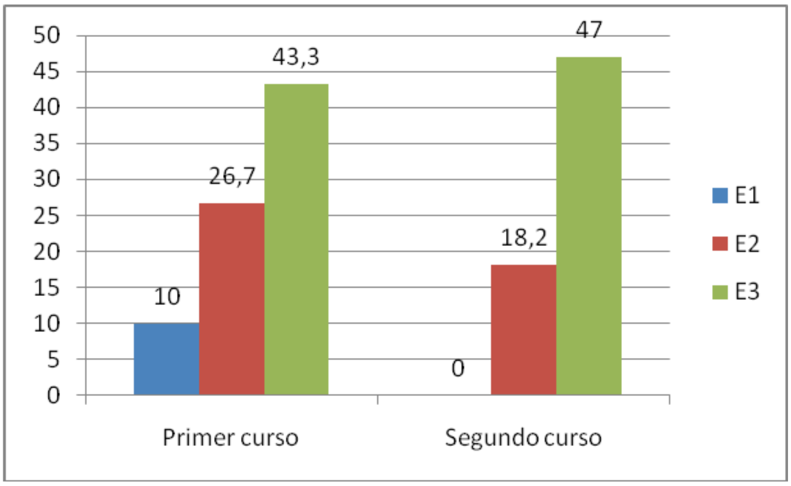

Figura 7. Porcentaje de tipos de error (respecto al total de estudiantes) en los dos cursos ítem 2-a

4.4. Frecuencia esperada de un suceso

Se trata ahora de ver cuánto ganará cada jugador si se repite el juego. La respuesta correcta es "Miguel ganará 40€ y Luis 60€". No consideramos respuestas parcialmente correctas. La Figura 8 muestra los resultados obtenidos por curso (porcentajes de respuestas correctas, incorrectas y no contestadas). Se obtiene un gran número de respuestas incorrectas, de lo que deducimos que los estudiantes no logran poner en correspondencia las distribuciones de probabilidad y estadística, en contra de lo esperado por Reading y Shaughnessy (2004).

Aunque son minoría, aumentan las respuestas correctas respecto al primer apartado. Interpretamos que parte de los estudiantes interpretó "tener ventaja" en la primera parte como "tener más probabilidad".

Respecto a las respuestas incorrectas; las más frecuentes son las siguientes:

- *E1. Sesgo de equiprobabilidad.* Algunos estudiantes creen que ambos ganarán lo mismo porque tienen la misma probabilidad de ganar. Un ejemplo de este tipo respuesta es "Ganarán aproximadamente lo mismo porque es un juego de suerte". Otros consideran que ambos tienen la misma probabilidad de ganar, pero consideran la ganancia. Un ejemplo de este tipo de respuesta es "Miguel ganaría 30€ y Luis 30*3=90€ porque tienen el 50% de posibilidades de ganar".
- *E8. No considerar la ganancia a la hora de calcular el valor esperado*. Solo consideran la probabilidad de ganar y asumen que, si juegan 60 veces, deben repartir 60€ (60 por la ganancia del primer jugador) entre ambos según su probabilidad de ganar. "Miguel ganará 40€ y Luis ganará 20€".

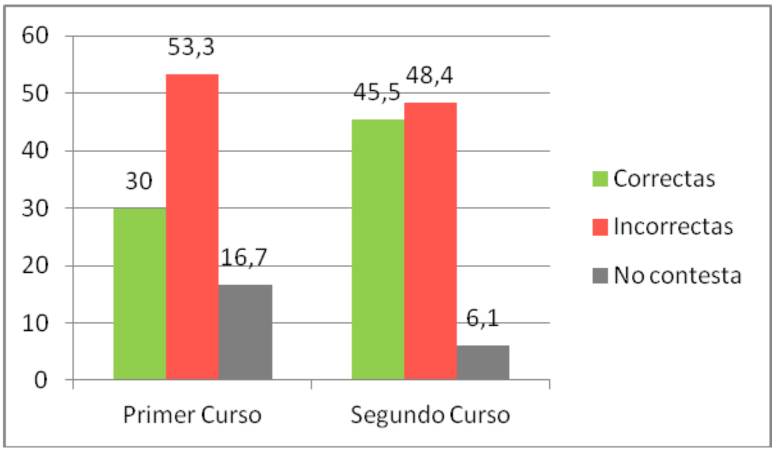

Figura 8. Porcentaje de respuestas al ítem 2-b por curso

La Figura 9 muestra la distribución de los tipos de errores en ambos cursos. Observamos que, al igual que en el ítem anterior, mientras en el primer curso se produce el error *E1*. *Sesgo de equiprobabilidad,* en segundo todos los estudiantes saben que la probabilidad de ganar son distintas y asumen que las ganancias también. En ambos cursos el error más frecuente es *E2*. *No considerar la ganancia a la hora de calcular el valor esperado,* es decir, solo tienen en cuenta la probabilidad a la hora de medir la ventaja, olvidando la ganancia que obtienen en cada partida.

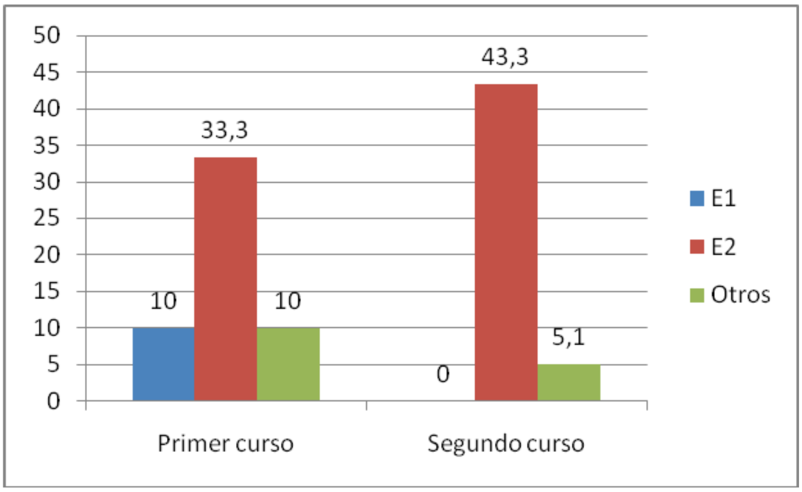

Figura 9. Porcentaje de tipos de error (respecto al total de estudiantes) en los dos cursos ítem 2-b

4.5. Síntesis de resultados

En la Figura 10 comparamos los porcentajes de respuestas correctas en cada ítem y apartados para cada curso para obtener una síntesis de resultados. En primer lugar, observamos que siempre hay mejores resultados en el segundo curso, de modo que se observa mejor razonamiento en estos estudiantes, de mayor edad y que recibieron instrucción de contenidos de probabilidad en el primer curso.

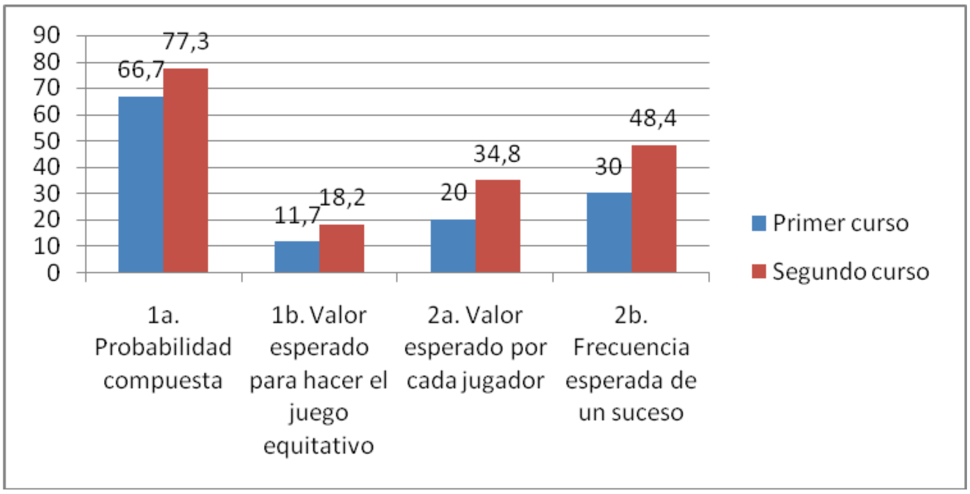

Figura 10. Porcentaje de respuestas correctas y parcialmente correctas de los dos apartados de los ítems 1 y 2 por curso

Hay una gran diferencia de dificultad en las preguntas, siendo la más sencilla el primer apartado del ítem 1 en que los alumnos deben calcular la probabilidad en un experimento compuesto y deducir qué jugador lleva ventaja. Esta competencia está bien adquirida.

Son mucho más difíciles el resto de preguntas, lo que muestra que el concepto de valor esperado y esperanza matemática no es tan simple como lo supuesto por Heitele (1975) y sería necesario poner atención en este concepto. Lo más difícil en ambos cursos es la respuesta al segundo apartado del primer ítem que muestra la dificultad de los estudiantes con el razonamiento proporcional inverso.

5. Reflexiones finales

A pesar de lo limitado de la muestra, nuestro trabajo proporciona nueva información sobre la competencia que los estudiantes participantes muestran para resolver problemas relacionados con la idea de esperanza matemática en el contexto de juego equitativo. También proporciona información detallada sobre los tipos de errores que se producen.

Los estudiantes son capaces de identificar que un juego no es equitativo cuando se da la ganancia de un jugador (ítem 1a) y calculan bien las probabilidades de cada jugador. Les resulta bastante más complicado analizar el juego cuando el jugador que tiene más probabilidad recibe menor premio (ítem 2a). Igualmente tienen gran dificultad en calcular el valor esperado para transformar un juego en equitativo, porque dicho cálculo involucra la proporcionalidad inversa (ítems 1b y 2b). Estos resultados llaman la atención hacia la necesidad de reforzar la intuición y competencia en la resolución de problemas que involucren la idea de esperanza matemática, siendo este concepto clave para la toma de decisiones en situaciones inciertas (Ruiz, 2014). Además, este concepto es especialmente útil para analizar con los estudiantes las relaciones entre los significados clásico, frecuencial y subjetivo de la probabilidad, especialmente en el contexto del juego equitativo, como muestran Batanero y Borovcnik (2016).

En todos los ítems el porcentaje de respuestas correctas en segundo curso es superior a primero, debido a la instrucción recibida en el primer curso de ambas modalidades de bachillerato, que incluye el cálculo de probabilidades.

Respecto a los recursos utilizados por los estudiantes, fue habitual el uso de la notación de suceso y espacio muestral y el diagrama de árbol con los que están familiarizados por la instrucción. Todos los estudiantes utilizaron notación fraccionaria (por ejemplo, ¼) para expresar la probabilidad, en vez de notación decimal (0,25).

Respecto a los errores observados más frecuentes, destacamos el *sesgo de equiprobabilidad* (que también apareció en un 5% de futuros profesores en la investigación de Batanero et al. (2015) que aparece con frecuencia en todos los ítems, especialmente en los estudiantes de primer curso. Esta alta presencia, plantea el déficit de comprensión de algunos estudiantes de las probabilidades a priori que tenemos en ciertos experimentos aleatorios. Al disminuir el error en segundo curso (e incluso desaparecer en algunos ítems), podemos considerar que la instrucción recibida en primer curso ha sido, para muchos estudiantes, efectiva.

En el cálculo de las ganancias en el ítem 1-b, obtuvimos en nuestros estudiantes porcentajes de error superiores al obtenido por Batanero et al. (2015) donde un 33,7% de futuros profesores encuentra dificultad para aplicar la proporcionalidad inversa y proporciona valores incorrectos del premio en un problema parecido. Dado que no se trata de un problema de razonamiento probabilístico, sino de falta de razonamiento proporcional, podemos considerar que tal dificultad debiera tratarse de corregir en los estudiantes de bachillerato, pues afectará al aprendizaje de otros conceptos.

Finalizamos resaltando la necesidad de continuar la investigación sobre razonamiento probabilístico de los estudiantes de Bachillerato, respecto al cual se encuentran pocos antecedentes.

Agradecimientos

Proyecto EDU2013-41141-P (MEC), y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Cádiz.

Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Rotterdam: Sense Publishers.

Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J. M., & Díaz, C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: un estudio exploratorio. *Praxis educativa 10*(1). DOI: 10.5212/PraxEduc.v.10i1.0001. Recuperado de: http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa/article/view/6007/4343.

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática 2,* 5-27.

Cañizares, M. J., Batanero, C., Serrano, L., & Ortiz, J. J. (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. *Números*, 37, 37-56.

Fernandes, J. A, Ferreira, P., & Contreras, J. M. (2013). Ideias intuitivas de alunos do 9º ano em probabilidade condicionada e probabilidade conjunta. *Avances de Investigación en Educación Matemática 4,* 5-26.

Fischbein, E., & Gazit, (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics, 15*(1), 1-24.

Gómez, E., Ortiz, J. J., & Gea, M. M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en libros de texto españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática 5,* 49-71.

Green, D. R (1983). A survey of probabilistic concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. En D.R. Grey, P. Holmes, & G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Vol.2, pp. 766-783). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics, 6,* 187-205.

Kazak, S., & Confrey, J. (2007*).* Elementary school students' intuitive conceptions of random distribution. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 2*(3). Recuperado de: www.iejme.com

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics, 23,* 557-568.

Lidster, S. T., Watson, J. M., Collis, K .F., & Pereira-Mendoza, L. (1996). The relationship of the concept of fair to the construction of probabilistic understanding. En P.C. Clarkson (Ed.), *Technology in Mathematics Education, Proceedings of the 19th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Melbourne* (pp. 352-359). Sydney: MERGA

Ministerio de Educación y Ciencia, MEC (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. Madrid: Autor.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2014). *Real Decreto 1105/2014 de currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

Mohamed, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Ortiz, J., Batanero, C., & Contreras, J.M. (2012). Conocimiento de profesores en formación sobre la idea de juego equitativo. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, México*, *15*(1), 63-91.

Reading, C., & Shaughnessy, J. M. (2004). *Reasoning about variation*. En J. Garfield y D. Ben-Zvi (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 201-226). Dordrecht: Kluwer.

Ruiz, B. (2014). *Análisis epistemológico de la variable aleatoria y comprensión de objetos matemáticos relacionados por estudiantes universitarios.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Schlottmann, A., & Anderson, N. H. (1994*). Children's judgements of expected value.* Developmental Psychology, *30*(1), 56-66.

Sánchez, E. García, J., & Medina, M. (2014). Niveles de razonamiento y abstracción de estudiantes de secundaria y bachillerato en una situación-problema de probabilidad. *Avances de Investigación en Educación Matemática 6,* 5-23.

Vahey, P., Enyedy, N., & Gifford, B. (1997). Beyond representativeness: Productive intuitions about probability. Trabajo presentado en la *Annual Conference of the Cognitive Science Society*. Stanford University, Palo Alto, CA.

Watson, J .M., & Collis, K. F. (1994). Multimodal functioning in understanding chance and data concepts. En J. P. Ponte y J. P. Matos (Eds), *Proceedings of the XVIII International*

Conference for the Psychology of Mathematics Education (pp. 369- 376). Lisboa: Universidad de Lisboa.

Referencias de los autores

Herminia Guerrero Treviño, I.E.S. Meléndez-Valdés, Villafranca de los Barros, Badajoz (España), hguertrev@hotmail.com

Juan Jesús Ortiz de Haro, Universidad de Granada. jortiz@ugr.es

José Miguel Contreras, Universidad de Granada, jmcontreras@ugr.es

Assessing high school knowledge of expectation and fair games

Herminia Guerrero Treviño, I.E.S. Meléndez-Valdés, Villafranca de los Barros, Badajoz (España)

Juan Jesús Ortiz de Haro, Universidad de Granada

José Miguel Contreras, Universidad de Granada

Probability has been introduced in the past decades at the different educational levels, in order to reinforce the students' probabilistic knowledge and reasoning, with the aim that the future citizens can successfully manage in uncertain situations. The organization of this teaching requires prior assessment studies that inform the teachers about the students' skills and knowledge.

Our work is aimed at assessing high school students' knowledge of random variable and mathematical expectation; these contents are included in the mathematics curriculum for this educational level. Although research on probabilistic reasoning is wide, studies focused on the assessment of understanding mathematical expectation and the idea of fair game are scarce. Some authors argue that the idea of expected value is more intuitive than that of random variable and even than the idea of probability, since it appeared earlier in the history of probability. To check this hypothesis some research has been carried out with children and prospective teachers, but no with high school students. To fill this gap, in our study we analyse the responses to a questionnaire given to 63 high school students; since the study is exploratory we do not intend to extrapolate the findings to other contexts.

Our results suggest that students can identify that a game is unfair, and compute the odds for each player. It is much more difficult for students to analyse the game when the player with higher probability receives a smaller prize or to compute the expected value that transform an unfair in a fair game, as this calculation involves inverse proportionality. These results suggest the need to reinforce the students' intuition and competence in solving problems that involve mathematical expectation, which is a key to decision making. This concept is also very useful when discussing with the students the relationships between the different meanings of probability, particularly in the context of chance games, as suggested by Batanero and Borovcnik (2016).

In all items the percentage of correct answers in the second grade is higher than in the first degree, probably due to the instruction received by the students. The most frequent error was the equiprobability bias, especially in the first degree students. We obtained in our students lower percentages of correct responses when computing the fair bet than those obtained by primary school prospective teachers, due to the students' difficulty in applying inverse proportionality. We believe that this difficulty should be overcome in high school students, as it also affects the learning of other concepts.