

As Redes Associativas Pathfinder e a Teoria dos Conceitos Nucleares no estudo da Estrutura Cognitiva sobre o conceito de Probabilidade

Cesario Almeida, Instituto Politécnico de Beja (Portugal)

Luis M. Casas García, Universidad de Extremadura (España)

Ricardo Luengo González, Universidad de Extremadura (España)

Recibido el 25 de septiembre de 2014; aceptado el 9 de abril de 2015

Redes Asociativas Pathfinder y Teoría de los Conceptos Nucleares en el estudio de la Estructura Cognitiva sobre el concepto de Probabilidad

Resumen

Con base en la Teoría de los Conceptos Nucleares, se pretende, con este artículo, presentar los resultados obtenidos sobre la estructura cognitiva, referida a la noción de Probabilidad, de alumnos de 9º (14-15 años) y 12º (17-18 años) curso de escolaridad, en Portugal. En cuanto a la metodología empleada, en primer lugar fueron encuestados 344 alumnos y en un segundo momento 325, con recurso del software Goluca. Los datos recogidos, de las Redes Asociativas Pathfinder (PFNET), permitieron identificar los conceptos que tienen un mayor relieve, su correspondiente organización y un conjunto de indicadores cuantitativos relevantes a la luz de la Teoría de los Conceptos Nucleares. Los resultados muestran que esta teoría, en complementariedad con las PFNET, constituye una destacada herramienta didáctica para la organización de la práctica docente y un referente pedagógico importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad.

Palabras clave. Probabilidad; Teoría de los Conceptos Nucleares; Representación del Conocimiento; Redes Asociativas Pathfinder; Estructura Cognitiva.

As Redes Associativas Pathfinder e a Teoria dos Conceitos Nucleares no estudo da Estrutura Cognitiva sobre o conceito de Probabilidade

Resumo

Tendo como referencia a Teoria dos Conceitos Nucleares (TCN), apresentamos neste artigo um estudo cujo objetivo foi o de compreender a estrutura cognitiva dos alunos dos 9.º (14-15 anos) e 12.º (17-18 anos) anos de escolaridade portugueses, em torno da noção de Probabilidade. Utilizando uma amostra de 344 alunos, num 1.º Momento, e de 325, num 2.º Momento, os dados recolhidos, através do software Goluca, baseado nas Redes Associativas Pathfinder (PFNET), permitiram-nos identificar os conceitos mais significativos, as relações mais importantes e um conjunto de indicadores quantitativos relevantes à luz deste marco teórico. Os resultados mostram que a TCN, com a complementariedade das PFNET, constituem mais uma ferramenta didática para organizar a prática pedagógica e um

Para citar: Almeida, C., Casas, L. M., & Luengo, R. (2015). As Redes Associativas Pathfinder e a Teoria dos Conceitos Nucleares no estudo da Estrutura Cognitiva sobre o conceito de Probabilidade. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7, 49 - 71.

referencial pedagógico rico e fértil, que deve ser levado em consideração no processo de Ensino e Aprendizagem da Probabilidade.

Palavras chave. Probabilidade; Teoria dos Conceitos Nucleares; Representação do Conhecimento; Redes Associativas Pathfinder; Estrutura cognitiva.

Pathfinder Associative Networks and Theory of Nuclear Concepts in the study of Cognitive Structure on the concept of Probability

Abstract

Based on the Theory of Nuclear Concepts, this article presents the results obtained on the cognitive structure, referring to the notion of probability, in students of 9th (14-15 years old) and 12th (17-18 years) course of education in Portugal. As for the methodology used, first surveyed 344 students and 325 in a second stage, with recourse to Goluca software. The data collected, Pathfinder Associative Networks (PFNET), helped identify the concepts that assume a higher profile, in their respective organization and a set of relevant quantitative indicators according to the Theory of Nuclear Concepts. The results show that this theory, in complementarity with PFNET networks is an outstanding teaching tool for the organization of teaching practice and an important landmark in the educational process of the teaching and learning of Probability.

Key words. Probability; Theory of Nuclear Concepts; Knowledge Representation; Pathfinder Associative Networks; Cognitive Structure.

Pathfinder Associative Réseaux et Théorie des Concepts Nucléaires à l'étude de la structure cognitive de la notion de Probabilité

Résumé

Basé sur la Théorie des Concepts Nucléaires cet article présente les résultats obtenus sur la structure cognitive, en référence à la notion de Probabilité, d'étudiants du neuvième (14-15 ans) et douzième (17-18 ans) cours de l'éducation au Portugal

Quant à la méthode, on a d'abord questionné 344 étudiants et d'autres 325 dans un deuxième temps, avec le recours au logiciel "Goluca". Les données recueillies, Réseaux Associatifs Pathfinder (PFNET en anglais), ont permis d'identifier les concepts qui assument une plus grande visibilité, dans leur respective organisation conceptuelle et un ensemble d'indicateurs quantitatifs importants au point de vue de la Théorie des Concepts Nucléaires.

Les résultats montrent que cette théorie, en complémentarité avec les PFNET est un outil pédagogique exceptionnel pour l'organisation de la pratique de l'enseignement et une référence pédagogique important dans le processus éducatif de l'enseignement et de l'apprentissage de la Probabilité.

Paroles clés. Probabilités; Théorie des Concepts Nucléaires; Représentation des Connaissances; Réseaux Associatifs Pathfinder; Structure cognitive.

1. Introdução

A compreensão sobre o modo como é a organização dos conceitos associados a um dado conteúdo matemático sempre desempenhou um papel relevante na Didática e, nas últimas décadas, tem-se assumido como uma matéria de pesquisa importante entre investigadores educacionais. Apesar dos significativos avanços registados nas últimas décadas sobre esta matéria, a forma como a mente humana funciona e se organiza constitui, ainda, um enigma.

Todavia, um dado amplamente aceite é o de que a informação é armazenada na memória de um indivíduo ajustando-se a uma certa disposição das ideias, ou, no contexto da aprendizagem de certos assuntos específicos, a uma organização cognitiva

de conceitos/noções/exemplos daquela área particular de conhecimento. Casas (2002, p. 5) refere que “Resulta claro que la adquisición del conocimiento tiene que ver con los procesos que se suceden durante el aprendizaje por parte del alumno. Todas las teorías educativas, y consecuentemente, todas las aportaciones de la Didáctica están encaminadas a tratar cómo se produce la integración de los conocimientos, que son elementos externos, con la estructura cognitiva interna de los alumnos”, ou, como explicita Luengo (2013, p. 13), “La reflexión sobre las formas en que el conocimiento es adquirido y almacenado en la estructura cognitiva del alumno, y cómo puede ser representado, tiene implicaciones en la enseñanza y la investigación educativa”.

Em diversos países, as novas propostas curriculares assumiram a inclusão e o reconhecimento da importância do tema da Probabilidade desde os primeiros anos de escolaridade. A abordagem a este conteúdo vem quebrar com alguma primazia dada à lógica do sim/não, verdade/falso, do modelo determinístico, introduzindo nos estudantes uma forma diferente de pensar, ao admitir a existência, para além destas duas últimas possibilidades, de todo um intervalo no qual prevalece a incerteza e o acaso. Nas palavras de Azcárate (1996, p. 25) “Por ello, su inclusión no sólo supone un cambio curricular, implica necesariamente una modificación de la lógica determinista dominante. Por tanto, desde el punto de vista educativo, la introducción en el contexto escolar de una posible interpretación probabilística de la realidad conlleva un cambio sustancial en la perspectiva formativa del individuo”.

Batanero (2005, pp. 250-251) enumera os elementos do significado de probabilidade considerados relevantes na abordagem didático-pedagógica das Probabilidades - o campo de problemas no qual emerge o objeto matemático, os elementos linguísticos, os procedimentos e algoritmos, as definições e propriedades dos objetos e as suas relações com outros objetos matemáticos e os argumentos e demonstrações das propriedades.

Em paralelo, Gal (2005, p. 46) reflete sobre o que deve ser entendido por literacia probabilística e alega que esta designação sugere, para além de crenças, atitudes, hábitos mentais e uma perspetiva crítica, um conjunto amplo de conhecimentos factuais e certas aptidões formais e informais. Nesta lógica sugere cinco aspetos importantes que se devem ter em consideração no seu ensino e relacionados com o conhecimento da Probabilidade: as grandes ideias (variabilidade, aleatoriedade, independência, previsibilidade e incerteza), descobrir probabilidades (modos de encontrar ou estimar a probabilidade de acontecimentos), linguagem (os termos e métodos utilizados para comunicar sobre a Probabilidade), o contexto (compreender o papel e as implicações das questões e mensagens probabilísticas em vários contextos e no discurso pessoal e público) e as questões críticas (questões para refletir quando se lida com probabilidades).

O objetivo geral que norteou esta pesquisa foi o de tentar compreender, com base no marco teórico da Teoria dos Conceitos Nucleares, a estrutura cognitiva dos alunos dos 9.º (14-15 anos) e 12.º (17-18 anos) anos de escolaridade sobre a noção de Probabilidade. Este trabalho mostrou-nos que ao longo do processo de aprendizagem da noção de Probabilidade, existem conceitos que pela sua relevância, ao estabelecerem múltiplas relações, podem ser classificados como Conceitos Nucleares. Ainda podemos comprovar que os alunos, ao longo da sua escolarização, mantêm um número reduzido de conceitos como Nucleares nas suas representações da estrutura cognitiva sobre a Probabilidade, assim como a manutenção de algumas relações que

estabelecem com outros termos e que se conservam e preservam no tempo, não se verificando um aumento da complexidade destas representações.

2. Os fundamentos teóricos

Neste apartado iremos descrever as principais ideias que suportam e apoiam este trabalho, e por este facto, constituem o nosso marco teórico de referência. Nesse sentido descreveremos sucintamente a Teoria dos Conceitos Nucleares e faremos uma apresentação do conceito matemático e objeto de estudo – Probabilidade, com o intuito de nos ajudar a responder às seguintes questões de investigação:

- Como se encontram organizadas as representações das estruturas cognitivas dos estudantes dos 9.º e 12.º anos de escolaridade, relacionadas com a Probabilidade, dadas através das Redes Associativas Pathfinder? e

- Como se comportam estas representações à medida que os alunos progredem na sua escolaridade?

2.1. A Teoria dos Conceitos Nucleares e as Redes Associativas *Pathfinder*

Na sua tese de doutoramento Casas (2002), apresenta a Teoria dos Conceitos Nucleares (TCN), a qual postula que à medida que os estudantes avançam nas suas aprendizagens, o conhecimento sobre determinado tópico estrutura-se de uma forma cada vez mais simples e em torno de um conjunto limitado de conceitos relevantes – Conceitos Nucleares (CN) – que, no entanto, não são necessariamente os mais gerais nem os mais abstratos (Casas, 2002; Casas & Luengo, 2003, 2004, 2005), podendo ser, inclusive, ideias mais específicas, como os exemplos utilizados pelo professor em contexto de sala de aula.

À semelhança de outras teorias esta recorre, para além de um conjunto de termos específicos, a métodos e técnicas próprias que a caracterizam. Os elementos distintivos da Teoria dos Conceitos Nucleares são: “*A Organização geográfica do conhecimento*” e as noções de “*Conceito Nuclear*” e de “*Caminhos de Custo Mínimo*” (Almeida, 2014; Almeida, Casas & Luengo, 2013; Antunes, 2010; Carvalho, 2011; Casas, 2002; Catarreira, 2013; Luengo, 2013; Luengo, Casas, Mendoza & Arias, 2011).

Tabela 1. - *Elementos distintivos da Teoria dos Conceitos Nucleares*

<i>A Organização geográfica do conhecimento</i>	<i>Conceito Nuclear</i>	<i>Caminhos de Custo Mínimo</i>
<i>A aquisição do conhecimento segue um processo análogo ao conhecimento do ambiente físico que nos rodeia</i>	<i>Conceitos que servem de base à organização mental e que não têm que ser os mais gerais e/ou mais abstratos</i>	<i>Representações dadas através das PFNET que, para os alunos, são as mais significativas já que retiram delas o máximo benefício com um menor custo</i>

Como suporte metodológico, a TCN utiliza as Redes Associativas *Pathfinder* (Schvaneveldt, Dearholt, & Durso, 1985, 1988), sustentadas na Teoria dos Grafos. Estas representações gráficas são construídas com base num conjunto de características comuns e são compostas por nós/conceitos, os quais estabelecem relações entre si, e por arestas que descrevem a maior ou menor proximidade/relação entre os conceitos.

Estas redes (PFNET) permitem não só conjecturar acerca dos processos internos de aquisição e organização do conhecimento, mas também obter representações visuais do seu estado e evolução (Casas e Luengo, 2003, 2005; Antunes, 2010; Carvalho, 2011; Almeida, *et al.*, 2013; Catarreira, 2013; Luengo, 2013).

Com aplicações em áreas tão diversificadas como a Matemática, Contabilidade, Informática, Engenharia Telemática, Avaliação da Aprendizagem, Análise do Conhecimentos, Física, entre outros, (Almeida, 2011; Arias, 2008; Carvalho, 2011; Clariana, Wallace & Godshalk, 2009; Großschedl & Harms, 2013; Kudikyala & Vaughn, 2005; Sarwar, 2012), as PFNET facultam uma visão detalhada no plano da organização conceptual – as redes – que permitem, com relativa facilidade e com uma mínima interferência do investigador sobre os sujeitos que respondem, identificar os conceitos mais/menos importantes e facultam um conjunto de índices (consistência, similaridade, complexidade e centralidade) e outros indicadores quantitativos, que permitem análise estatísticas mais refinadas (Almeida, 2011; Almeida, 2014; Almeida, Casas & Luengo, 2013; Antunes, 2010; Casas & Luengo, 2005; Carvalho, 2011; Catarreira 2013; Clariana, Engelmann & Yu, 2013). A Tabela 2 sistematiza este conjunto de características das PFNET.

Tabela 2. - *Características das Redes Associativas Pathfinder*

AS REDES ASSOCIATIVAS PATHFINDER
<ul style="list-style-type: none"> • Podem ser utilizadas em diversas áreas do saber. • Identificam os Conceitos Nucleares. • Identificam as relações entre conceitos. • Representação gráfica da estrutura cognitiva. • Mínima interferência do investigador sobre o sujeito que responde. • Obtenção de um conjunto de indicadores quantitativos associados às Redes <i>Pathfinder</i>

Em suma, adotando como marco teórico a Teoria dos Conceitos Nucleares em conjugação com as Redes Associativas Pathfinder, obtivemos a representação da estrutura cognitiva e procuramos identificar os Conceitos Nucleares (CN - os mais relevantes/importantes na organização mental), os “nós extremidade” (NE - os que ainda não estão devidamente consolidados) e os “nós polares” (NP - os que se encontrem, conceptualmente entre estes dois últimos) dos alunos dos 9.º e 12.º anos em relação à noção de probabilidade e, a partir destes elementos, compreender o modo como estes dois grupos de estudantes organizam e evoluem as suas ideias em torno da noção de Probabilidade. Pela seu interesse, utilizaremos ainda os seguintes indicadores quantitativos:

- a Coerência de uma rede (Schvaneveldt, Dearholt & Durso 1988) permite avaliar o conhecimento do tema tratado e apresenta um valor que varia no intervalo $[-1,1]$ (Antunes, 2010; Casas & Luengo, 2004; Catarreira, 2013);

- o Índice de Similaridade de duas redes é calculado a partir da análise das ligações totais existentes nas duas redes e das ligações comuns às redes e varia no intervalo $[0,1]$ (Casas, 2002)

- o Índice de Complexidade da Rede (ICR), elaborado por Casas (2002), é um indicador numérico que permite avaliar quantitativamente a complexidade das distintas redes PFNET e fornece, também, um valor que varia entre 0 e 1 e. Quanto maior é o seu valor, maior é a complexidade da rede. Este índice depende do produto de três

fatores: Densidade da rede (D), Fator dos nós nucleares (N) e Fator do grau dos nós nucleares (FN).

- a Centralidade de grau de uma rede constitui uma medida para mensurar a tipologia da estrutura cognitiva e também varia entre 0 e 1 (Clariana, Draper & Land, 2011; Clariana, Engelmann & Yu, 2013).

2.2. O objeto matemático de estudo: Probabilidade

O conceito de probabilidade constitui presentemente um conteúdo e uma componente essencial na formação dos jovens e a sua importância é reconhecida não só ao nível das investigações na área da Didática da Matemática como também na inclusão desta temática nos diferentes currículos. É frequentemente utilizado, de um modo mais ou menos intuitivo, nas mais variadas situações do dia-a-dia, as quais apresentam “uma característica comum, que é o facto de não se conseguir prever com exatidão e de antemão, qual o resultado da situação de incerteza” (Graça, Martins & Ponte, 2010, p. 164).

Historicamente, a visão mais clássica, ou Laplaciana, dominou durante um longo período de tempo o ensino da Teoria da Probabilidade. Posteriormente, com a implementação da Matemática Moderna, veio-se introduzir uma conceção mais formal e axiomática desta área da Matemática. Todavia, com o crescente interesse e consciencialização da aplicabilidade deste conceito a inúmeras e diferentes áreas do saber, assistiu-se a uma inclusão da noção de Probabilidade como o limite da frequência relativa. Porém, existem experiências aleatórias que, pelas suas especificidades, nunca mais, ou dificilmente, se repetirão. Nestas situações é conveniente interpretar a Probabilidade como manifestação do grau de convicção que cada indivíduo atribui à ocorrência dos acontecimentos, com base na experiência e informação anteriores. Fernandes (1999) designa-a de “personalista”, pois, segundo ele, as duas conceções anteriores – clássica e frequentista - são propriedades do mundo real, enquanto na perceção subjetivista as probabilidades são avaliações pessoais, de situações aleatórias, inerentes ao indivíduo.

Estas diferentes conceções de Probabilidade evidenciam a natureza complexa deste conceito Matemático e manifestam que a abordagem pedagógica desta noção não se pode limitar a uma única perspetiva (Batanero, Henry & Parzysz, 2005), de tal modo que os alunos para alcançarem um nível adequado de compreensão da Probabilidade é necessário que sejam capazes de relacionar as abordagens clássica, frequentista, subjetiva e axiomática (Sánchez & Valdez, 2013).

Nas últimas duas décadas, a investigação didática sobre a noção de Probabilidade foi bastante extensa e rica e que, na nossa opinião, incidiu sobre o currículo (Batanero, 2004, 2005, 2013; Caldeira, 2009; Gal, 2005; Millán, 2013), sobre os recursos para o ensino e a aprendizagem (Alexander e Bueno, 2013; Azcárate & Serradó, 2006; Lonjedo, Huerta & Carles, 2012; Mercado, 2013), sobre a formação de professores (Anasagasti & Berciano, 2013; Azcárate, 1996; Batanero, 2009; Batanero, Díaz Godino & Roa, 2004; Batanero, Ruiz & Arteaga, 2009; Godino, 2013; Maanan, 2012; Pratt, 2005) e sobre aprendizagem dos alunos (Batanero & Díaz, 2007; Lopes, 2011, 2013; Almeida, Casas & Luengo, 2013).

3. Metodologia utilizada

Metodologicamente, optou-se por um desenho de investigação descritivo com características transversais, justificado pelo facto de os dados terem sido obtidos a partir do mesmo instrumento, aplicado a diferentes grupos de alunos e condicionado por um corte no tempo. Nesta perspetiva, o desenho de investigação foi concebido de acordo com três fases sequenciais e funcionalmente dependentes (Figura 1).

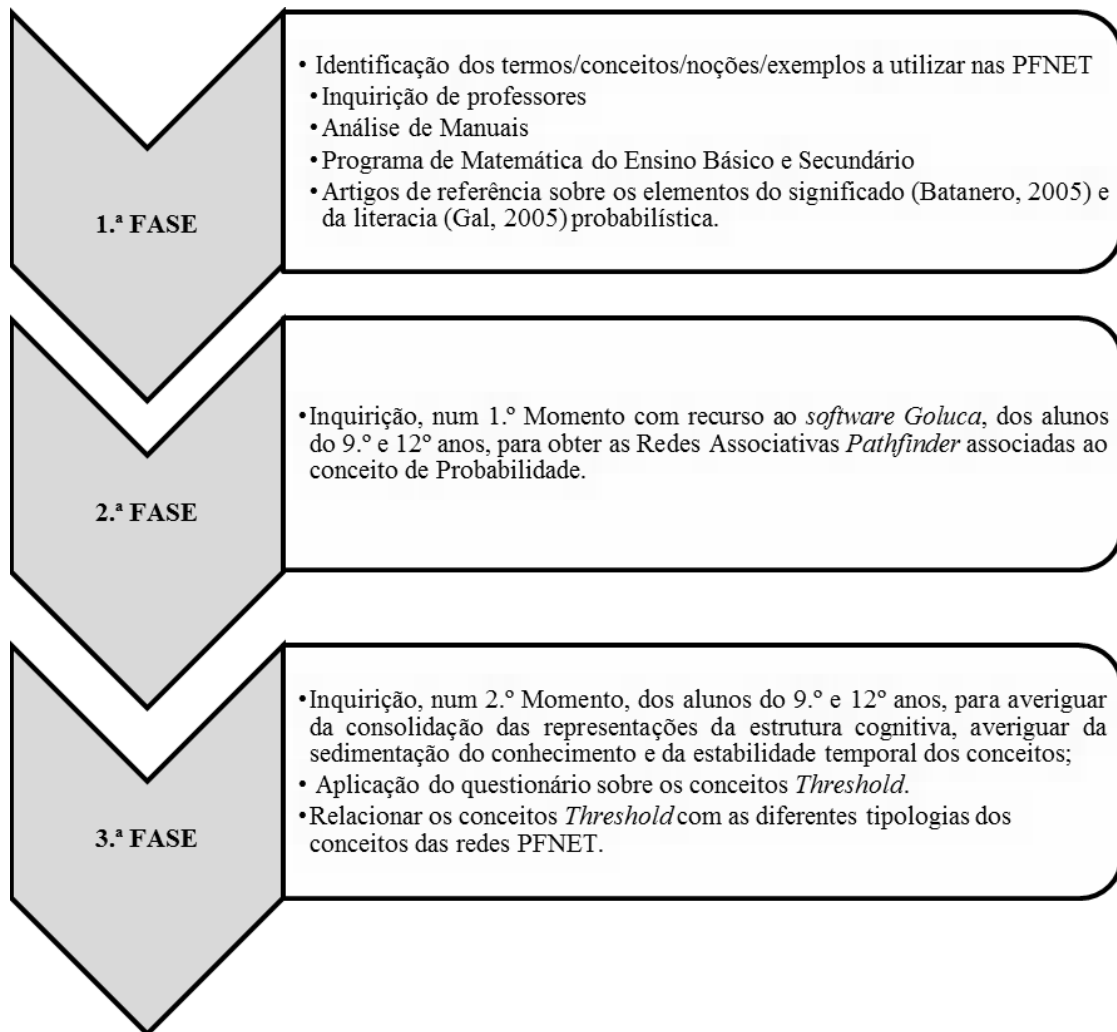


Figura 1.- As diferentes fases da investigação realizada

A primeira destas fases consistiu na definição dos termos a serem utilizados na elaboração das Redes Associativas *Pathfinder*. A seleção destes elementos constituiu uma etapa fundamental do nosso estudo, já que constitui a base da análise a efetuar posteriormente. Para esta definição inquiriram-se vinte e dois professores de Matemática em exercício, analisaram-se seis manuais escolares do 9.º ano de escolaridade (já que estes recursos pedagógicos foram utilizados pelos estudantes de ambos os anos de escolaridade), os programas de Matemática do Ensino Básico (6-14/15 anos) e do Ensino Secundário (15-17/18 anos) e, ainda, efetuou-se uma categorização/enquadramento na qual se levou em consideração artigos que clarificam os elementos do significado (Batanero, 2005) e da literacia (Gal, 2005) probabilística.

Deste trabalho resultou na identificação de onze termos/conceitos/noções associados à noção de Probabilidade. Classificamos ainda estes conceitos de acordo

com a sua maior ou menor generalidade (Figura 2). Sendo o conceito de Probabilidade a noção matemática aglutinadora, consideramos como conceitos utilizados frequentemente no quotidiano e, por esta razão, mais gerais o “Acaso”, a “Experiência Aleatória” e os “Acontecimento” os quais para a sua clarificação e modelação necessitam de noções matemáticas - “Valor numérico”, “Quociente”, “Técnicas de contagem de casos”, “Casos possíveis e favoráveis”, “Lei dos Grandes Números e “Lei (ou regra) de Laplace”. Mais restrito, o exemplo considerado foi o “Lançamento de moedas/dados”.

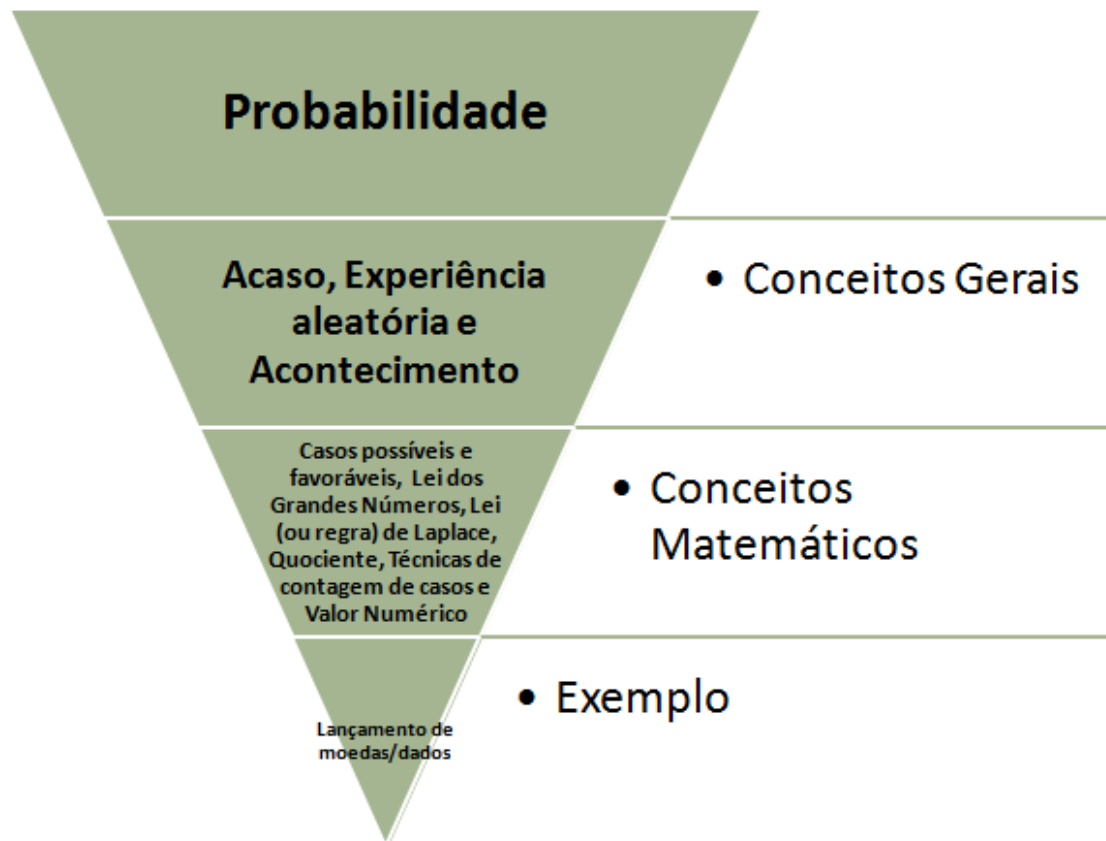


Figura 2. - Hierarquia dos termos/conceitos/noções associados à Probabilidade

Definidos os termos/conceitos/exemplos que foram utilizados para a construção das redes PFNET, decidiu realizar-se a recolha de dados, com os mesmos estudantes, em dois momentos diferentes - 1.º Momento e 2.º Momento -, separados entre si por, aproximadamente três meses. O 1.º Momento de recolha de dados foi planificado para ser realizado após a introdução do conteúdo da Probabilidade, que durou entre setembro e novembro, e no qual se pretendia obter as primeiras representações da estrutura cognitiva dos estudantes, dadas através das PFNET. Baseado nos mesmos pressupostos do anterior, o 2.º Momento de recolha de informação tinha como objetivo indagar acerca da consolidação e evolução das representações dadas pelas PFNET, e que coincidiu, praticamente, com o final do ano letivo e no qual se torna a abordar esta temática, com vista à preparação dos estudantes para o exame de final de ciclo.

A distribuição dos alunos questionados, em ambos os Momentos de recolha de dados, de acordo com o género e ano de escolaridade, apresenta-se na tabela seguinte.

Tabela 3.- Distribuição dos alunos da amostra, nos 1.º e 2.º Momentos, de acordo com o Género e o Ano de Escolaridade

Género/Ano	1.º MOMENTO			2.º MOMENTO		
	9.º ANO	12.º ANO	Total	9.º ANO	12.º	Total
Masculino	116	43	159	105	46	151
Feminino	134	51	185	121	53	174
Total	250	94	344	226	99	325

Para a recolha de dados em ambos os momentos, utilizou-se um questionário que apresenta características diferentes dos questionários tradicionais, já que é substituído o papel por uma ferramenta informática – *Goluca* – o qual nos permitiu formular questões, recolher os dados, obter e apresentar alguns resultados.

O programa informático *Goluca*, desenvolvido por Godinho, Luengo e Casas (Godinho, 2007; Casas, Luengo & Godinho, 2011), concentra, no mesmo *software*, três procedimentos essenciais à construção e análise das PFNET: 1) Permite estabelecer relações entre os termos (A); 2) Representa a estrutura cognitiva (B), e; 3) Permite a análise da representação da estrutura (C).

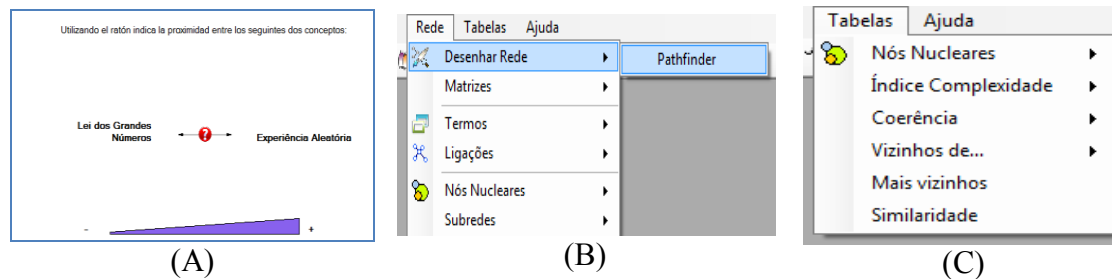


Figura 3. - (A) Estabelecer relações entre os termos, (B) Representação da estrutura cognitiva e (C) Análise das redes PFNET.

Na etapa de estabelecer as relações entre os termos, procede-se à recolha de dados para quantificar as relações entre os termos previamente definidos, suponhamos em número de n . Aos diferentes sujeitos é solicitado para que, na sua opinião, indique a maior (menor) proximidade entre os pares de conceitos que, sucessivamente, vão aparecendo no *layout* do *Goluca*, num total de $C_2^n = \frac{n(n-1)}{2}$. No presente trabalho, e

para $n=11$ temos $C_2^{11} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$ $C_2^n = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$

$$C_2^n = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{11 \times 10}{2} = 55.$$

Quanto maior (menor) for o peso atribuído, maior (menor) será a proximidade entre os conceitos/termos. Este procedimento é feito, utilizando o cursor do rato, clicando no triângulo que surge no ecrã do computador (Figura 3 - (A)), de modo a indicar a intensidade desta relação.

É através deste procedimento, e para cada estudante, que se gera uma matriz (Tabela 4), que reflexa numericamente a relação entre os termos considerados e que constitui a base quantitativa para a representação da estrutura cognitiva do aluno, dada através das PFNET.

Tabela 4.- Matriz de proximidade de um aluno do 9.º ano de escolaridade, obtida com o software Goluca, sobre o conceito de Probabilidade.

	TCC	EA	CPCF	Pro	Quo	LMD	Acon	VN	LL	Aca
Técnicas de contagem de casos (TCC)										
Experiência Aleatória (EA)	0,216									
Casos Possíveis e casos favoráveis (CPCF)	0,506	0,848								
Probabilidade (Pro)	0,558	0,913	0,923							
Quociente (Quo)	0,535	0,126	0,535	0,535						
Lançamento de moedas/dados (LMD)	0,545	0,565	0,952	0,935	0,148					
Acontecimento (Acon)	0,181	0,906	0,939	0,881	0,252	0,510				
Valor numérico (VN)	0,532	0,548	0,497	0,116	0,835	0,500	0,177			
Lei (ou regra) de Laplace (LL)	0,194	0,929	0,526	0,558	0,506	0,187	0,197	0,168		
Acaso (Aca)	0,926	0,568	0,868	0,490	0,168	0,935	0,542	0,126	0,116	
Lei dos Grandes Números (LGN)	0,219	0,129	0,165	0,506	0,503	0,184	0,148	0,487	0,145	0,226

Com os dados obtidos nesta matriz, o Goluca calcula uma matriz de correlações na qual se definem os pesos das ligações entre os vários conceitos. Uma vez que todos os conceitos estão relacionados com maior, ou menor grau na matriz de dados, existe uma rede geométrica correspondente em que todos eles estão ligados entre si. Todavia, e em virtude do elevado número de ligações que apresenta, esta rede é demasiado complexa e, face a este facto, perde alguma utilidade interpretativa. A ideia fundamental subjacente às Redes Associativas *Pathfinder* é descartar os caminhos mais supérfluos e reter os caminhos mais significativos da rede. O procedimento básico para encontrar qual o caminho/ligação que se incorpora nas várias fases do processo iterativo, é que este só é considerado se não existe um caminho indireto, através de outros nós, cuja soma de pesos seja menor que o caminho direto referido (Antunes, 2010; Almeida, 2014; Casas, 2002; Casas & Luengo, 2005;).

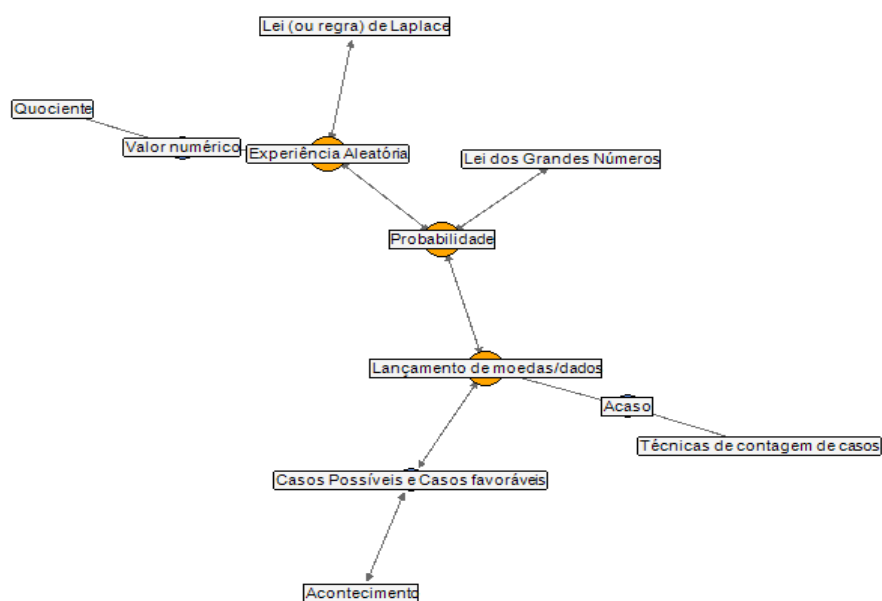


Figura 4. - Rede PFNET de um aluno do 9º ano de escolaridade

Usando um algoritmo devido a Kamada e Kawai (1989), o programa gera uma rede no plano que exhibe apenas as ligações entre conceitos e que correspondem aos

caminhos de peso mínimo, de tal modo que apenas as relações mais fortes e relevantes são representadas.

Com base nestas representações podemos identificar as relações mais importantes, os conceitos Nucleares (os que apresentam mais de duas ligações) e que, de acordo com a TCN, assumem uma maior relevância na estrutura cognitiva associada a um determinado conteúdo. Para além dos Conceitos Nucleares, é possível identificar os nós extremidade (com uma só ligação) e que à luz da TCN, são aqueles que ainda não estão devidamente incorporados na estrutura cognitiva dos alunos. E, ainda, os nós polares como aqueles termos que apresentam exatamente duas ligações (Casas, 2002; Casas & Luengo, 2003, 2004, 2005). Em complemento, o package Goluca calcula alguns indicadores quantitativos (coerência, similaridade, complexidade, centralidade, entre outros), apresentando os respetivos valores na forma de tabelas, facilmente exportáveis, para outros programas de tratamento estatístico de dados (e.g. Excel ou SPSS).

4. Análise dos resultados

Nesta secção vamos apresentar a informação obtida nos dois Momentos de recolha de dados – 1.º Momento e 2.º Momento – e nos dois anos de escolaridade – 9.º ano e 12.º ano. Estes foram recolhidos/tratados utilizando o software Goluca, SPSS (versão 20) e, pontualmente, a folha de cálculo Excel 2007.

Os princípios analíticos que nortearam a análise feita aos dados obtidos em ambos os Momentos de questionamento foram semelhantes, sendo que as variáveis estudadas e os procedimentos estatísticos utilizados foram análogos. Porém, e face ao objetivo de investigação inicialmente formulado, achamos importante efetuar uma comparação, de características transversais, de algumas variáveis/resultados dos dois instantes em que ocorreu a recolha de dados.

Assim, com base em todas as redes PFNET obtidas foi possível quantificar a frequência que, nestas representações da estrutura cognitiva dos alunos, surgiram os vários conceitos como nó extremidade (NE), nó polar (NP) e Conceito Nuclear (CN). Tabela 5.- *Frequências dos diferentes conceitos/termos/exemplos das PFNET nos 9.º e 12.º anos e nos 1.º e 2.º Momentos de recolha de dados*

Conceitos	1.º Momento N=344						2.º Momento N=325					
	9.º ano N=250			12.º ano N=94			9.º ANO N=226			12.º ANO N=99		
	NE	NP	CN	NE	NP	CN	NE	NP	CN	NE	NP	CN
Acaso	93	87	70	50	25	19	94	80	52	41	40	18
Acontecimento	114	70	66	42	33	19	85	81	60	42	34	23
Casos Possíveis e Casos favoráveis	79	96	75	23	38	33	66	91	69	15	37	47
Experiência aleatória	78	85	87	20	47	27	65	84	77	31	40	28
Lançamento de moedas/dados	61	88	101	21	38	35	75	77	74	26	39	34
Lei (ou regra) de Laplace	129	68	53	25	36	33	90	80	56	31	38	30
Lei dos Grandes Números	134	75	41	51	32	11	123	67	36	54	32	13
Probabilidade	49	76	125	8	26	60	50	62	114	13	30	56
Quociente	153	63	34	54	28	12	131	55	40	57	26	16
Técnicas de contagem de casos	120	75	55	48	31	15	104	74	48	55	26	18
Valor numérico	119	78	53	50	33	11	110	70	46	54	36	9

No 1.º Momento de recolha de dados e em ambos os anos de escolaridade os termos mais referidos como Conceitos Nucleares foram “Probabilidade” e “Lançamento de moedas/dados”. No momento posterior de inquirição mantém-se como CN a noção de “Probabilidade”.

As figuras seguintes evidenciam as percentagens dos diversos termos/noções/exemplos utilizados, enquanto Conceitos Nucleares e nos dois momentos de recolha de dados.

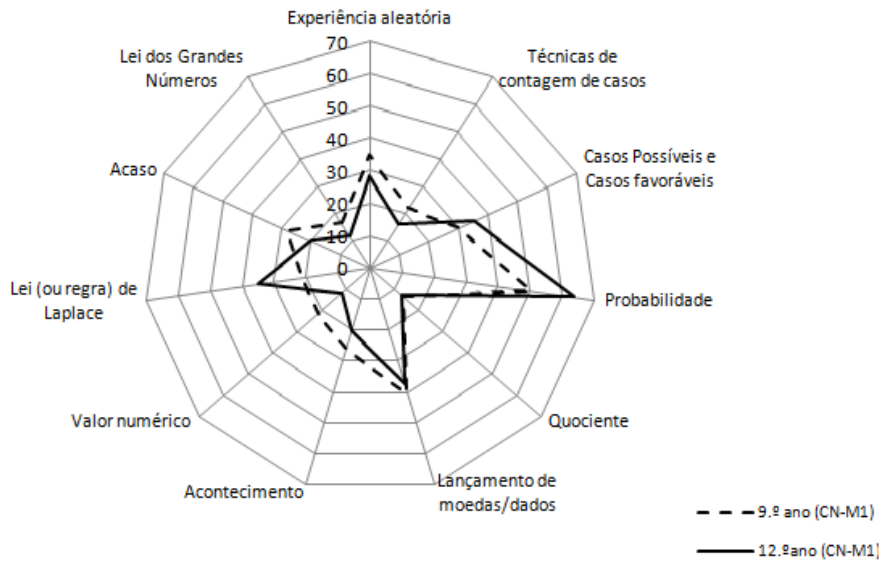


Figura 5. - Percentagem dos diferentes termos como Conceito Nuclear no 9.º ano e no 12.º ano de escolaridade, no 1.º Momento de recolha de dados

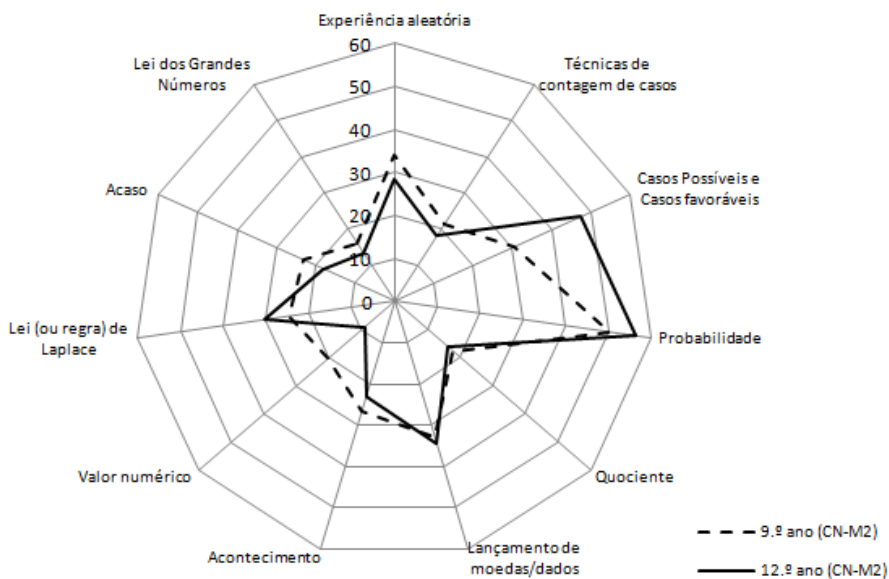


Figura 6. - Percentagem dos diferentes termos como Conceito Nuclear no 9.º ano e no 12.º ano de escolaridade no 2.º Momento de recolha de dados (B)

As figuras anteriores exibem uma característica que nos parece bastante interessante. As linhas “poligonais” representativas das percentagens como Conceitos Nucleares dos diferentes termos nos dois anos de escolaridade considerados, e nos dois momentos de recolha de dados, apresentam uma forma muito semelhante e, esta constatação, permite-nos inferir sobre a existência de semelhança no peso relativo dos diferentes termos como Conceitos Nucleares na estrutura cognitiva dos discentes sobre a noção de Probabilidade e que se mantêm à medida que os estudantes progridem na sua aprendizagem.

Para introduzir uma vertente de transversalidade na nossa análise, iremos também comparar alguns dos indicadores quantitativos obtidos através das PFNET no 9.º ano (1.º Momento) e o 12.º ano (2.º Momento), já que consideramos estes anos/momentos os mais afastados em termos temporais e, por este facto, fornecem-nos indicações sobre a evolução da estrutura cognitiva dos estudantes dadas através das redes *Pathfinder*. O esquema geral seguinte procura clarificar essas análises e no qual as setas representam as comparações efetuadas:

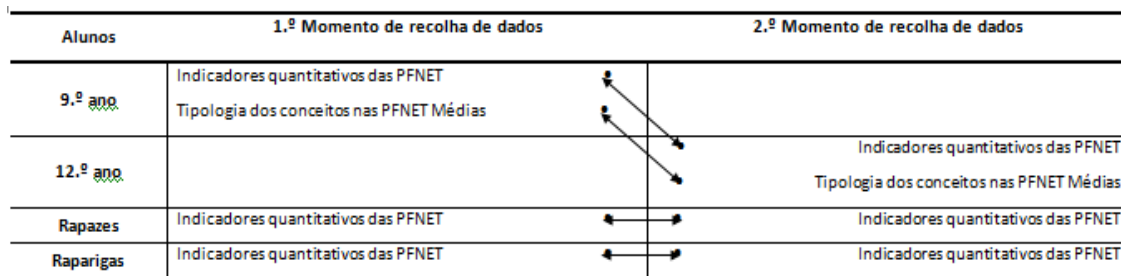


Figura 7. - Esquema geral das comparações realizadas do 1.º para o 2.º Momentos de recolha de dados e nos 9.º e 12.º anos de escolaridade

Para comparar os vários indicadores quantitativos das PFNET, nos rapazes e nas raparigas, e nos dois momentos de recolha de dados, optou-se, face ao comportamento não normal de grande parte das variáveis, pelo método não paramétrico de *Mann-Whitney*. Os resultados apresentam-se de seguida:

Tabela 6. - Teste de comparação dos vários indicadores quantitativos, nos 1.º e 2.º Momentos de recolha de dados, nos rapazes e nas raparigas

Indicadores quantitativos	Rapazes		Raparigas	
	<i>Mann-Whitney U</i>	<i>Sig.a)</i>	<i>Mann-Whitney U</i>	<i>Sig.a)</i>
Número de nós extremidade	11866,0	,857	15113,0	,306
Número de nós polares	11586,0	,588	14562,5	,113
Número de nós nucleares	11993,5	,988	15033,5	,262
Densidade da Rede	11743,0	,721	15392,0	,432
Fator dos nós nucleares	11993,5	,988	15033,5	,262
Grau dos nós nucleares	11766,5	,762	14717,5	,159
Fator do grau dos nós nucleares	11766,5	,762	14717,5	,159
Ind. complexidade das Redes	11816,0	,811	14795,5	,185
Coerência		,548		,998

Variável de agrupamento: Momento da recolha de dados

a) Significância obtida no teste T-Student

Os *Sig.* obtidos para estas variáveis apresentaram valores no intervalo 0,113 e 0,998, superiores a 0,05, pelo que a variável Momento de recolha de dados não é discriminatória nos rapazes e nas raparigas relativamente às variáveis Número de nós extremidade, Número de nós polares, Número de nós nucleares, Densidade da Rede, Fator dos nós nucleares, Grau dos nós nucleares e Fator do grau dos nós nucleares e Índice de complexidade e coerência das redes PFNET.

Analogamente também efetuamos a comparação destes indicadores entre o 9.º ano (1.º Momento) e o 12.º ano (2.º Momento). O quadro seguinte sistematiza os resultados obtidos.

Tabela 7. – *Teste de Mann-Whitney para os vários indicadores das PFNET para o 9.º ano (1.º Momento) e o 12.º ano (2.º Momento)*

	<i>Mann-Whitney U</i>	<i>Sig. a)</i>
Número de nós extremidade	10926,5	,080
Número de nós polares	10517,5	,026
Número de nós nucleares	11667,5	,388
Densidade da Rede	11651,0	,354
Fator dos nós nucleares	11667,5	,388
Grau dos nós nucleares	12133,0	,775
Fator do grau dos nós nucleares	12133,0	,775
Ind. complexidade das Redes	12138,5	,780
Coerência		,000

Variável de agrupamento: Ano e Momento da recolha de dados
a) Significância obtida no teste T-Student

Com exceção das variáveis número de nós polares e coerência, cujos valores são maiores no 12.º ano (2.º Momento), todas as outras variáveis apresentam um *Sig.* que varia entre 0,08 e 0,775 ($>0,05$), pelo que a variável de agrupamento (Ano e Momento da recolha de dados) não é discriminatória relativamente às variáveis número de nós extremidade, número de nós nucleares, Densidade da Rede, Fator dos nós nucleares, Grau dos nós nucleares, Fator do grau dos nós nucleares e Índice de complexidade das redes PFNET.

Uma outra funcionalidade do *Golucca* é a obtenção da Rede Média PFNET. Esta é obtida a partir dos valores dos pesos entre os conceitos de duas ou mais matrizes de similaridade. Torna-se uma representação extremamente útil para comparar dois grupos diferentes de indivíduos ou o mesmo grupo em diferentes momentos de investigação (Clariana *et al.*, 2009) e “podemos decir que las redes medias pueden servirnos para identificar de una forma visual muy aproximada, cuáles son los nodos principales en las redes de cada grupo” (Casas, 2002, p.332).

As redes médias PFNET para os dois anos de escolaridade e nos dois momentos de recolha de dados, juntamente com alguns valores numéricos, apresentam-se nas Figuras 7 e 8.

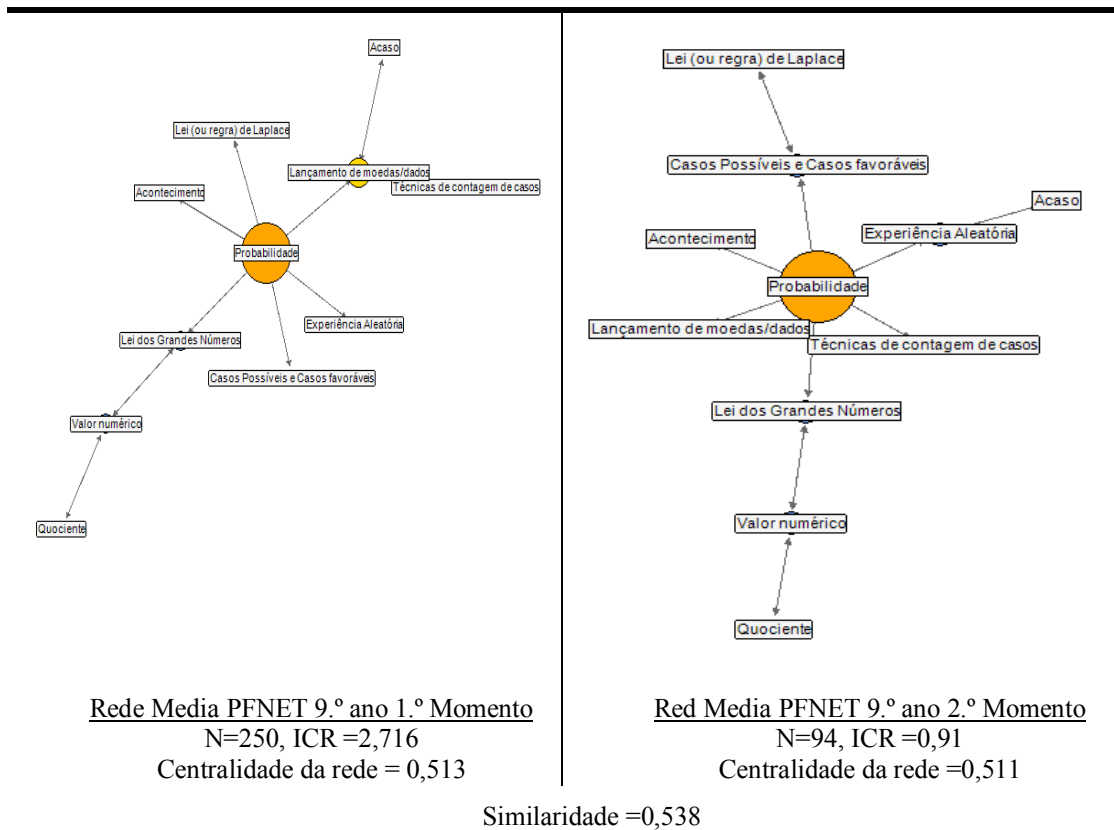


Figura 8. - Redes Médias PFNET do 9º ano nos dois momentos de recolha de dados.

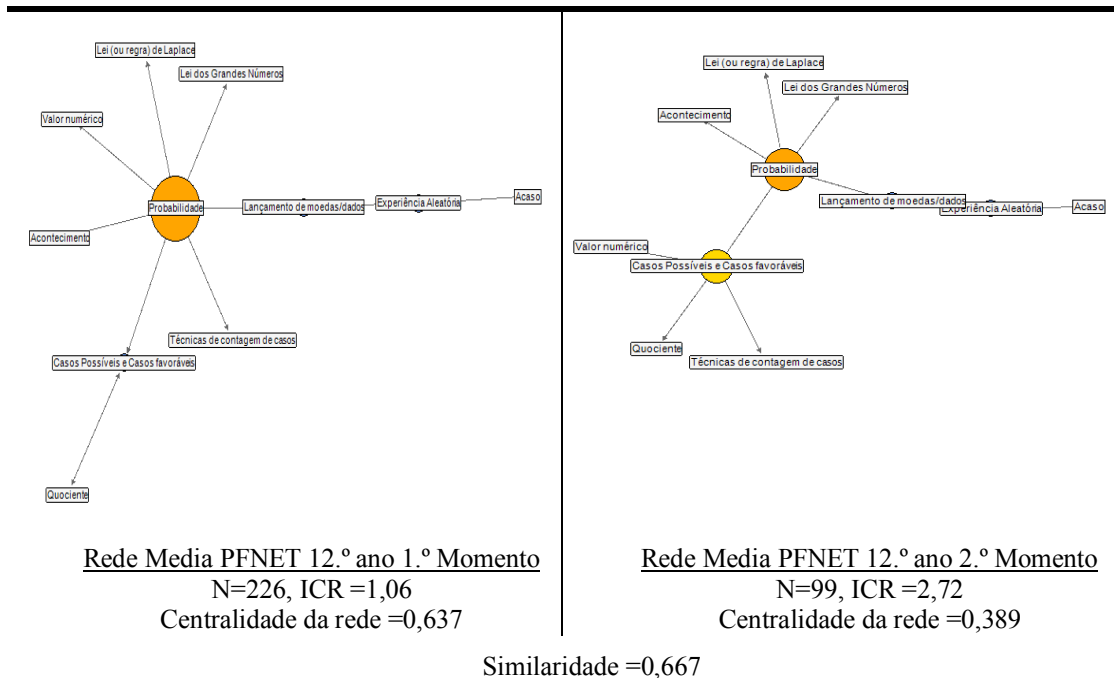


Figura 9. - Redes Medias PFNET do 12º ano nos dois momentos de recolha de dados.

A partir das redes Médias PFNET dos dois momentos de recolha de dados, podemos observar que no grupo de estudantes mais jovens, emerge um Conceito

Nuclear “Probabilidade”, em torno do qual orbitam os termos “Acontecimento”, “Lançamento de moedas/dados”, “Experiência aleatória”, “Lei dos Grandes Números” e os “Casos possíveis e favoráveis”, todos estes associados à linguagem específica desta temática matemática. O exemplo “Lançamento de dados/moedas” perde importância, ao passar de Conceito Nuclear, no 1.º momento, a nó extremidade, no 2.º Momento de recolha de dados. Constatamos a existência de uma “cauda” formada pela “Lei dos Grandes Números”, “Valor numérico” e “Quociente” e, diametralmente opostos como nós extremidade nesta disposição, “Acaso” e “Quociente”, constituindo estes últimos conceitos os menos consolidados na estrutura cognitiva dos alunos em torno da Probabilidade.

Mais uma vez, os termos “Acaso” e “Quociente” surgem, nas redes médias PFNET dos estudantes do 12.º ano de escolaridade e nos dois momentos de recolha de dados, muito afastados. São redes muito centradas no Conceito Nuclear “Probabilidade”, apesar de, no 2.º Momento de recolha de dados, o termo “Casos possíveis e favoráveis” aumentar a sua relevância nestas representações das estruturas cognitivas, e por esta razão passar a Conceito Nuclear, aspeto que, na nossa opinião, se prende com reconhecimento da importância que os alunos atribuem à utilização do Cálculo Combinatório para determinar estas quantidades. Ainda para este nível de ensino é recorrente a existência de uma “cauda”, agora formada pelas noções de “Lançamento de moedas/dados”, “Experiência aleatória” e “Acaso”, o que nos parece uma associação coesa já que falamos de um exemplo que constitui uma experiência aleatória e que, por esta razão, envolve a incerteza. A imprevisibilidade associada a este tema matemático, expressa através dos termos “Acaso” e da “Experiência aleatória”, não surgem muito próximos de “Probabilidade”.

Em relação à classificação dos conceitos, à luz da TCN, o quadro seguinte mostra a tipologia dos termos presentes nas várias redes médias.

Tabela 8. – Tipologia dos conceitos nas Redes Médias nos dois Momentos de recolha de dados e para os dois anos de escolaridade

	9.ºano M1	9.ºano M2	12.ºano M1	12.ºano M2
Acaso	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Acontecimento	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Casos possíveis e favoráveis	Nó extremidade	Nó polar	Nó polar	Conceito Nuclear
Experiência Aleatória	Nó extremidade	Nó polar	Nó polar	Nó polar
Lançamento de dados/moedas	Conceito Nuclear	Nó extremidade	Nó polar	Nó polar
Lei (ou regra) de Laplace	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Lei dos Grandes Números	Nó polar	Nó polar	Nó extremidade	Nó extremidade
Probabilidade	Conceito Nuclear	Conceito Nuclear	Conceito Nuclear	Conceito Nuclear
Quociente	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Técnicas de contagem de casos	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Valor Numérico	Nó polar	Nó polar	Nó extremidade	Nó extremidade

Parece-nos evidente que o ano de escolaridade mais constante ao nível da tipologia dos termos/ideias/exemplos é o 12.º ano, já que dos onze conceitos considerados somente um altera a tipologia do 1.º para o 2.º Momento (“Casos possíveis e caso

favoráveis”), o que é demonstrativo de uma maior consolidação da estrutura cognitiva dos estudantes.

Em relação aos estudantes mais jovens, oito dos conceitos conservam a sua tipologia e três variam na sua tipologia (“Experiência aleatória”, “Casos possíveis e favoráveis” e “Lançamento de moedas/dados”).

Uma leitura mais transversal, e comparando a tipologia dos conceitos desde o 1.º Momento de recolha de dados no 9.º ano, para o 2.º Momento de recolha de dados no 12.º ano de escolaridade constatamos que:

- Os conceitos “Acaso”, “Acontecimento”, “Lei (ou regra) de Laplace”, “Quociente” e “Técnicas de contagem de casos”, mantêm-se nestes anos escolares como nó extremidade;
- A noção de “Probabilidade” é o único conceito que se mantém, nestes anos e Momentos, como Conceito Nuclear;
- O conceito “Experiência aleatória”, que inicialmente é um nó extremidade, passa a nó polar;
- Tanto o conceito “Valor numérico” como a “Lei dos Grandes Números” diminuem de importância cognitiva ao passar de nó polar a nó extremidade;
- A importância do exemplo “Lançamento de dados/moedas” é diminuída, em virtude de passar de Conceito Nuclear (9.º ano, 1.º Momento) para nó polar (12.º ano, 2.º Momento).
- Por oposição, o estatuto cognitivo dos “Casos possíveis e dos casos favoráveis” amplia-se, ao passar de nó extremidade, no 9.º ano (1.º Momento), a Conceito Nuclear, no 12.º ano (2.º Momento).

Em geral, estes resultados permitem constatar que há conceitos que se mantêm, ao longo do tempo, pouco consolidados na estrutura cognitiva dos estudantes, no que se refere a esta temática específica (“Acaso” e “Acontecimento”) e às questões relacionadas com os procedimentos e algoritmos probabilísticos (“Lei (ou regra) de Laplace”, “Técnicas de contagem de casos” e “Quociente”). Houve um aumento, do 9.º para o 12.º ano, da importância cognitiva atribuída aos “Casos possíveis e casos favoráveis”, aspeto que parece estar associado com o uso e a dificuldade do cálculo combinatório para determinar estas quantidades.

Para além disto, e como podemos constatar nos dados apresentados na Tabela 6, à medida que os estudantes progredem nas suas aprendizagens, o índice de complexidade das redes PFNET mantêm-se com valores estatisticamente semelhantes, o que é numericamente demonstrativo, que apesar do natural incremento de dificuldade dos conteúdos probabilísticos do 9.º para o 12.º ano a complexidade das redes não aumenta.

5. Conclusões

No decorrer no nosso trabalho empírico, e nos dois momentos de recolha de dados, foram obtidas um total de 669 (1.º Momento – 344 e 2.º Momento – 325) representações das estruturas cognitivas de estudantes, dadas através das Redes Associativas *Pathfinder*, em torno do conceito de Probabilidade.

A representação gráfica, das frequências relativas destes conceitos das PFNET como CN, NE e NP, mostra linhas poligonais muito semelhantes em ambos os anos de escolaridade e nos dois momentos de recolha de dados. Este aspeto evidencia a parecença da distribuição dos pesos das diferentes tipologias dos conceitos na estrutura cognitiva dos alunos.

Os vários indicadores quantitativos das redes PFNET, tanto das raparigas como dos rapazes do 1.º para o 2.º momento de recolha de dados, apresentam valores estatisticamente iguais. Ao compararmos, estes mesmos indicadores, entre o 9.º ano (1.º momento) e o 12.º ano (2.º momento) constatamos que, com exceção das variáveis Número de nós polares e coerência, cujos valores médios são maiores no 12.º ano (2.º momento), todas as outras variáveis apresentam valores estatisticamente semelhantes.

Apesar do incremento, natural, da dificuldade dos conteúdos do 9.º ano para o 12.º ano, os Índices de Complexidade das Redes, para o Ano de Escolaridade, nos dois momentos de inquirição, apresentam valores estatisticamente semelhantes, o que é numericamente demonstrativo da inexistência de um aumento de complexidade das PFNET. O mesmo acontece para o ICR de acordo com Género e em ambos os momentos de recolha de dados. Este facto evidencia que no ano escolar em que os alunos aprofundam a temática das Probabilidades a respetiva estrutura cognitiva não se torna mais complexa, privilegiando relações já existentes/consolidadas.

Apesar de não conhecermos estudos da aplicação específica destas Teorias à temática das Probabilidades, todavia, alguns destas conclusões estão patentes em investigações aplicadas a outros assuntos matemáticos. Podemos encontrar em Casas (2002), Antunes (2010) e Catarreira (2013), a constatação da existência de um número reduzido de Conceitos Nucleares presentes na estrutura cognitiva e sobre os quais os alunos centram o seu conhecimento. Nas pesquisas destes mesmos autores, verificou-se também um não aumento do Índice de Complexidade das PFNET, a existência de ligações que se mantêm no tempo e a constatação da relevância da metodologia das redes PFNET no processo de Ensino e Aprendizagem.

A Teoria dos Conceitos Nucleares, enquanto nova proposta didática, constitui, na nossa opinião, um referencial pedagógico rico e fecundo e que deve ser levado em consideração no processo de ensino e aprendizagem da Probabilidade, ao possibilitar a identificação dos conceitos mais significativos e as relações mais relevantes na estrutura cognitiva dos alunos, estamos convictos que temos uma outra ferramenta didática para organizar a prática pedagógica.

Referências

- Alexander, D., & Bueno, F. (2013). Técnicas Monte Carlo para la enseñanza de la estadística. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 579-586. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Almeida, C. (2011). *O contributo das Redes Associativas Pathfinder à avaliação das aprendizagens em Matemática: Aplicação aos exames de Matemática da 1.ª chamada do 9.º ano de escolaridade do Ensino Básico português*. (Trabajo Final de Máster). Badajoz: Universidad de Extremadura.
- Almeida, C. (2014). *Estudo da estrutura cognitiva dos alunos dos 9.º e 12.º anos sobre o conceito de Probabilidade: o contributo das Teorias dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos Threshold*. (Tesis Doctoral). Badajoz: Universidad de Extremadura. Disponible

el 25 de marzo de 2015 en http://dehesa.unex.es:8080/xmlui/bitstream/handle/10662/1538/TDUEX_2014_Almeida_CP.pdf?sequence=1

- Almeida, C., Casas, L., & Luengo, R. (2013). A organização conceptual dos estudantes, dada através das Redes Associativas Pathfinder, do conceito de Probabilidade: Um estudo com alunos do 9.º ano de Escolaridade do Ensino Básico Português. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 83-90. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Anasagasti, A., & Berciano, A. (2013). Prueba exploratoria sobre competencias de futuros maestros de Primaria: Conocimiento del bloque relativo al tratamiento de la información, azar y probabilidad, en el currículo escolar de Matemáticas. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 531-538. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Antunes, A. (2010). *Estructura Cognitiva y Conceptos Nucleares en la Enseñanza/Aprendizaje de la Trigonometría: Estudio Comparativo Realizado con Alumnos del 10.º al 12.º Año de Enseñanza Secundaria a través de la Aplicación de Diferentes Metodologías*. (Tesis Doctoral). Badajoz: Universidad de Extremadura. Disponible el 25 de marzo de 2015 en <https://www.educacion.gob.es/teseo/mostrarRef.do?ref=886899>
- Arias, J. (2008). *Evaluación de la Calidad de Cursos Virtuales: Indicadores de Calidad y Construcción de un Cuestionario de Medida. Aplicación al Ámbito de Asignaturas de Ingeniería Telemática*. (Tesis Doctoral no publicada). Badajoz: Universidad de Extremadura.
- Azcárate, P. (1996). *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de la aleatoriedad y probabilidad*. Granada: Editorial Comares.
- Azcárate, P. & Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340, 341-378.
- Batanero, C. (2004). Ideas estocásticas fundamentales ¿Qué Contenidos se Debe Enseñar en la Clase de Probabilidad? In Fernandes, J., Sousa, M. & S. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Atas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*, 9-30. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Relime - Revista Latinoamericana de Investigación en Educación en Matemática Educativa*, 8(3) 247-263.
- Batanero, C. (2009). Retos para la formación Estadística de los Profesores. En J.A. Fernandes, F. Viseu, M.H. Martinho e P. Ferreira (eds.) *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola.*, (pp. 7-22). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho. Recuperado el 25 de marzo de 2015 de https://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/9913/1/Actas_IIEncontroProbabilidadeEstatisticaEscola.pdf
- Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿Qué podemos aprender de la investigación? En Fernandes, J., Correia, P. Martinho, M. & Viseu, F. (Eds), *Actas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola.*, (pp. 9-22). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho. Recuperado el 25 de marzo de 2015 de <https://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/23169/1/2013AtasIIIPEEE.pdf>

- Batanero, C., Díaz Godino, J., & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Educacion*, 12 (1, 1-19.s.p. Recuperado el 25 de marzo de 2015 de <http://www.amstat.org/publications/jse/v12n1/batanero.html>
- Batanero, C., & Díaz, C. (2007). Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. Ponencia Invitada en *las XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Granada: Espanha.
- Batanero, C., Henry, M., & Parzys, B. (2005). The nature of chance and probability. In G.A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Nova Iorque, USA: Springer.
- Batanero, C., Ruiz, B., & Arteaga, P. (2009). Comparación de distribuciones: Una actividad sencilla para los futuros profesores? *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*, (pp. 37-54) Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho. Disponible el 25 de marzo de 2015 en https://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/9913/1/Actas_IIEncontroProbabilidadesEstatisticaEscola.pdf
- Caldeira, S. (2009). *A estatística e as probabilidades no ensino secundário: Análise dos programas de Matemática A e B na perspectiva do professor e dos alunos*. Tese de Mestrado. Lisboa: Universidade de Lisboa.
- Carvalho, J. (2011). *Estudio de las posibilidades de aplicación a la enseñanza de la Matemática del entorno PmatE: Validación y aportaciones en 1.º ciclo de Enseñanza Básica de Portugal*. (Tesis Doctoral no publicada). Badajoz: Universidad de Extremadura.
- Casas, L. (2002). *El Estudio de la Estructura Cognitiva de Alumnos a Través de Redes Asociativas Pathfinder. Aplicaciones y Posibilidades en Geometría*. (Tesis Doctoral no publicada). Badajoz: Universidad de Extremadura. Disponible el 25 de marzo en <http://www.uv.es/apregeom/archivos2/Casas02a.pdf>
- Casas, L., & Luengo, R. (2003). Redes Asociativas Pathfinder y Teoría de los Conceptos Nucleares. Aportaciones à la Investigación em Didáctica de las Matemáticas. Em E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico, & A. Vallecinos (Eds), *Investigación en Educación Matemática. VII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, 179-188. Granada: Universidad de Granada.
- Casas, L., & Luengo, R. (2004). Representación del Conocimiento y Aprendizaje. Teoría de los Conceptos Nucleares. *Revista Española de Pedagogía R.E.P.* Año LXII, 227, 59-84.
- Casas, L., & Luengo, R. (2005). Conceptos Nucleares en la Construcción del Concepto de Ángulo. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(2), 201–216.
- Casas, L., Luengo, R., & Godinho, V. (2011). Software GOLUCA: Knowledge Representation in Mental Calculation. *US-China Education Review*, 4, 592-600.
- Catarreira, S. (2013). *A introdução das ideias da Teoria dos Conceitos Nucleares no ensino da Geometria e as suas implicações*. (Tesis Doctoral). Badajoz: Universidad de Extremadura.
- Clariana, R., Draper, D., & Land, S. (2011). An automated measure of group knowledge structure convergence. Apresentação na *Annual Meeting of the Association for Educational Communications and Technology*. Jacksonville: EUA.
- Clariana, R., Engelmann, T., & Yu, W. (2013). Using centrality of concept maps as a measure of problem space states in computer-supported collaborative problem solving. *Education Technology Research and Development*, 61, 423–442.
- Clariana, R., Wallace, P., & Godshalk, V. (2009). Deriving and measuring group knowledge structure from essays: The effects of anaphoric reference. *Education Technology Research and Development*, 57, 725–737.

- Fernandes, J. (1999). *Intuições e aprendizagem de probabilidades: Uma Proposta de Ensino de Probabilidades no 9º Ano de Escolaridade*. (Tese de Doutoramento). Braga: Universidade do Minho.
- Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. Em Jones, G. (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-43). New York: Springer
- Godinho, V. (2007). *Implementação do software GOLUCA e aplicação à modificação de redes conceptuais*. (Trabajo para la obtención del Diploma de Estudios avanzados). Badajoz: Universidad de Extremadura.
- Godino, J. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 1-16. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Graça Martins, M., & Ponte, J. (2010). *Organização e tratamentos de dados*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.
- Großschedl, J., & Harms, U. (2013). Assessing conceptual knowledge using similarity judgments. *Studies in Educational Evaluation*, 39, 71–81.
- Kamada, T., & Kawai, S. (1989). An algorithm for drawing general undirected graphs. *Information Processing Letters*, 31 (1), 7–15.
- Kudikyala, U., & Vaughn, R. (2005). Software requirement understanding using Pathfinder networks: discovering and evaluating mental models. *The Journal of Systems and Software*, 74, 101–108.
- Lonjedo, M., Huerta, M., & Carles, M. (2012). Conditional probability problems in textbooks an example from Spain. *Relime - Revista Latinoamericana de Investigación en Educación en Matemática Educativa*, 15(3), 319-337.
- Lopes, J. (2011). Uma Proposta Didático-Pedagógica para o Estudo da Concepção Clássica de Probabilidade. *Bolema*, 24(39), 607-628.
- Lopes, J. (2013). Una propuesta para la enseñanza del teorema de Bayes a través de un juego de dados y de resolución de problemas. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 601-608. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible el 25 de marzo de 2015 en http://www.estadis.net/3/revista/N1_DidacticadelaEstadisticaProbabilidadyCombinatoria.pdf
- Luengo, R. (2013). La Teoría de los Conceptos Nucleares y su aplicación en la investigación en Didáctica de las Matemáticas. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 34, 9-36.
- Luengo, R., Casas, L., Mendoza, M., & Arias, J. (2011). Possibilities of "Nuclear Concepts Theory" on Educational Research, a Review. Comunicación en *International Conference "The future of Education"*. Florencia: Italia.
- Maanan, M. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre Probabilidad*. (Tesis Doctoral). Granada: Universidad de Granada.
- Mercado, M. (2013). Exploración de conceptos de probabilidad con Geogebra. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 309-318. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible el 25 de marzo de 2015 en

http://www.estadis.net/3/revista/N1_DidacticadelaEstadisticaProbabilidadyCombinatoria.pdf

- Millán, E. (2013). Razonamiento Combinatorio y el currículo español. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 539-545. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Disponible el 25 de marzo de 2015 en http://www.estadis.net/3/revista/N1_DidacticadelaEstadisticaProbabilidadyCombinatoria.pdf
- Pratt, D. (2005). How do teachers foster students' understanding of probability? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 345-366). New York: Springer.
- Sánchez, E., & Valdez, J. (2013). La cuantificación del azar: una articulación de las definiciones subjetiva, frecuencial y clásica de probabilidad. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 39-45. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada Disponible el 25 de marzo de 2015 en http://www.estadis.net/3/revista/N1_DidacticadelaEstadisticaProbabilidadyCombinatoria.pdf
- Sarwar, G. (2012). *Comparing the Effect of Reflections, Written Exercises, and Multimedia Instruction to Address Learners' Misconceptions using Structural Assessment of Knowledge*. (Tese de Doutoramento). Canada: Ottawa.
- Schvaneveldt, R., Dearholt, D., & Durso, F. (1985). *Pathfinder: Scaling with network structures* (Memorandum in Computer and Cognitive Science, MCCS.85-9). Las Cruces, NM: Computing Research Laboratory, New Mexico State University.
- Schvaneveldt, R., Dearholt, D., & Durso, F. (1988). Graph Theoretic Foundations of Pathfinder Networks. *Computer Mathematics Applications*, 15(4), 337-345.

Referencia de los autores

Cesario Almeida, Instituto Politécnico de Beja (Portugal) calmeida@ipbeja.pt

Luis M. Casas García, Universidad de Extremadura (España) luisma@unex.es

Ricardo Luengo González, Universidad de Extremadura (España) rluengo@unex.es

Pathfinder Associative Networks and Theory of Nuclear Concepts in the study of Cognitive Structure on the concept of Probability

Cesario Almeida, Instituto Politécnico de Beja (Portugal)

Luis M. Casas García, Universidad de Extremadura (España)

Ricardo Luengo González, Universidad de Extremadura (España)

Based on the Theory of Nuclear Concepts, this paper aims to research on the notion of probability in the 9th (14-15 years) and 12th (17-18 years) grade students' cognitive structure in Portugal.

The mathematical object of this study – Probability - is now established as key content in the teaching in different countries. Its importance has been recognized in the curriculum in relevant directives, as well as in the research results of mathematical teaching.

The theoretical framework adopted - Theory of Nuclear Concepts - notes as the higher is students' educational level, the more structured is their knowledge in an increasingly simple way and around a limited set of important concepts called Nuclear Concepts.

The research was conducted with a survey applied to in-service teachers, by analyzing scientific textbooks and reference papers, together with the curriculum for Basic and Secondary Education. Based on the results obtained were defined terms / concepts / notions / examples to be used later in the data collection. Later 344 students were surveyed and 325 at a second time.

To collect and analyze students' data was used Goluca software, obtaining graphical representations and Pathfinder Associative Networks (PFNET), in which nuclear concepts appear as nodes subsequently with their connections as line segments. The PFNET model thus allowed to obtain the identification of concepts - Nuclear Concepts - which assume a greater importance in students' cognitive structure and others notions which are not yet fully incorporated into it - End Nodes - as well as their respective organization.

Also it was made a comparative analysis of various quantitative indicators of the representations, considering the variables gender and schooling course.

Finally, conclusions point to a temporary stabilization of students' cognitive structure without an increase in the PFNETs complexity of the 9th-12th levels. Statistically significant differences nor were found in most quantitative indicators among individuals, either by gender differences.

By allowing the identification of the most significant relevant relationships between concepts in students' cognitive structure, we believe that the Theory of Nuclear Concepts is an outstanding teaching tool for organizing teaching practice and an important educational reference in the teaching and learning of probability.