Maestro, ¿cuál es el número más grande que existe? Trascendiendo el currículum en la exploración del conocimiento especializado del profesor

Miguel Montes, Universidad de Huelva (España)

Luis Carlos Contreras, Universidad de Huelva (España)

José Carrillo, Universidad de Huelva (España)

Recibido el 5 de diciembre de 2017; aceptado el 21 de marzo de 2018

***Maestro, ¿cuál es el número más grande que existe?* Trascendiendo el currículum en la exploración del conocimiento especializado del profesor**

Resumen

Este artículo muestra una aproximación al conocimiento profesional del profesor de matemáticas en situaciones relacionadas con contextos escolares de Primaria y Secundaria en la que la propia situación exige movilizar conocimiento relativo a elementos no presentes en el currículo de la etapa, en particular, relativo al concepto de infinito. Para ello, a través del potencial analítico que brinda el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, se ponen de relieve la complejidad, coherencia y multidimensionalidad del conocimiento de dos profesores gestionando situaciones en las que este concepto adopta un papel relevante.

Palabras clave: Conocimiento profesional; infinito; MTSK; currículo.

***Teacher, which is the biggest number?* Transcending school curriculum in the exploration of teachers' specialized knowledge**

Abstract

This paper shows an approach to the professional knowledge of mathematics teachers in school-related situations in the context of Primary and Secondary school. In these situations, the use of knowledge of some mathematical elements that are not present in the syllabus is required, in particular, the notion of infinity. Through the analytical potential of the Mathematics Teacher's Specialized Knowledge Model, we highlight the complexity, coherence and multidimensionality of the knowledge of two teachers when dealing with situations in which infinity has a relevant role.

Keywords: Professional knowledge; infinity; MTSK; curriculum.

Professeur, quel est le plus grand nombre qui existe? Transcender le curriculum dans l'exploration des connaissances spécialisées de l'enseignant

Resumé

Cet article montre une approche de la connaissance professionnelle de l'enseignant de mathématiques dans des situations liées aux contextes primaires et secondaires où la situation elle-même nécessite de mobiliser des connaissances liées à des éléments non présents dans le programme de la scène, en particulier l'infini. Pour cela, à travers le potentiel analytique du Modèle de Connaissances Spécialisées du Professeur de Mathématiques, la complexité, cohérence et

Para citar: Montes, M. A.; Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2018). Maestro, ¿Cuál es el número más grande que existe? Trascendiendo el currículum en la exploración del conocimiento especializado del profesor. *Avances de Investigación en Educación Matemática, nº 13, 5 - 20.*

multidimensionnalité des connaissances de deux professeurs sont mises en évidence en gérant situations dans lesquelles ce concept adopte un rôle pertinent.

Paroles clés: Connaissance professionnelle; infini; MTSK; curriculum.

***Professor*, qual é o maior número que existe? Transcendendo o currículo na exploração do conhecimento especializado do professor**

Resumo

Este texto mostra uma aproximação ao conhecimento do professor de matemática em situações relacionadas com contextos escolares da Educação Básica e do Ensino Secundário em que a própria situação exige mobilizar conhecimentos relativos a elementos que não fazem parte do currículo da etapa específica, em particular o conceito de infinito. Com esse intuito, através do potencial analítico que nos oferece o modelo do Conhecimento Especializado do Professor de Matemática, salientam-se a complexidade, coerência e multidimensionalidade do conhecimento do professor na gestão de situações em que este conceito assume um papel central.

Palavras chave: Conhecimento profissional, infinito, MTSK, currículo.

1. Introducción

Una pregunta que puede encontrarse habitualmente en un aula de Educación Primaria es: "Maestro/a, ¿cuál es el número más grande que existe?". Esa pregunta, que algunos niños formulan de forma ingenua, plantea al profesor el reto de abordar la infinitud de los números naturales, sin que el concepto de infinito esté presente en el currículum de Educación Primaria (RD 126/2014), al menos de forma explícita. En la Educación Secundaria Obligatoria, el concepto de infinito tampoco es explícito, si bien se hace referencia a él en conceptos que aparecen en el currículum español, como el límite *infinito* en un punto, o las expresiones decimales *infinitas* periódicas.

Esta situación, en la que la idea de infinito está presente en el currículum relacionada con el desarrollo decimal de los números racionales, se comienza a trabajar en el tercer ciclo de la Educación Primaria, y se continúa en la Educación Secundaria. En esta etapa los estudiantes abordan la relación entre las expresiones de los números como ratio y como decimal. Así, comprueban cómo algunas divisiones entre números enteros (entendiendo la fracción en su contexto de división) no tienen una expresión entera y abordan la obtención del cociente con los "números con coma", extendiendo su comprensión del sistema de numeración decimal con expresiones que permiten mostrar una cantidad menor que la unidad. Esta cuestión puede abordarse desde la comprensión de los elementos del sistema decimal, siempre y cuando las expresiones sean finitas. La primera solución que se suele aportar con la expresión periódica de 1/3 resuelve aparentemente el problema, pues permite expresar una cantidad que se comprende y maneja con frecuencia y que se diferencia de 0,3. Tampoco 2/3 suele ser un conflicto, y los estudiantes admiten la identidad 2/3 = $0,\hat{6}$. Sin embargo, el conflicto emerge cuando el profesor intenta hacer comprender que, por las mismas razones empíricas y racionales anteriores, $0,\hat{9} = 1$. La igualdad aquí se torna una aproximación para los estudiantes, cambiando su sentido de operacional a relacional (Filloy, Rojano & Solares, 2003). Nos referimos no solo a los estudiantes de Primaria, donde el profesor podría abordar algebraicamente esta cuestión justificando la respuesta a través de los algoritmos que transforman la expresión decimal de un número decimal en su expresión como fracción; también muchos estudiantes de Secundaria y Bachillerato afirman que es casi uno, pero no llega, sin justificar su argumentación (Yopp, Burroughs & Lindaman, 2011). Además, las estrategias que el profesor puede emplear para convencer a sus estudiantes de la identidad son las mismas que sirven de soporte para justificar el algoritmo transformador mencionado más arriba. Estas son adecuadas para los estudiantes de Secundaria y Bachillerato por el uso de herramientas algebraicas, pero no suelen ser suficientes a pesar de su poder argumental y transparencia.

Todo lo anterior nos lleva a reflexionar sobre las características del conocimiento de un profesor (de Primaria, Secundaria o Bachillerato, dependiendo de la profundidad y extensión con que abordemos la situación planteada). Este conocimiento, ligado intrínsecamente a la profesionalización docente, trasciende el conocimiento matemático y adopta un carácter especializado. Dicho carácter se lo otorga la confluencia del conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido matemático, confluencia que se da en contextos de enseñanza y aprendizaje. Se trata de un conocimiento que permite al profesor adoptar con sentido decisiones curriculares (qué es esperable poder abordar y qué no sobre la noción de infinito en una determinada etapa educativa), así como decisiones sobre su gestión en el aula (dadas las dificultades esperables en los estudiantes, qué estrategias o herramientas matemáticas pueden/deben utilizarse, qué recursos didácticos tienen un potencial específico para ello).

Por otro lado, la noción de infinito ha centrado la atención de diversos investigadores en Educación Matemática, que han perseguido explorar y profundizar el aprendizaje del concepto, centrándose en los procesos cognitivos asociados a su construcción por parte de los alumnos. El papel del profesor ha tendido a ser el de informante con un nivel de conocimiento esperado más avanzado (e.g. Yopp et al., 2011), si bien en los últimos años se ha propuesto estudiar el conocimiento que el profesor puede/debe poseer para gestionar la enseñanza de conceptos que pueden involucrar al infinito (Montes & Carrillo, 2017; Zazkis & Mamolo, 2016).

En este artículo abordamos el hecho de que el conocimiento profesional de la matemática escolar debe trascender los elementos curriculares explícitos en el currículo de la etapa, abarcando también los elementos matemáticos estructuradores de la misma. Mostramos cómo esta comprensión profesional, desarrollada desde la base de un conocimiento especializado, incluye dimensiones de índole matemático y didáctico del contenido a abordar. Para ello, nos basamos en la modelización propuesta desde el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas –MTSK (Carrillo, Montes, Contreras & Climent, 2017). Planteamos el objetivo de mostrar cómo el conocimiento de un concepto como el infinito, que no es explícito en los currículos de Primaria ni Secundaria, se necesita para que el profesor gestione situaciones de aula. Recurrimos a cuatro episodios significativamente distintos. El primero surge en un aula de Primaria donde un maestro gestiona la pregunta que da inicio al artículo. El segundo y el tercero son extractos de una discusión en una entrevista con un profesor de Secundaria, sobre la naturaleza matemática de la igualdad $5.\hat{9}=6$ y de la suma de series, en cuanto a aproximaciones metodológicas útiles para un aula. El cuarto es un extracto de una discusión de la definición de infinito con el mismo profesor.

2. Referentes teóricos

Tomamos dos ejes vertebradores: el conocimiento del profesor de matemáticas, modelizado desde la perspectiva de Carrillo et al. (2017) y los trabajos sobre el concepto de infinito. Haremos un recorrido por elementos de conocimiento del profesor, centrándonos en el modelo analítico MTSK, de utilidad para discutir el conocimiento involucrado en la gestión de una situación en la que el infinito esté inmerso. Se verá cómo este concepto está implícito en los currículos de Primaria y

Secundaria y se revisará la investigación en el conocimiento del profesor sobre el infinito.

2.1 Conocimiento del profesor de Matemáticas

El conocimiento profesional del profesor de matemáticas, y la generación de marcos teóricos para investigar con y sobre los profesores ha sido uno de los intereses centrales de la investigación en educación matemática en los últimos años (Skott, Van Zoest & Gellert, 2013). En pos de generar un modelo que amplíe la perspectiva sobre la especialización desde una caracterización extrínseca a una intrínseca (Scheiner, Montes, Godino, Carrillo & Pino-Fan, 2017), durante los últimos años, se ha avanzado en la conceptualización de un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), que considera que la especialización del conocimiento del profesor radica en su uso en contextos profesionales (Carrillo et al., 2017). Una primera implicación de este posicionamiento es que la aproximación al conocimiento especializado del profesor de matemáticas debe considerar no solo la actividad de aula, sino también cualquier actividad relacionada con su profesión, como la preparación de clases, discusión y reflexión sobre las mismas, procesos de evaluación, etc.

El modelo analítico de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas contempla la noción de Conocimiento Didáctico del Contenido -PCK (Shulman, 1986; Ball, Thames & Phelps, 2008), dominio que abarca conocimiento organizado en tres subdominios: el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS), con el conocimiento sobre expectativas de aprendizaje, desarrollo conceptual o procedimental esperado en un nivel educativo y sobre secuenciación de contenidos (relativo a la organización y distribución de los diferentes temas); el Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), con el conocimiento sobre fortalezas y dificultades de los estudiantes ante un contenido concreto, formas de interacción con un contenido matemático, teorías personales o formales acerca del aprendizaje y sobre intereses y expectativas de los estudiantes; y el Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT), con el conocimiento sobre teorías personales o formales de enseñanza, potencialidades y limitaciones de recursos materiales y virtuales para abordar un determinado contenido y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos susceptibles de ser utilizados en la enseñanza de un contenido concreto.

Este modelo, siguiendo la dicotomía propuesta por Shulman (1986), abarca también el conocimiento de la materia, concretado en conocimiento matemático (MK), como el conocimiento disciplinar que permite al profesor gestionar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. Este dominio de conocimiento matemático abarca la comprensión de la matemática que un profesor pueda tener: local, ligada a temas concretos; estructural, en el sentido de relaciones entre temas; y sintáctica (Schwab, 1978), ligada a formas de generar matemáticas. Con la mirada puesta en la situación planteada en la introducción, relativa a la igualdad $0,\widehat{9} = 1$, este dominio está compuesto por el Conocimiento de los Temas (KoT), ligado al conocimiento de tipo local, que en dicha situación permite identificar, entre otros, el conocimiento de: la división entera (no exacta, como uno de los contextos o fenómenos en los que emergen las fracciones), las fracciones, los decimales (como medio para expresar los cocientes de las divisiones anteriores y como ampliación del Sistema de Numeración Decimal para números no enteros y como registros de representación de estos números), los tipos de desarrollo decimal de un número racional, los algoritmos o procedimientos que permiten transformar la expresión decimal de un número en su expresión fraccionaria (y sus fundamentos), la existencia de números “decimales” que no pueden expresarse como fracciones, las justificaciones de ese hecho o densidad del conjunto Q en R (lo que supone una complejización de la situación matemática implicada). Dentro del dominio del conocimiento matemático hay también el Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM), que se plasma en el establecimiento de conexiones (de simplificación, complejización, transversales o auxiliares) entre elementos matemáticos, permitiendo al profesor comprender una matemática avanzada desde una perspectiva elemental o viceversa, lo que genera la posibilidad de tomar la decisión de hacer explícitas al alumno, o no, dichas conexiones (Bass, 2017). Finalmente, ligado al conocimiento sintáctico, observamos la posibilidad de explorar el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM), en el sentido, por ejemplo, de los significados del signo matemático =, que en los procesos de construcción de conocimiento matemático puede tener diferentes acepciones (Vermeulen & Meyer, 2017), así como de elementos de la heurística ligada a la resolución de problemas, es decir, el conocimiento de los elementos propios de la construcción de conocimiento matemático.

El modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas asume, en la línea de Ponte (1994), que el conocimiento del profesor es complejo y dinámico, lo cual implica que, si bien como modelo analítico MTSK permite una primera aproximación al conocimiento del profesor en términos de qué subdominios de conocimiento se movilizan, el análisis ulterior de los elementos de conocimiento movilizado será de forma integradora, buscando las relaciones entre los tipos de conocimiento. Este conocimiento también es tácito (Ponte, 1994), lo que implica que con la observación de la práctica de aula podemos obtener indicios (Flores, Escudero & Aguilar, 2013) que inviten a una exploración a través de aproximaciones metodológicas complementarias a dicha observación. En el caso del concepto de infinito, que no suele explicitarse en las aulas, estas aproximaciones metodológicas complementarias son fundamentales (Montes, 2015), por ejemplo, a través de la discusión de viñetas (Montes & Carrillo, 2017). El MTSK incluye también un dominio de creencias y concepciones sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje. Este dominio interactúa de forma bidireccional con los dominios ya mencionados, de modo que se influyen mutuamente. Asumimos que creencias y concepciones pueden dar explicación de elementos de conocimiento evidenciados por el profesor, y viceversa. El estudio del dominio de creencias y concepciones se realiza sobre la base de Carrillo y Conteras (1995), donde se diferencian las concepciones instrumentalista, platónica y dinámica o de resolución de problemas en relación con la matemática, y las tendencias tradicional, tecnológica, espontaneísta e investigativa respecto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

2.2 Infinito

A pesar de que el infinito no aparece explícito en el currículo español, una lectura detallada muestra cómo este concepto subyace a diferentes conceptos matemáticos. En Educación Primaria (R.D. 126/2014), aparecen la equivalencia de fracciones, las posiciones relativas de rectas (especialmente el paralelismo), o la medida del tiempo (especialmente el ciclo de las estaciones, donde el proceso es periódico). En Educación Secundaria Obligatoria (R.D. 1105/2014), la diferenciación entre decimales finitos e infinitos, la diferenciación entre conjuntos numéricos, el trabajo con sucesiones numéricas y el estudio de funciones tienen como trasfondo la infinitud de los conjuntos (cifras decimales o elementos de la sucesión, respectivamente), o la densidad del conjunto en el que se trabaja.

El infinito, como objeto matemático, tiene una naturaleza transversal a la matemática escolar, apareciendo como idea que dota de sentido a diferentes conceptos. Kuntze et al. (2011) identifican al infinito como "gran idea", esto es, una noción que estructura la matemática y permite fomentar la dotación de sentido de las nociones escolares, así como los procesos de construcción de conocimiento matemático. Estas 'grandes ideas', en general, se asume que pueden fomentar en los profesores los procesos de reflexión que llevarán a diseñar y proponer tareas ricas que posibiliten la aparición y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje (Kuntze et al., 2011).

Las investigaciones que contemplan al infinito como concepto objeto de enseñanza y aprendizaje se han centrado en cómo el concepto ha sido aprendido a lo largo de la historia, por ejemplo, estudiando su génesis histórica en relación con los procesos de aprendizaje individuales (Moreno & Waldegg, 1991). Las investigaciones sobre el infinito focalizan recurrentemente los mismos temas: límites (Juter, 2008; Sierpinska, 1987), fracciones, especialmente la igualdad $0.\widehat{9}=1$ (Yopp et al., 2011) y paradojas matemáticas con el potencial de generar discusiones profundas sobre la naturaleza del concepto (Manfreda-Kolar & Hodnik-Cadeç, 2012).

En los últimos años, se han desarrollado investigaciones que ponen de relieve la necesidad de estudiar conceptos subyacentes a los explícitos en la matemática escolar, entre ellos el infinito (Kattou et al., 2009; Kuntze et al., 2011; Montes & Carrillo, 2017; Zazkis & Mamolo, 2016;). En Liñán, Montes y Contreras (2015), se muestra cómo una maestra de 5º curso de Educación Primaria gestiona una sesión donde explica las posiciones relativas entre rectas. En esa sesión emerge la noción de infinitud de la recta, a través de la definición como línea de puntos sin curvas ni ángulos que no tiene principio ni fin, y la densidad de la recta, al comparar segmento y recta y discutir la definición de segmento y "los infinitos puntos que hay entre los dos extremos".

En el siguiente apartado analizaremos los cuatro ejemplos anteriormente indicados. Buscamos no solo mostrar la utilidad y necesidad del conocimiento del infinito para gestionar la construcción de conocimiento matemático, sino también las conexiones que entre diversas situaciones se establecen a través de la presencia del infinito.

3. El infinito y el profesor: cuatro ejemplos

Ciertas situaciones de enseñanza y aprendizaje en el aula llevan a reflexionar acerca de aspectos curriculares y sobre el conocimiento del profesor que las ha de gestionar. Los tres primeros ejemplos de esta sección ilustran situaciones de uso o reflexión en torno a conceptos matemáticos que aparecen en etapas distintas de la escolarización en España. El primer ejemplo es una discusión entre un niño de 10 años y su maestro a raíz de la inquietud por la existencia de un número mayor que cualquier otro. El segundo ejemplo es una entrevista de un profesor de Secundaria discutiendo sobre la igualdad de $5.\widehat{9}$ y 6, tras haber tratado ese mismo día los números periódicos en una clase de segundo de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). El tercero corresponde a otro momento de entrevista con el segundo profesor, donde se le pregunta cómo trata la convergencia de la progresión. Estos tres ejemplos permitirán evidenciar cómo la necesidad de un conocimiento profundo del contenido que es objeto explícito de enseñanza y aprendizaje requiere del conocimiento de un elemento implícito como es el infinito. El cuarto ejemplo indica cómo las concepciones del profesor acerca de las matemáticas y la percepción de su utilidad se relacionan de forma directa con su conocimiento y toma de decisiones.

3.1 Naturaleza infinita de los números

A: *Maestro, ¿cuál es el número más grande que existe?*
P1: *¿Tú cuál crees que es?*
A: *¡Un millón!*
P1: *¿No hay ninguno más grande?*
A: *Creo que no…*
P1: *¿Y qué pasa si a ese número le sumas uno?*
A: *Un millón uno.*
P1: *¿Y puedes sumarle uno a ese?*
A: Sí. *Si sigo sumando, ¿los números no acaban?*

Este episodio muestra a un alumno (A) de cuarto de Primaria abordando elementos de la construcción de los conjuntos numéricos, en particular, de la comprensión de la naturaleza infinita del conjunto de números naturales. Para gestionar la cuestión del alumno, este profesor (P1), en diálogo con él, utiliza la mayéutica como estrategia de gestión de la construcción de conocimiento matemático (Monje, Gómez & Pérez-Tyteca, 2012). Esta estrategia revela un conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), que permite inferir una concepción de la enseñanza ligada a un estilo investigativo. Al invitar al alumno a concretar un número, asumimos que P1 es consciente de que los alumnos en cuarto de Primaria deben ser capaces de comprender cualquier número natural. Dado el curso en que se encuentran (KMLS), el desarrollo que P1 promueve, buscando que el alumno desarrolle comprensión de la naturaleza infinita de los números naturales, puede ser consecuencia de que pretenda una comprensión conceptual profunda de un contenido curricular. En este caso, está haciendo una aproximación potencial a un contexto infinito (Moreno & Waldegg, 1991), permitiendo que el alumno pase de una concepción finitista de los conjuntos numéricos a una en la que el infinito tenga cabida (Sierpinska, 1987). Esto puede estar denotando un conocimiento (formal o informal) de características del aprendizaje de dichos contextos numéricos (KFLM).

Desde la perspectiva del conocimiento matemático de este profesor, al hacer uso del axioma de Peano que se basa en el principio de inducción, podemos inferir que posee conocimiento del tema 'números', en particular de propiedades y fundamentos de los números naturales. No sabemos cuán profundo o formal es su conocimiento acerca de las pruebas por inducción, pero parece claro que usa y conoce dicho esquema de prueba. Este conocimiento es de tipo sintáctico (KPM), ligado a la construcción de tipos de razonamiento matemático, concretado en la construcción de los números naturales.

Si bien el contenido explícito en este episodio es el relativo a números naturales, su gestión exige al profesor la movilización y uso de conocimiento relativo a un contenido matemático ausente del currículo de la etapa en la que enseña, como es el principio de inducción matemática, y en particular, del proceso infinito que éste sustenta.

3.2 Igualdad de números de periodo puro 9 y entero

E: *¿El* $5.\hat{9}$ *es igual a 6?*

P2: *Casi igual a 6.*
E: *Pero, ¿es igual?*
P2: *Sí.*
E: *Porque las fracciones son…*
P2: *Son iguales.*
E: *¿Y cuál es la distancia entre los dos, olvidando lo de las fracciones?*
P2: *¿La distancia? La distancia es tan pequeña, tan pequeña, ¿no?*
E: *Tan pequeña que…*
P2: *Que sí.*
E: *Que sí. Pero es pequeña, o sea, no es 0.*
P2: *Ínfima.*
E: *Y los alumnos, ¿crees que ellos serían capaces de entender la relación entre ambos?*
P2: *No. Son números que se escriben diferente, aunque la fracción generatriz les lleve a que los dos números son equivalentes. Les generaría mucho conflicto, por eso creo que no lo trabajaré en la próxima clase.*

(Extraído de Montes, 2015, p.164)

P2, el profesor de este episodio, es incitado por el entrevistador (E) a reflexionar sobre un ejemplo que emergió en una clase suya la semana anterior, donde trató la cuestión de la fracción generatriz de un número periódico, dejando abierta la discusión de la igualdad $5,\hat{9}= 6$. Entendemos que, al ser un contenido previamente tratado en clase, este profesor es consciente de la presencia en el currículo tanto de las fracciones como de las relaciones entre fracción y número decimal (KMLS). P2, asimismo, posee conocimiento acerca de las características del aprendizaje matemático (KFLM), asociado a la situación concreta. Parece ser un conocimiento informalmente construido, que le lleva a pensar que dicha igualdad generaría conflicto y a tomar una decisión sobre no abordar la situación en siguientes clases. Resulta llamativa la articulación entre el conocimiento de las características de aprendizaje (KFLM) de este profesor y su conocimiento acerca del tema (KoT) que trata. P2 afirma que a los alumnos "les generaría mucho conflicto" la "equivalencia" entre ambos números. Es interesante el uso de la palabra equivalencia, frente al más común de la palabra igualdad. Dicho uso se explica posiblemente por el conflicto que P2 parece experimentar al tratar la relación entre $5.\hat{9}$ y 6. En un primer momento, P2 establece la igualdad entre ambos números, posiblemente basándose en el uso de la fracción generatriz y denotando un conocimiento de procedimientos asociados a las fracciones. Sin embargo, al ser invitado a tratar la igualdad entre dos números como la distancia entre ambos, este profesor rehúye afirmar que la distancia es cero, usando la palabra "ínfima", como una forma de expresar que la diferencia tiene un carácter no nulo, pero denotando una naturaleza infinitesimal. Esto induce a pensar que P2 comprende de manera potencial (Moreno & Waldegg, 1991) la naturaleza infinita de las cifras decimales periódicas de $5.\hat{9}$. Así, el conocimiento del profesor de un elemento matemático que no se trata de forma explícita en la formación inicial, el infinito, tiene un reflejo en su comprensión de los elementos curriculares que debe abordar en su aula.

La posibilidad de plantear la ordenación de fracciones y números a través de su distancia en la recta numérica es una opción metodológica respecto de la enseñanza de las matemáticas (KMT), que el profesor conoce y parece descartar, independientemente de su potencial de cara a la comprensión de la situación (Rothery & Flores-Peñafiel, 2014), ya que explicita la conexión entre contenidos matemáticos de aritmética y de medida. Dicha conexión interconceptual entre aritmética de fracciones y medida, que el profesor parece establecer (aunque sería coherente tratar la igualdad como tal en ambos contextos), denota un conocimiento de la estructura matemática (KSM), en la que la naturaleza infinita de las cifras decimales del desarrollo de la fracción genera un conflicto para el profesor. El conflicto se genera al dotar el profesor de diferentes significados a la idea de igualdad, tratándola de forma dual: aproximación e identidad. Este conocimiento es una plasmación, sobre el contenido matemático, de un elemento sintáctico y transversal al quehacer matemático como es la idea de igualdad y su polisemia (Vermeulen & Meyer, 2017), denotando conocimiento sobre la práctica matemática (KPM).

La percepción de P2 de la naturaleza infinita de los decimales de un número periódico puro, en particular en el caso del $0.\hat{9}$, condiciona todo su conocimiento acerca de la situación, y, por ende, su gestión como profesor de la misma. De nuevo, observamos que la forma en que un profesor conoce un contenido no presente en el currículo, como es el infinito, condiciona el aprendizaje de sus estudiantes.

3.3 Aproximación metodológica a la suma de series

E: *¿Cómo explicarías que la suma de sucesivas potencias de 1/2 es finita?*
P2: *Con trocitos de papel.*
E: *¿Trocitos de papel?*
P2: *O una lupa. Con un aumento que nunca puede pasar uno.*
E: *¿Cómo? Explícame más el ejemplo, porque no lo veo claro.*
P2: *Por ejemplo, dices que empezamos en 1/2, ¿no? Por ejemplo, medio metro.*
E: *El principio, el primer paso es de medio metro, vale.*
P2: *Vale. De medio metro, coger un metro, coger un metro y coger medio metro de papel y ponerlo, y después otro medio, y otro cuarto, y otro medio* [del cuarto], *otro medio* [del anterior], *otro medio* [ídem]*... Y hacerles ver que ampliando eso ¿vale? Que ampliando ese trozo que queda, te lo puedes llevar también a un metro. ¿Vale? Haces la comparativa de que el trozo que queda vuelve a ser un metro. La mitad, la mitad, así una y otra vez, vuelve a ser un metro, un metro y que nunca pasa de ahí. ¿Vale?* [recrea el proceso con sucesivas mitades de trozos de papel]
E: *¿Y cuánto da la suma entonces?*
P2: *Si usas la fórmula para las progresiones, es 1.*
E: *Y de la forma que tú lo haces, ¿con los trocitos de papel?*
P2: *Pues vemos que vamos acercándonos a 1, y si nos imaginamos que seguimos infinitas veces, pues llegamos casi casi a dos.*
E: *Casi, casi, pero no llega, ¿no?*
P2: *No, no llega a llegar, pero está infinitamente cerca.*

(Extraído de Montes, 2015, p.146)

Este episodio es parte de la entrevista a P2 sobre aproximaciones metodológicas a la suma de las infinitas potencias de 1/2. Resulta interesante cómo, en un contexto matemáticamente diferente al anterior, si bien relacionados por la aparición del infinito en ambos, P2 interactúa con el problema de una manera similar a la anterior. Encontramos dos partes diferenciadas, la primera, ligada a cómo abordar la suma de la progresión, y la segunda relativa al resultado de la misma.

Si observamos esta segunda parte, podemos ver que P2 conoce un procedimiento (‘la fórmula’) para calcular la suma de una progresión, mostrando conocimiento del tema (KoT). Asimismo, es coherente con la convergencia de la sucesión que plantea arriba en un registro de representación gráfico recreado a través del cortado de papel. Es interesante cómo, a través del uso de múltiples representaciones (Dreher & Kuntze, 2015), podemos profundizar en la coherencia del conocimiento del profesor respecto a la situación. Vemos que, en un registro algebraico, el profesor acepta como válido el resultado de la suma como 1, mientras que cuando el registro pasa al gráfico, donde se pone en juego la comprensión del proceso infinito, P2 moviliza una visión potencial del infinito en dicho proceso. Al explicitar P2 ambas sumas, llega a resultados que hacen pensar en cierta contradicción: en el registro algebraico la suma es 1, y en el gráfico 'no llega a serlo'. Si bien P2 conoce ambos registros, ergo muestra conocimiento del tema (KoT), o bien no conecta ambas representaciones, o bien asume que la misma serie puede tener dos comportamientos dependiendo del registro en que se trabaje. El conocimiento, o desconocimiento en este caso, de este tipo de conexión interconceptual, también responde a un (des)conocimiento ligado al tema (KoT). P2 demuestra coherencia con el episodio anterior en el tratamiento de la convergencia (cuando el entrevistador le invita a trabajar desde la perspectiva de la medida), al expresarse en este caso en términos de distancia (e.g. 'llegamos casi casi a dos'), de forma que, en el caso de haber explorado dicha conexión, posiblemente se hubieran podido obtener indicios de conocimiento de una conexión interconceptual a través del conocimiento del infinito, denotando conocimiento de la estructura matemática (KSM). De nuevo, el uso que hace de la idea de igualdad denota conocimiento de la práctica matemática (KPM).

Primero el profesor explicita una aproximación metodológica, basada en el cortado de papel, que le permitiría abordar la suma de series, mostrando conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), intrínsecamente relacionado con la situación a discutir. Es interesante la estrecha relación de la estrategia del profesor ante la suma de series, estableciendo con cada corte la comparación de la suma parcial con el total de la suma, induciendo la idea de convergencia hacia ese punto del que "nunca pasa". Al describir la estrategia, el profesor se expresa en términos de "hacerles ver", recreando en su argumentación la imagen del concepto (Tall & Vinner, 1981) que desea construir en sus estudiantes, evidenciando conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), intrínsecamente ligado a la generación de imágenes mentales sobre los procesos infinitos. Esta construcción de imágenes mentales estará íntimamente relacionada con la forma en que el profesor conozca los procesos infinitos. En particular, en la discusión sobre la convergencia de la suma, P2 parece mostrar un conocimiento del infinito potencial, por lo que no resulta extraño que la imagen del concepto que pretende potenciar en sus estudiantes tenga las mismas características.

Observamos de nuevo un momento del episodio donde, si el contenido se aborda con una perspectiva no algebricista, sino incidiendo en los fundamentos epistemológicos del concepto, el infinito cobra relevancia como parte del conocimiento del profesor. Vemos por tanto que dicho conocimiento fundamenta parte de la toma de decisiones en el diseño de la estrategia de enseñanza, dando sentido a la interconexión de los diferentes subdominios de conocimiento especializado.

3.4 Discusión explícita sobre el infinito

E: *¿Qué es para ti el infinito?*

P2: *Para mí hay una frase que lo define, "la creación del hombre para explicar lo inexplicable". Esa definición la uso con mis alumnos, para que vean que* *es algo artificial y abstracto que en matemáticas usamos, pero que no van a encontrarse luego en el día a día, y que a nivel práctico no tiene utilidad, porque no puede comprobarse empíricamente.*

E: *¿Es por eso que evitas algunas cosas, como lo del* $5.\hat{9}$*?*

P2: *Claro, a ver…las matemáticas son una ciencia que sirve, sobre todo, para usarse en otras ciencias. Y al final lo que necesitas es usar la fórmula bien, aunque comprendas la situación. Por eso meterme a hablar del infinito, además de confundirles, es algo que para ellos no va a ser útil.*

(Extraído de Montes, 2015, p.187)

En este episodio observamos indicios que permiten poner de relieve la interrelación de las creencias de P2 sobre el contenido, con las concepciones sobre la matemática y con decisiones sobre la forma de abordar determinados contenidos. La caracterización de las matemáticas según su utilidad, responde a una concepción instrumentalista (Ernest, 1989). La definición que P2 adopta del concepto es, por otro lado, ligada a una actitud intuitiva empírica (Sierpinska, 1987) hacia el infinito, donde lo relevante es la obtención de un resultado, evitando el planteamiento de cuestiones epistemológicas. Estas dos visiones de P2 de las matemáticas y del concepto de infinito son compatibles, ya que, desde una perspectiva de las matemáticas ligada a la aplicación en otras disciplinas, carece de sentido plantearse cuestiones ligadas a un nivel de abstracción que puede no parecer útil de cara a obtener resultados de problemas concretos.

Resulta relevante el hecho de que la percepción del profesor de ambos elementos (matemáticas e infinito), condicionan no solo la aproximación metodológica a la enseñanza del contenido matemático presente en el currículo, sino también el tipo de aprendizaje que este profesor fomenta en sus estudiantes. Esto muestra cómo las concepciones acerca de las matemáticas condicionan el conocimiento matemático del profesor (MK), así como su conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM). Asimismo, su conocimiento parece llevar al profesor a generar unas expectativas de aprendizaje esperadas, haciendo una interpretación propia de los estándares de aprendizaje evaluables, en función del trabajo con fórmulas, ligado a lo procedimental, evitando la generación de una reflexión profunda a nivel conceptual. Esto supone que el profesor ha construido un conocimiento de estándares de aprendizaje matemáticos (KMLS), basado en la percepción de la matemática.

4. Discusión y reflexiones finales

Las investigaciones que abordan la caracterización del conocimiento del infinito son escasas, especialmente en relación con el (conocimiento del) profesor. En este trabajo mostramos que el profesor no solo requiere saber más que sus alumnos, debe conocer más en profundidad los conceptos matemáticos que enseña (Ma, 1999). Este conocimiento profundo de las matemáticas implica que la matemática que el profesor puede/debe conocer es diferente de la que se espera que el alumno conozca, no solo en cantidad, ni en profundidad, sino también en los objetos matemáticos involucrados.

Hemos visto cuatro ejemplos de situaciones relativas a contenidos incluidos en el currículo de Primaria, Secundaria, y Bachillerato, para cuya gestión es necesario movilizar conocimiento especializado de múltiples naturalezas. Más allá de reafirmar la naturaleza compleja del conocimiento del profesor de matemáticas (Ponte, 1994), estos ejemplos permiten evidenciar cómo dicha complejidad se articula, ligando la forma en que los profesores conocen los conceptos matemáticos con su forma de comprender elementos sintácticos, que les permiten relacionar esos conceptos con otros. Dicha articulación de la complejidad no solo se refiere al conocimiento matemático, sino también permite relacionar ese conocimiento matemático con el conocimiento didáctico del contenido a ser enseñado, en este artículo a través del conocimiento del profesor acerca del infinito. Aquí resulta relevante el hecho de que el concepto que nos permite comprender las características del conocimiento del profesor es el de infinito, concepto que no recibe atención directa en la escolarización, y que suele estar ausente de los programas de formación inicial de maestros. Observando el segundo, tercer y cuarto ejemplos, tenemos una muestra de que también podemos obtener evidencias del sentido de las acciones del profesor a través de su compresión del infinito. Esto se relaciona con la naturaleza de 'gran idea' (Kuntze et al., 2011) que posee el infinito en los procesos de educación matemática. Una mirada detallada y profunda a nociones de índole transversal como el infinito, o la proporcionalidad, permitirá explorar elementos que permiten comprender la complejidad del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En la línea de la exploración del conocimiento profesional acerca del infinito, entendemos que será útil conectar investigaciones de corte cognitivista, centradas en cómo se conoce el infinito (e.g. Belmonte & Sierra, 2011), con investigaciones acerca de las diferentes dimensiones de conocimiento profesional sobre el infinito que se movilizan en la actividad docente (Montes & Carrillo, 2017). Un enfoque de la enseñanza de las matemáticas con comprensión, con significado por parte de los estudiantes, ha de incluir el trabajo con ideas clave en el pensamiento matemático. Esto incluye las mencionadas 'grandes ideas', así como ideas que puedan considerarse precursoras de aquellas. Aunque trabajar con estas ideas no siempre puede realizarse de un modo directo o explícito (ni así lo recoge el currículo), un conocimiento del profesor de la expresión y la relación de estas ideas con diferentes temas matemáticos posibilita la creación de oportunidades de aprendizaje para sus estudiantes en las que se evidencien elementos esenciales de dichos temas, al tiempo que características de estas ideas, o aproximaciones a estas.

Estas reflexiones ayudan a proyectar una formación inicial (y continua) del profesorado en la que el conocimiento a construir es complejo, conectado internamente y compuesto por elementos propios del quehacer matemático. Este conocimiento del profesor debería dirigirse a y procurar que, en el nivel educativo correspondiente, los alumnos puedan construir una versión adecuada de esos elementos.

Referencias

Belmonte, J. L., & Sierra, M. (2010). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(2), 139-171.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bass, H. (2017). Designing opportunities to learn mathematics theory-building practices. *Educational Studies in Mathematics, 95*(3), 229-244.

Carrillo, J., & Contreras, L. C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. *Educación Matemática*, *7*(3), 79-92.

Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. C., & Climent, N. (2017). El conocimiento del profesor desde una perspectiva basada en su especialización: MTSK. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *22*, 185-206.

Dreher, A., & Kuntze, S. (2015). Teachers' professional knowledge and noticing: the case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 88*(1), 89-114.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En P. Ernest, (Ed.), *Mathematics teaching*: *the state of the art* (pp. 249-254). Londres, Reino Unido: Falmer Press.

Filloy, E., Rojano, T., & Solares, A. (2003). Two meanings of the 'equal' sign and senses of comparison and substitution methods. En N. Pateman et al. (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 223-230). Honululu, EEUU: PME.

Flores, E., Escudero, D. I., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Juter, K. (2008). Students' concept development of limits. En D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2320-2329). Larnaca, Chipre: University of Cyprus.

Kattou, M., Michael, T., Kontoyianni, K., Christou, C., & Philippou, G. (2009). Teachers' perceptions about infinity: a process or an object. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1771-1780). Lyon, Francia: ERME.

Kuntze, S., Lerman, S., Murphy, B., Kurz-Milcke, E., Siller, H. S., & Winbourne, P. (2011). Professional knowledge related to big ideas in mathematics. An empirical study with pre-service teachers. En M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2717-2726). Rzeszow, Polonia: ERME.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, EEUU: Lawrence Erlbaum.

Manfreda-Kolar, V., & Hodnik-Čadež, T. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(3), 389-412.

Liñán, M. M., Montes, M., & Contreras, L. C. (2015). Conocimiento sobre la recta de una maestra de tercer ciclo de educación primaria. En C. Fernández, M. Molina & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX*, (pp. 335-342). Alicante: SEIEM.

Ministerio de Educación (2014). Real Decreto 126/2014, por el que se establece el currículo básico de la educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 52,* 19349-19420.

Ministerio de Educación (2015). Real Decreto 1105/2014, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado, 3,* 169-546.

Monje, J., Gómez, B., & Pérez-Tyteca, P. (2012). El uso de la mayéutica en la transferencia del conocimiento matemático. El caso de una tarea de razón y proporción. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez & A. Maz (Eds.), *Investigaciones en pensamiento numérico y algebraico e historia de la educación matemática 2012* (pp. 23-31). Valencia: SEIEM.

Montes, M. (2015). *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito. Un estudio de caso.* Saarbrücken, Alemania: Publicia.

Montes, M., & Carrillo, J. (2017). Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito. *Bolema, 31*(57), 114-134.

Moreno, L., & Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics, 22*(5) 211-231.

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 195-210). Lisboa, Portugal: PME.

Rothery, T. G., & Flores-Peñafiel, A. (2014). Orden y distancia de fracciones y decimales en la recta numérica: el caso de Abigaíl. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 5,* 73-90.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., & Pino-Fan, L.R. (2017). What makes teacher knowledge specialised? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Schwab, J. J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury & N. J. Wilkof (Eds.), *Science, curriculum, and liberal education. Selected essays* (pp. 229-272). Chicago, EEUU: University of Chicago Press (original de 1961).

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 371-397.

Skott, J., van Zoest, L., & Gellert, U. (2013). Theoretical frameworks in research on and with mathematics teachers. *ZDM, 45*(4), 501-505.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Vermeulen, C., & Meyer, B. (2017). The equal sign: teachers' knowledge and students' misconceptions. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 21*(2), 136-147.

Yopp, D. A., Burroughs, E. A., & Lindaman, B. J. (2011). Why it is important for in-service elementary mathematics teachers to understand the equality .999…=1. *The Journal of Mathematical Behavior, 30,* 304-318.

Zazkis, R., & Mamolo, A. (2016). On numbers: Concepts, operations and structure. En A. Gutiérrez, G. C. Leder & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. The journey continues* (pp. 39-71). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Referencias de los autores

Miguel Montes, Universidad de Huelva (España), miguel.montes@ddcc.uhu.es

Luis Carlos Contreras, Universidad de Huelva (España), lcarlos@uhu.es

José Carrillo, Universidad de Huelva (España), carrillo@uhu.es

Maestro, ¿cuál es el número más grande que existe? Trascendiendo el currículum en la exploración del conocimiento especializado del profesor

Miguel Montes, Universidad de Huelva

Luis Carlos Contreras, Universidad de Huelva

José Carrillo, Universidad de Huelva

In this paper, we consider primary and secondary teachers' professional knowledge. We take the widely accepted perspective of which areas of mathematics knowledge they should have in order to be able to manage the kinds of demands made upon this knowledge that tend to arise in the classroom. Such demands are usually circumscribed by the syllabus of the educational phase. Given a teaching content such as the concept of infinity, we demonstrate how this knowledge requires familiarity with out-of-syllabus areas and must go beyond these confines. Over the last 40 years, infinity has been the object of various studies into mathematics education as a concept for students to learn. It has been given central importance in school mathematics due to the strength of its cross-curricular nature. However, the concept has received scant attention from the perspective of the teacher. We consider four examples of reflections taken from interviews involving two teachers discussing contexts connected to four elements of mathematics: the infinite nature of numbers; the equality of $.\hat{9}$ and integers; the sum of series; and an explicit discussion of the nature of infinity. The interviews were analysed using *The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* framework (Carrillo, Montes, Contreras & Climent, 2017). Each example enables us to highlight the types of knowledge, both mathematical and pedagogical content, used by the two teachers in order to meet the demands of the situation as professionals of mathematics education. The analysis and subsequent discussion illustrate the complexity, coherence and multidimensionality of the knowledge the two teachers bring into play in each interview. We show how the teachers' knowledge of the concept can condition the kind of methodological approach in teaching-learning situations featuring infinity, and the kind of learning they aim to promote. We conclude that teachers need to think deeply about the content for which they are responsible, and that this should involve thinking beyond the syllabus. As such, a significant implication for teacher-training courses is the need of structure around the mathematics that teachers should know, a requirement that is

quantitatively and qualitatively different to that which the students should know. Consequently, we need to contemplate including in teacher-training programmes concepts like infinity that are otherwise outside the coverage of the primary syllabus, but necessary for a full understanding of it.