Enseñanza del máximo común divisor mediada por un entorno computacional en un Grado de Ingeniería Informática

Carmen Ordóñez, Universidad de Jaén (España)

Lourdes Ordóñez, Universidad de Jaén (España)

Ángel Contreras, Universidad de Jaén (España)

Enseñanza del máximo común divisor mediada por un entorno computacional en un Grado de Ingeniería Informática

Resumen

Esta investigación establece el significado institucional de referencia del máximo común divisor para estudiantes del Grado en Ingeniería Informática a través de un estudio epistemológico. Ello nos ha permitido crear una herramienta de análisis didáctico que posibilita el estudio de las características del significado pretendido en manuales representativos, a pesar de la diversidad curricular propia de la etapa universitaria. La comparativa entre manuales muestra una importante diferencia entre un texto que trabaja en entornos computacionales, donde aplicaciones informáticas y procedimientos son relevantes; frente a otro, en el que se realizan procesos de generalización, pero no se consideran aplicaciones. Destacan las restricciones en los dominios de definición y la ausencia de demostraciones en el libro más recomendado. Esto permite extraer carencias de significado y mostrar una tendencia en la enseñanza hacia la preeminencia de lo particular frente a lo general, fuente de conflictos semióticos potenciales.

Palabras clave: Máximo común divisor; generalización; análisis de manuales; entorno computacional; Grado en Ingeniería Informática.

The teaching of the greatest common divisor mediated by a computational context in a Computer Engineering Degree

Abstract

Through an epistemological study, the study reported establishes the institutional meaning of reference of the greatest common divisor for students enrolled in the Computer Engineering Degree. The study has allowed us to create a didactic analysis tool that facilitates the study of the characteristics of the meaning intended in representative textbooks, despite the curricular diversity typical at university. A comparison between textbooks explores an important difference between one text that moves within computational environments - where computer applications and procedures are the context - with another text, where generalizations are made, but applications are not considered. Restrictions in definitions given and the absence of demonstrations in the most recommended textbooks are noteworthy. This allows extracting the shortcomings of meaning and highlights a tendency in teaching towards prioritizing the specific rather than the general, what is in turn a source of potential semiotic conflicts.

Keywords: Greatest common divisor; generalisation; analysis of textbooks; computational environments; Computer Engineering Degree.

1. Introducción

La Didáctica del Álgebra Superior en el área de las ingenierías es un campo poco explorado, pero despierta el interés del investigador por diversos motivos. En primer lugar, a lo largo de años de experiencia como docentes en Álgebra, en carreras de ingeniería y de matemáticas, hemos constatado la dificultad del alumnado en el aprendizaje de la materia, dado el alto nivel de abstracción requerido al ingresar en la universidad (Dubinsky & Yiparaki, 2000; Harel & Sowder, 2007; Lacués, 2011). En segundo lugar, el alumnado del Grado en Ingeniería Informática es un colectivo numeroso debido al auge de las Ciencias de la Computación y, además, la enseñanza y aprendizaje de la Matemática está mediada por el uso del ordenador, lo que le concede características didácticas especiales (Balacheff, 1993; Ordóñez, Ordóñez & Contreras, 2013, 2014, 2015; Ordóñez, Ordóñez, Contreras & Ruiz, 2017).

Con el marco teórico que se utiliza en esta investigación, se han realizado trabajos acerca de la enseñanza de conceptos de análisis matemático, en estudiantes universitarios de primer curso de la Universidad de Jaén, usando el programa Mathematica (ver, e.g., Contreras et al., 2005), que muestran una experiencia de uso de tecnología computacional en la enseñanza. Cabe señalar la importancia de la investigación en Didáctica de la Teoría de Números por razones ecológicas, esto es, su relación con otros temas curriculares y aplicaciones prácticas. El estudio de los números primos y del máximo común divisor (en adelante mcd), son esenciales en la construcción de códigos, claves de dominio público y, en general, en disciplinas como la Criptografía y Seguridad informáticas, siendo así relevantes sus aplicaciones.

En el Grado en Ingeniería Informática, cada administración y universidad organiza las asignaturas, sus contenidos, competencias, etc., según las directrices del Ministerio de Educación (2009). Los contenidos relativos al mcd pueden abordarse en distintas asignaturas (Matemática Discreta, Estructuras algebraicas, Algebra I,…), según la titulación o universidad (Ordóñez et al., 2015). Todo esto proporciona gran variabilidad que dificulta el estudio del mcd como problema en Didáctica de la Matemática. Así encontramos, por un lado, alto nivel de abstracción en una temática básica para el estudiante; el uso del ordenador y su influencia en la enseñanza y aprendizaje en el estudio de Teoría de Números; y por otra, gran variabilidad en los currículos y asignaturas de distintas universidades. Todo ello nos conduce a formular diversas preguntas: ¿Cuáles son las características específicas de la enseñanza y aprendizaje del mcd en el Grado en Ingeniería Informática? y ¿a través de qué elementos u objetos, representativos, implicados en dicha enseñanza y aprendizaje podemos detectarlas? Para dar respuesta, es necesario determinar cómo analizar la actividad matemática, lo cual requiere usar un marco teórico con herramientas para abarcar los distintos aspectos de esta actividad. Consideramos que el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero & Font, 2007) con los constructos de configuración epistémica, significado institucional de referencia y significado institucional pretendido, entre otros, puede dar respuesta a las preguntas anteriores.

En la sección que sigue, se exponen brevemente los antecedentes. A continuación, se destacan los elementos del marco teórico (EOS), el problema específico de investigación y la metodología. Esto nos lleva a establecer distintas configuraciones epistémicas (en adelante, CE) y, basándonos en ellas, crearemos una plantilla de análisis didáctico, utilizando las entidades primarias que propone el EOS, con objeto de disponer de un instrumento que permita el análisis y comparación de manuales. Las últimas secciones corresponden a la discusión de resultados y conclusiones.

2. Antecedentes

El estudio del mcd aplicado a ingenierías, cuando está mediado por un entorno informático, es un campo novedoso en Didáctica de las Matemáticas. Relacionada con la divisibilidad hay investigaciones dirigidas a niveles educativos anteriores (Bodí, Valls & Llinares, 2005), para maestros en formación (Muñoz-Catalán & Carrillo, 2007) y en Álgebra Superior para estudiantes de Matemáticas (Hausberger, 2018). Este último, desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, estudia cuestiones de divisibilidad en distintos dominios de integridad. Menciona la tarea de “delinear clases de anillos”, de importancia en la caracterización del significado institucional de referencia del mcd:

> El dominio matemático en juego se caracteriza por una estructura ecológica en forma de una cadena de inclusiones de las diferentes clases de anillos (…) lo que afecta a los tipos de tareas y las técnicas correspondientes. Delinear estas clases, y por lo tanto la extensión de los conceptos, es una parte importante de las tareas asignadas a los estudiantes. (p. 81)

Otros aspectos relacionados con la Didáctica del Álgebra Superior son la demostración y el lenguaje simbólico. En los últimos años, diferentes autores han hecho estudios en el nivel universitario en los que se han puesto de manifiesto dificultades de los estudiantes en torno a la demostración, incluso en aquellos matriculados en asignaturas de Álgebra Abstracta. Así, Recio y Godino (2001) concluyen que alumnos recién ingresados en la Universidad tienen un bajo rendimiento en actividades de demostración; Camacho, Sánchez y Zubieta (2014), analizando las justificaciones de los alumnos al leer demostraciones, obtienen que sus habilidades para realizar esta tarea resultan pobres, pues apelan solo al contenido y no a la estructura lógica. Respecto del uso del lenguaje simbólico, propio de los estudios universitarios, Dubinsky y Yiparaki (2000) constatan conflictos con cuantificadores y otros símbolos matemáticos, incluso en alumnos que ingresan en carreras de Ingeniería (Lacués, 2011).

Balacheff (1993) ya señala que si bien la enseñanza está mediada por un entorno computacional, no está exenta de dificultades, a pesar del potencial de las tecnologías informáticas como manera de mejorar la enseñanza y aprendizaje de matemáticas. En esta misma línea, Harel y Sowder (2007) constatan la necesidad del uso de nuevas tecnologías, aunque dejan abierta la pregunta acerca de la influencia de estas tecnologías en el aprendizaje o desarrollo de una noción avanzada de demostración matemática; “en vista del auge de las tecnologías electrónicas en educación, especialmente en sistemas informáticos de álgebra (…)”, estos autores se preguntan sobre “el papel del álgebra simbólica en la reconceptualización de las matemáticas en general” (p. 824).

Nuestra investigación forma parte de un proyecto de tesis en el que se analiza la influencia del software Mathematica en la enseñanza y aprendizaje, en el contexto de la Teoría de Números, para estudiantes del Grado en Ingeniería Informática. Se han obtenido resultados relativos a los significados personales de dichos estudiantes, en el estudio de una demostración de aritmética modular usando Mathematica (Ordóñez et al., 2013, 2014; Ordóñez et al., 2017); y respecto al significado institucional, se analizaron elementos lingüísticos en manuales universitarios (Ordóñez et al., 2015). Otras investigaciones, respecto del análisis de manuales, que utilizan también el EOS, son Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010), Del Pino-Ruiz y Estepa (2017) y Gea, Batanero, Cañadas y Contreras (2014), en las cuales se hacen operativas las entidades primarias, propuestas en dicho marco teórico, en el estudio de manuales.

3. Marco teórico

En el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2002; Godino, Batanero & Font, 2007; Godino et al., 2015) se consideran los significados de los objetos matemáticos como emergentes de los sistemas de prácticas. Si las prácticas son compartidas en el seno de una institución, hablamos de significados institucionales. En nuestra investigación analizamos el significado institucional del mcd a través del análisis de manuales, que es parte importante del significado pretendido; previamente será necesario determinar el significado de referencia (Godino et al., 2007). También observamos posibles dificultades y errores en términos de *conflictos semióticos* que Godino (2002) define como “toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas.” (p. 258).

Para describir y analizar la actividad matemática y sus procesos de comunicación, el EOS considera una primera clasificación de los objetos intervinientes y emergentes de la actividad matemática en entidades elementales o primarias: situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos (Godino, 2002). Estas entidades a su vez se unen y organizan dando lugar a configuraciones epistémicas (CE), referidas a significados institucionales, o cognitivas, referidas a significados personales. Cada cambio significativo en algún elemento del significado produce un nuevo tipo de tarea que activa una parte del significado y, por tanto, una nueva CE. Todas estas configuraciones y sus relaciones dan lugar al significado global. Por otra parte, los objetos matemáticos se pueden considerar desde dimensiones duales dependiendo del juego de lenguaje en que participan. El EOS interpreta la distinción entre extensivo-intensivo como equivalente a la distinción entre el ejemplar (algo particular, que se determina por sí mismo) y el tipo (objeto genérico que define una cierta clase o conjunto más o menos amplio de objetos). Así, se considera la disposición matemática hacia la generalización y se busca explicar conflictos en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático derivados de la confusión entre ejemplar y tipo.

También es útil para este trabajo la noción de idoneidad didáctica de un proceso de instrucción, esto es, el grado en que dicho proceso reúne características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta circunstancias y recursos disponibles. La idoneidad se aplica a procesos de instrucción puntual (sesión de clase), global (propuesta curricular) o a aspectos parciales, como un material didáctico (Godino, 2013), en nuestro caso: libros de texto. Esta herramienta permite el paso de una didáctica descriptiva-explicativa a una didáctica normativa; esto es, una didáctica que se orienta hacia la intervención en el aula. Dicha idoneidad se articula a través de seis componentes que se corresponden con las facetas: ecológica, mediacional, interaccional, afectiva, cognitiva y epistémica. Para cada una, Godino (2013) ha desarrollado indicadores que permitirán emitir una valoración didáctica para cada manual. Como señalan Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi (2014), el juicio sobre la idoneidad didáctica del proceso de estudio se aplica a cada faceta, según la presencia o ausencia de indicadores empíricos de idoneidad de modo que la valoración tiene una cierta objetividad.

4. Problema de investigación y metodología

En la introducción planteamos preguntas que nos llevan a determinar características acerca del significado institucional pretendido del mcd para el Grado en Ingeniería Informática. Además, nos cuestionamos sobre los elementos u objetos representativos implicados en la enseñanza y aprendizaje de esta temática y que pueden mostrar dichas características. En este sentido, Conejo, Arce y Ortega (2015) señalan la importancia de analizar los libros de texto para acceder a las prácticas educativas en el aula y al conocimiento matemático que la sociedad considera pertinente.

El objetivo de esta investigación es determinar características del significado institucional pretendido del mcd, mostrado en manuales para el Grado en Ingeniería Informática utilizando las herramientas del EOS. Concretamente queremos observar qué

CE están presentes en los manuales con objeto de poner de manifiesto tendencias en la dualidad particular-general, y en qué forma afectan a la enseñanza el uso de recursos informáticos y el tratamiento de las aplicaciones que corresponden a esta titulación. Así, caracterizaremos el significado institucional de referencia del máximo común divisor y lo compararemos con el pretendido en manuales, a fin de obtener características y diferencias entre manuales. Haremos todo esto con una metodología de análisis de la actividad matemática basada en cinco niveles (Font, Planas & Godino, 2010). En este trabajo nos centramos en los dos primeros niveles (análisis de tipos de problemas y de sistemas de prácticas) y en el quinto nivel (idoneidad didáctica).

En primer lugar, realizamos un estudio epistemológico basándose en los distintos dominios de definición, en los que se obtienen resultados relativos al mcd, conectándolo con el desarrollo histórico del Álgebra Abstracta. De este estudio emerge el significado institucional de referencia, entendido como CE. La segunda fase consiste en analizar los significados institucionales pretendidos en manuales universitarios recomendados para estudiantes del Grado en Ingeniería Informática. Siguiendo Ordóñez (2011), elaboramos una plantilla para unificar el estudio del mcd que desarrolle cualquier manual, salvando la variabilidad existente. El análisis de manuales comienza con una selección de ocho libros de texto, según Ordóñez et al. (2015): se escogen tres universidades españolas situadas en los primeros puestos del Ranking Académico (Shanghái) de Universidades del Mundo, en la disciplina de Ciencias de la Computación, en 2014 y 2015 (inicio de nuestra investigación) y que se han mantenido en los primeros puestos de las estatales hasta 2018: Universidades de Granada, Jaén y Politécnica de Madrid. A través de sus páginas web, localizamos las guías académicas 2017-18 de los Grados en Ingeniería Informática, Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas y Grado en Matemáticas e Informática, para obtener las asignaturas con temas de divisibilidad. Revisamos las bibliografías y elegimos los textos más recomendados.

Mostramos el análisis de dos manuales. M1 (Rosen, 2004) es uno de los dos recomendados en la bibliografía básica por las tres universidades para el Grado en Ingeniería Informática, el de mayor número de ediciones y de ahí el más representativo. M2 (Cohn, 2000) aparece en la bibliografía básica del Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas de la Universidad de Granada y en la complementaria de Jaén en el Grado en Ingeniería Informática; constituye el soporte en la comparación con M1 respecto del significado institucional pretendido en torno al mcd.

5. Configuraciones epistémicas del mcd en sus dominios de definición

El estudio de la divisibilidad y del mcd de números enteros fue tratado por la matemática griega. Euclides, en los libros VII, VIII y IX de los Elementos, estableció los conceptos de divisor, múltiplo y primo, además de demostrar que el conjunto de los primos es infinito y proporcionar distintos métodos para el cálculo del mcd, tanto a través del teorema fundamental de la Aritmética como del algoritmo de Euclides. La aparición del Álgebra Abstracta a lo largo del siglo XIX, y su desarrollo en el XX, ofreció una perspectiva que enriqueció esta teoría. Acerca de cómo surgieron las estructuras algebraicas, Kline (2012) expone clases de objetos que se distinguieron y clasificaron según las propiedades de las operaciones definidas sobre ellas, con lo que se introdujeron nociones como grupo, anillo, ideal y cuerpo para identificar conjuntos de propiedades; “solo durante las últimas décadas del siglo los matemáticos se dieron cuenta de que podían ascender a un nivel de eficacia nuevo integrando juntas muchas álgebras hasta entonces dispersas, por abstracción de su contenido común” (p. 1500).

En el Álgebra Abstracta, aparecieron anillos más amplios como son: los dominios de integridad (DI), dominios de factorización única (DFU), dominios de ideales principales (DIP) y dominios euclídeos (DE). En la clasificación comenzaremos desde el dominio más general (DI), estableciendo definiciones, propiedades, etc. en la forma más genérica, para luego observar los cambios que se producen y que a través de diferentes restricciones darán lugar a las CE. El gráfico de la Figura 1, muestra, de forma intuitiva, la relación existente entre ellos. Sin embargo, hay que tener en cuenta que en la enseñanza del mcd se realiza el proceso inverso. El estudio en ambientes más generales permite una comprensión de lo que sucede en ambientes más restrictivos, lo que confiere a los primeros gran relevancia (para comprender y distinguir los conceptos de primo e irreducible necesitamos ir a DI, donde ambos son distintos).

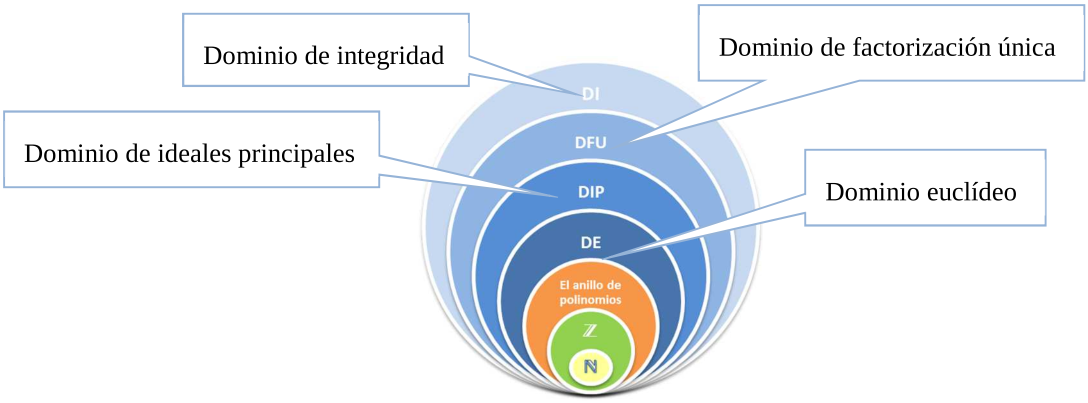

Figura 1. Relación entre dominios de definición

El mcd está presente en los currículos de todas las etapas educativas (desde el tercer ciclo de educación primaria); de ahí que la Figura 1 incluya el conjunto de los naturales como punto de partida (color amarillo). Hablamos así de configuración epistémica inicial (CE_Inicial), que sería la que Euclides postuló. A nivel universitario, el mcd aparece en las memorias de los grados de Matemáticas (donde se trabaja en los dominios con tonos de azul, Fig. 1) y en Ingeniería Informática, que se restringe al anillo de los enteros o de polinomios (verde y naranja, Fig. 1). Sin embargo, el estudio del mcd en cada dominio de definición más abstracto aporta características respecto al significado institucional de referencia; por ejemplo, tenemos definiciones generales en DI, argumentaciones elegantes matemáticamente en DIP, o procedimientos en DFU y DE. Estas cuestiones emergen con el establecimiento de las distintas CE. En cada una señalamos componentes de la actividad matemática encontradas, que resumimos en tablas. Indicamos también cómo se relaciona cada CE con la CE_Inicial; esto es, qué aporta cada una con respecto a lo aprendido en etapas anteriores, similitudes y diferencias. Por último, discernimos acerca del uso de la faceta dual particular-general que interviene en cada configuración, lo cual da “una medida” del grado de abstracción utilizado en el proceso de enseñanza y aprendizaje algebraicos.

5.1. Configuración epistémica del mcd en dominios de integridad

Entendemos por dominio de integridad a todo anillo conmutativo, D, sin divisores de cero; es decir, verificando que si $ab=0$ entonces $a=0$ o $b=0$. En estos dominios importa: establecer las principales definiciones que intervienen en divisibilidad (ver conceptos en Tabla 1), diferenciar entre elementos primos e irreducibles y estudiar la unicidad del mcd (ver proposiciones en Tabla 1). En esta última cuestión, elementos de importancia son las unidades (elementos que admiten inverso), que escribimos U(D). Juegan un papel esencial respecto de la unicidad del mcd. Así, en DI, el mcd es único salvo asociados. En el Grado en Ingeniería Informática encontramos, en $\mathbb{Z}$, dos mcd (*d* y -*d*) aunque, por convenio, se escoge el positivo y así "mantenemos" la unicidad. En el anillo de polinomios, habrá tantos mcd como unidades. El estudiante se encuentra con una ruptura respecto de CE_Inicial; se enfrenta a un conflicto semiótico para cuya superación debe asimilar CE_DI, haciendo un cambio respecto a lo estudiado.

Tabla 1. *Configuración epistémica de DI (CE_DI)*

Entidades	Elementos de la configuración
Situaciones-Problemas	-Cálculo del mcd a través del máximo de los divisores comunes. -Situaciones sobre unicidad del mcd, salvo asociados, y cálculo de asociados en DI particulares. -Diferenciación y relación entre elementos primos e irreducibles.
Lenguajes	-Principalmente deductivo y simbólico. Axiomático menos frecuente.
Conceptos	-Asociados: $a \sim b$ sii existe $u\in$ U(D) tal que $a = ub$ - a divisor de b: $a \mid b$ sii $\exists c\in$ D tal que $b = ac$ -Mcd de a y b: $d\in$ D tal que: *i)* $d \mid a$ y $d \mid b$ *ii)* Si $d'\in D$, $d' \mid a$ y $d' \mid b$, entonces $d' \mid d$ -Primo: $p\in$ D, no cero, no unidad y verifica: si $p \mid a\,b$ entonces $p \mid a$ o bien $p \mid b$ -Irreducible: $r\in$ D, no cero, no unidad y verifica que: si $r=us$ entonces $u\in$ U(D) o $s\in$ U(D)
Proposiciones	-Teorema de unicidad del mcd: único salvo asociados. -Primo$\Rightarrow$Irreducible y el recíproco no es cierto.
Procedimientos	-Cálculo mcd: divisores por elemento, elegir comunes y buscar el máximo.
Argumentos	-Deductivas, muy generales. -No hay argumentaciones constructivas.

En la configuración de la Tabla 1 hay presencia casi exclusiva de la faceta intensiva: gran abstracción y uso de lenguaje simbólico. Las situaciones son poco numéricas y los procedimientos están poco desarrollados, pues no es trivial establecer el orden para obtener el máximo de los divisores comunes (pensemos en el conjunto de polinomios).

5.2. Configuración epistémica del mcd en dominios de factorización única

Un dominio de integridad, D, es un dominio de factorización única si se cumplen las condiciones: (i) Todo elemento de D, no nulo, no unidad, puede descomponerse como producto finito de elementos irreducibles de D. (ii) Además esta factorización es única, en el sentido de que si $p_1p_2\ldots p_r$ y $q_1q_2\ldots q_s$ son dos factorizaciones del mismo elemento de D como producto de irreducibles, entonces $r=s$ y los q_j pueden renumerarse de forma que p_j y q_j sean asociados. En este dominio los conceptos de primo e irreducible coinciden e importan los procedimientos para la detección de primos o irreducibles y la factorización a través de ellos, pues permite obtener el mcd como en CE_Inicial; esto es, "comunes elevados al menor exponente" (Tabla 2)

Tabla 2. *Configuración epistémica de DFU (CE_DFU)*

Entidades	Elementos de la configuración
Situaciones-Problemas	-Detección de primos o irreducibles. -Obtención de factorizaciones en irreducibles en distintos DFU.

	-Ejemplos de anillos donde la factorización no es única. -Cálculo del mcd a través de la factorización en irreducibles.
Lenguajes	-Principalmente deductivo, simbólico e inductivo. -En ejemplos, enteros y polinomios, frecuente el lenguaje numérico. -Puede utilizarse el lenguaje tabular o gráfico para disponer los primos, como en la criba de Eratóstenes en los enteros.
Conceptos	- Los establecidos en DI.
Proposiciones	-Primo⇔Irreducible. -Teorema de existencia del mcd: "comunes elevados al menor exponente".
Procedimientos	-Cálculo de divisores: a través de la factorización en irreducibles. -Cálculo de primos o irreducibles: en factorización aparecen como producto de ellos mismos por una unidad. -Cálculo de mcd: "comunes elevados al menor exponente".
Argumentos	-Deductivas, inductivas (sobre sobre el número de irreducibles). -Hay argumentos constructivos que facilitan procedimientos de cálculo.

El teorema fundamental de la Aritmética, demuestra que $\mathbb{Z}$ es un DFU y, respecto del anillo polinomios, K[x] es DFU (K cuerpo). En este dominio, los ejemplos anteriores suponen una mayor concreción, de forma que la particularización tiene más presencia que la generalización de CE_DI. Se presentan ejemplos de anillos donde la factorización no es única, como $\mathbb{Z}_6[x]$, donde $x^2 + x = (x–2)(x–3) = x\ (x+1)$ tiene grado 2 y cuatro raíces. Nuevamente el estudiante se encuentra ante una ruptura con lo estudiado, lo cual es fuente de conflictos semióticos.

5.3. Configuración epistémica del mcd en dominios de ideales principales

Sea A un anillo conmutativo, llamamos ideal a todo subanillo, I, que verifica que para todo $x\in$ I, y para todo $a\in$ A, $ax\in$ I. Un anillo conmutativo es un dominio de ideales principales si todo ideal I es principal (generado por un solo elemento, lo que representamos por I = <r>); es decir, todo elemento $x\in$ I, puede escribirse como $x = sr$. Estos dominios permiten reinterpretar la factorización en términos de ideales: si I es un ideal principal, entonces todo elemento $x\in$ I, puede escribirse como $x = sr$. En $\mathbb{Z}$, 6=2·3, por lo que el ideal $\langle 6\rangle \subseteq \langle 3\rangle$ o $\langle 8\rangle \subseteq \langle 4\rangle \subseteq \langle 2\rangle$. Así, los DIP aportan un orden a través de las cadenas de ideales, y los irreducibles o primos se caracterizan a través de los maximales en dichas cadenas (ver proposiciones en Tabla 3). También se caracteriza el mcd de dos elementos, a través del generador del ideal principal a partir de ellos.

Como se ve en la Tabla 3, el grado de generalidad (Godino et al., 2015) es alto ya que la abstracción necesaria para conectar las cadenas de ideales con la factorización en irreducibles. Se pierde la conexión con ejemplos conocidos (enteros o polinomios) por lo que la particularización es casi ausente. Tienen un papel las argumentaciones (la de la Identidad de Bezout se resuelve de inmediato a partir de observar que el ideal generado por los elementos es principal), pero no son constructivas. Debido a ello, faltan procedimientos de cálculo y no es posible el uso de recursos informáticos.

Tabla 3. *Configuración epistémica de DIP (CE_DIP)*

Entidades	Elementos de la configuración
Situaciones-Problemas	-Ejercicios teóricos, resultados que ligan cadenas de ideales y factorización: • Determinación de generadores para los ideales.

	• Detección de irreducibles. • Identificación del mcd. • Consecuencias a partir de la Identidad de Bezout. -No aparecen ejercicios numéricos en ejemplos de DIP pues se caracterizan elementos y demuestran resultados, pero no hay procedimientos de cálculo.
Lenguajes	-Deductivo, simbólico. -Muy poco lenguaje numérico.
Conceptos	-Los establecidos en DI.
Proposiciones	-Irreducible sii el ideal generado por él es maximal. -El ideal generado por dos elementos no nulos es el ideal principal generado por su mcd. -Identidad de Bezout: Si *a* y *b,* son dos elementos no nulos, con mcd, *d,* entonces existen $u,v\in$ D tales que $d = a\,u + b\,v$.
Procedimientos	-No se obtienen procedimientos de cálculo.
Argumentos	-Deductivos. Con papel destacado por simplicidad y elegancia matemática. -No se utilizan argumentos constructivos o algorítmicos

5.4. Configuración epistémica del mcd en dominios euclídeos

En los enteros, es difícil la búsqueda de primos altos, y por tanto la factorización. Así, es necesario un procedimiento de cálculo del mcd más eficiente que el obtenido en DFU: el algoritmo de Euclides y como consecuencia el algoritmo extendido de Euclides o Identidad de Bezout. Necesitamos una función euclídea (Tabla 4) que permita dividir (en los enteros es el valor absoluto y en los polinomios, el grado). Llamamos dominio euclídeo a todo dominio de integridad en el que existe esta función.

Tabla 4. *Configuración epistémica de DE (CE_DE)*

Entidades	Elementos de la configuración
Situaciones-Problemas	-Situaciones para identificar la función euclídea en ejemplos de DE. -Aplicar el algoritmo de la división en $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{K}[x]$ siendo $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{Z}_p$. -Aplicaciones de alg. división en enteros (congruencias, sistemas numer.). -Cálculo del mcd a través del algoritmo de Euclides en DE particulares. -Obtención de la Identidad de Bezout utilizando distintos procedimientos. -Aplicaciones de la Identidad de Bezout en los enteros (cálculo de inversos y aritmética modular, ecuaciones diofánticas)
Lenguajes	-Deductivo, simbólico. -Inductivo en obtención de fórmulas en Identidad de Bezout y tabular para disposición de elementos que aparecen en dichas fórmulas. -Concreción en ejemplos de DE permiten utilizar lenguaje numérico. En estos casos es también posible usar lenguaje algorítmico y de programación
Conceptos	-Función euclídea: δ: D – {0} $\rightarrow \mathbb{N}$ aplicación que verifica: i) $\delta(ab) \geq \delta(a)$ para todo $a,b \neq 0$. ii) Para todo $a,b\in$ D, si $b\neq 0$, existen $q,r\in$ D tales que $a = b\,q + r$ donde $\delta(r) < \delta(b)$ o $r = 0$. -Cociente y resto de dividir *a* entre *b.*

Proposiciones	-Algoritmo de Euclides: el mcd de a y b, d, es el último resto no nulo de las divisiones sucesivas. -Identidad de Bezout: • A través de los restos del algoritmo de Euclides: $d = r_n = a\, u_n + b\, v_n$ • Mediante fórmulas recurrentes: $u_0 = 0$; $v_0 = 1$; $u_1 = 1$; $v_1 = -q_1$; $u_{i+1} = u_{i-1} - u_i\, q_{i+1}$; $v_{i+1} = v_{i-1} - v_i\, q_{i+1}$
Procedimientos	-Algoritmo de la división en ejemplos de DE. -Cálculo de divisores mediante divisiones exactas. -Cálculo de irreducibles buscando divisores a partir de cocientes exactos. -Cálculo de mcd: último resto no nulo en el algoritmo de Euclides. -Identidad de Bezout: • Por sustituciones regresivas de los restos en el algoritmo de Euclides. • Mediante fórmulas recurrentes.
Argumentos	-Sobre todo argumentos constructivos e inductivos; también deductivos. -En casos particulares de DE, pueden aparecer argumentos algorítmicos

Aunque hay un alto nivel de abstracción, sobre todo en la definición de la función euclídea, en CE_DE el proceso de particularización se hace patente en los ejemplos que se trabajan dentro del Grado en Ingeniería Informática (enteros o el anillo de polinomios con coeficientes en un cuerpo) a través de ejercicios numéricos. Respecto a la anterior, CE_DIP, hay un cambio en las argumentaciones que ahora son de tipo constructivo e inductivo, lo que posibilita su traslado al lenguaje de programación. Como consecuencia es notorio el papel de los procedimientos en CE_DE.

6. Análisis de manuales

El estudio epistemológico de las distintas CE según los dominios de definición, establece el significado de referencia del mcd en el Grado en Ingeniería Informática. A fin de indagar sobre el significado institucional pretendido que se encuentra en manuales, elaboramos una plantilla de análisis, considerando las entidades primarias del EOS (Tabla 5). La elaboración de esta herramienta es compleja debido a que debe afrontar, de forma unificada, la diversidad de contenidos curriculares según aparece en Ordoñez et al. (2015). Se han tomado en consideración Ordóñez (2011) y se han ampliado y profundizado en las clasificaciones dentro de las entidades primarias. Tras la tabla, exponemos los resultados del análisis de los dos manuales elegidos.

Tabla 5. *Tabla para el análisis de manuales*

Entidades	Subvariedades	Consideraciones/Tipología
Situaciones-problemas	Dominios de definición de cada concepto y proposición	$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, polinomios, DE, DIP, DFU y DI
	Elementos introductorios	Idea de lo pretendido, conexión con lo anteriormente estudiado, notas históricas
	Ejemplos	Cantidad, posición (antes de cada concepto), aspecto (resaltados), tipo (numérico, abstracto, de aplicaciones)
	Ejercicios	Cantidad, posición, tipo, con solución
	Implementación informática	Códigos, pseudocódigos por procedimiento

	Aplicaciones y su lugar en el texto	Sist. numeración, códigos, ecuaciones diofánticas, aritmética modular, criptografía
Lenguajes	de las Matemáticas	Natural-vernáculo, numérico, simbólico, tabular, gráfico, algorítmico, axiomático, inductivo o recurrente, deductivo o lógico.
	de programación	Pseudocódigos. Códigos: tipo de lenguaje (C, Pascal, etc.) o programas (Mathematica, Maple, etc.)
Conceptos-definición	Divisor, primo, irreducible, mcd	Según: CE_DI, CE_DFU, CE_DIP, CE_DE
	Tipo de definiciones	Intuitiva, formal, deductiva, recurrente o inductiva, axiomática, a través del contrario, mediante tabla
Proposiciones	Teorema fundamental de la Aritmética, existencia y unicidad del mcd, algoritmo de división y de Euclides, Identidad de Bezout	Si aparecen o no cada uno de los resultados y según CE (cuando tenga sentido)
Procedimientos	Cálculo de: divisores, primos o irreducibles, factorización, alg. división, mcd, I. Bezout.	Según: CE_DI, CE_DFU, CE_DIP, CE_DE.
Argumentos	Demostraciones	Si se desarrollan de cada proposición
	Tipo de argumentos a lo largo del texto y en demostraciones	Deductivos, mediante el contra recíproco, por reducción al absurdo, recurrentes o inductivos, constructivos, algorítmicos

6.1. Resultados del análisis del Manual 1

El libro titulado "Matemática Discreta y sus aplicaciones" ha sido seleccionado por estar recomendado por las tres universidades elegidas. En él podemos observar, a través de distintas entidades, que el autor realiza una fuerte restricción en los dominios de definición derivando en la CE_Inicial. Es muy significativa, en este manual, la ausencia de demostraciones para la mayoría de proposiciones. Respecto de la Identidad de Bezout explicita "no se hará una demostración formal del teorema" (Rosen, 2004, p. 167) remitiendo a una referencia bibliográfica. Solo aparece alguna justificación inmediata y la del algoritmo de Euclides, que utiliza argumentos constructivos.

Tabla 6. *Análisis del Manual 1*

Entidades		
Situaciones	Dominios definición	Divisor y mcd: $\mathbb{Z}$; Primo, teorema fundamental de la Aritmética, algoritmo de la división, de Euclides y Bezout: $\mathbb{N}$.
	Elementos introductorios	Al principio de sección hay una idea de lo pretendido y el interés por sus aplicaciones. Notas históricas al introducir y en pie de página (imágenes de Euclides, Fermat, Mersenne). Las definiciones o teoremas se deducen de ejemplos o conectan con CE_Inicial.
	Ejemplos	45, en total de las tres secciones, antes y después de cada concepto y resaltados. De tipo numérico, de aplicaciones a la informática y ejemplos adicionales en web (marcados con icono).

	Ejercicios	175, al final de sección, con solución de los impares al final del texto, marcas de asterisco según dificultad. Mayoría de tipo numérico aunque también de aplicación a la informática. Cerca del 10% son abstractos. Al final del capítulo se aporta: resumen de conceptos y resultados clave, junto cuestiones de repaso (22), problemas complementarios (46), ejercicios de programación (27), problemas para resolver con programas realizados (11) y propuestas de proyectos (19).
	Implem. Informática	Pseudocódigos para algoritmo de Euclides. Se propone para I. Bezout.
	Aplicaciones y su lugar en el texto	Aritmética modular (funciones dispersión, pseudoaleatorios) y criptología, sistemas de numeración, aritmética computacional enteros grandes, pseudoprimos, Criptografía de clave pública, cifrado y descifrado RSA. Al final de sección y en ejemplos. Sección con solo aplicaciones.
Lenguajes	Matemática	Los más presentes: natural-vernáculo, numérico y deductivo. Simbólico (mezclado con el natural-vernáculo para explicarlo), tabular (criba de Eratóstenes), gráfico (divisores) y algorítmico. También inductivo (para el algoritmo de Euclides y la I. Bezout).
	Programac.	Pseudocódigos para alg. Euclides. Se propone para I. Bezout.
Conceptos	Definición	Divisor: CE_DI; Primo: La de irreducible para CE_DI (CE_Inicial); Irreducible: No aparece; Mcd: CE_DI
	Tipo de definiciones	Formales, deductiva (I.Bezout), inductiva (mcd de un numero finito), a través del contrario (*a* no divide a *b*, número compuesto).
Prop	Proposiciones	Teorema f. Aritmética: CE_DFU; Existencia del mcd: CE_Inicial; Unicidad: No; Algoritmo de la división: CE_DE; Alg. de Euclides: CE_DE; I.Bezout: CE_DE
Proced.	Sí, cálculo	Divisores: CE_DE; primos: CE_Inicial (criba Eratóstenes) y CE_DI; Factorización: CE_DFU; Alg. división: CE_DE; mcd: CE_Inicial, CE_DI, CE_DFU, CE_DE; I. Bezout: CE_DE (por restos, fórmulas en ejercicio)
Arg.	No	Teorema f. Aritmética; Unicidad del mcd; Alg.de la división; I. Bezout
	Sí	Existencia del mcd, deductivos; Alg. Euclides, constructivos e inductivos

Este análisis didáctico muestra un libro de texto con gran cantidad de situaciones, variedad en los tipos de lenguajes (mezclados con el natural-vernáculo) y que dota de relevancia a las aplicaciones informáticas, relacionando así los contenidos intra e interdisciplinares que contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes, por lo que la idoneidad ecológica es alta. A su vez son tareas motivadoras ya que se puede valorar la utilidad de las matemáticas en la vida profesional y, junto a la conexión con CE_Inicial, indica una buena idoneidad afectiva. Por otra parte, enlazar con ideas previas posibilita que los contenidos se puedan alcanzar con dificultad manejable, lo que muestra también buena idoneidad cognitiva, pues “el acoplamiento progresivo entre los significados personales iniciales de los estudiantes y los significados institucionales planificados” (Godino, 2013, p. 121) promueve el aprendizaje. Sin embargo, en este nivel educativo se requiere del desarrollo de una comprensión conceptual, proposicional y argumentativa que promueva el paso a grados altos de generalidad; esto es, que realice el proceso de generalización. Uniendo ambas apreciaciones podemos decir que la idoneidad cognitiva es media. En cuanto a la faceta epistémica, un buen indicador es la riqueza y variedad de situaciones, la claridad y corrección con que se exponen las definiciones, proposiciones y procedimientos y la diversidad de elementos lingüísticos utilizados. Ahora bien, el logro de una idoneidad epistémica alta requiere atención a las diversas representaciones o medios de expresión, las definiciones, procedimientos, proposiciones, así como las justificaciones, y es aquí donde encontramos dos carencias del manual que indican una idoneidad epistémica media. No aparecen desarrolladas demostraciones de ningún resultado, salvo algún argumento intuitivo o enlazado con CE_Inicial y alguno constructivo que, en realidad expone un procedimiento de cálculo.

6.2. Resultados del análisis del Manual 2

"Classic Algebra" está en la bibliografía complementaria de la asignatura Matemática Discreta (Universidad de Jaén) y en la básica del Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas (Universidad de Granada). La entidad situación-problema muestra que el primer dominio de definición donde el manual trabaja la divisibilidad es el conjunto de los números enteros. En él se presentan tres de las cuatro CE, con un nivel de abstracción que permite hacer el proceso desde lo particular (los enteros) a lo general, representado en el estudio en dominios generales como DI, DFU y DE. El anillo de polinomios se obtiene como caso particular de los anteriores, realizando ahora un paso, a la inversa, de particularización. Luego se introduce CE_DIP.

Tabla 7. *Plantilla de análisis del Manual 2*

Entidades		
Situaciones	Dominios de definición	Divisor: $\mathbb{Z}$, DI; Primo: $\mathbb{N}$, DI; Irreducible: DI; Mcd: DI; Teorema fundamental de la Aritmética: $\mathbb{N}$, DFU, polinomios; alg.división, DFU, polinomios, alg.de Euclides: DE; I. Bezout: $\mathbb{Z}$, DE, DIP, polinomios.
	Elementos introductorios	Al principio de sección breve idea de lo pretendido. Las definiciones o teoremas en dominios amplios enlazan con los enteros.
	Ejemplos	Cita (sin explicar), unos cinco ejemplos numéricos. Después de algún concepto y entremezclado en el desarrollo, sin resaltar.
	Ejercicios	35, al final de sección y con solución al final del texto. La mayoría de tipo abstracto. Menos del 10% de tipo numérico. Para los enteros no hay ejercicios numéricos. Al final de capítulo hay 16, 30 y 12, respectivamente, en cada capítulo explorado.
	Implem. Inform.	Ninguna.
	Aplicaciones	Ninguna referencia
Lengu.	Matemática	Los más presentes: deductivo y simbólico. También inductivo (riguroso) y natural-vernáculo, usado escuetamente para introducir.
	Programación	Ninguno
Conceptos	Definición	Divisor, irreducible y mcd: CE_DI; Primo: La de irreducible para CE_DI (CE_Inicial) CE_DI y polinomios
	Tipo	Formales, inductiva (mcd de un numero finito).
Propos.	Proposiciones	Teorema f. Aritmética y existencia del mcd: CE_DFU; Unicidad del mcd: CE_DI; Alg.de la división, Alg. de Euclides e I.Bezout: CE_DE; I.Bezout: También en DIP.
Proc	No	Divisores, primos, factorización, Alg. división
	Sí	Mcd: CE_DFU, CE_DE; I. Bezout: CE_DE (por restos, implícito)

Argument.	Sí, en $\mathbb{Z}$	Todos salvo Alg.de Euclides. Argumentos deductivos e inductivos
	Sí, dominios generales	Teorema f. Aritmética y existencia del mcd: DFU; Unicidad del mcd: DI; Alg.de la división, Alg. de Euclides e I.Bezout: CE_DE; I.Bezout: También en DIP. Deductivos, inductivos y constructivos

Hay formalismo matemático en el uso del lenguaje simbólico, denso en todo el texto. También destaca la presencia del lenguaje inductivo y la poca frecuencia del lenguaje numérico. No aparece aplicación ni referencia a la informática y es nula la presencia de lenguajes de programación. El uso casi exclusivo del lenguaje deductivo y simbólico y la ausencia de ejemplos, procedimientos o situaciones de aplicación indican una idoneidad epistémica media. Dichas ausencias, el alto nivel de abstracción y la falta de conexión con CE_Inicial dificultan el acoplamiento entre significados pretendidos en el manual y los personales iniciales de los estudiantes, lo que indica conflictos semióticos potenciales y de idoneidades cognitiva y afectiva bajas. En cuanto a conceptos, se define divisor en $\mathbb{Z}$ con ejemplos para luego abstraerla en DI, generalizando: "Let R be an integral domain; as in $\mathbb{Z}$ we define b|a…" (Cohn, 2000, p. 145). Además, frecuentemente está presente la dualidad particular-general al realizar procesos de generalización (que se obtienen de forma natural, tanto en conceptos como proposiciones) y de particularización (e.g., en la aplicación al caso de polinomios). En cuanto a argumentos, se aportan demostraciones de todas las proposiciones estudiadas, en $\mathbb{Z}$ (con argumentos propios de los enteros como el principio del mínimo) y en los dominios más generales, situando cada resultado y su demostración en la configuración epistémica en la que se establecen. Los argumentos son sobre todo deductivos. Se utiliza también la inducción formalmente y hay argumentos constructivos en el teorema fundamental de la Aritmética y el algoritmo de Euclides. Los argumentos algorítmicos no se explicitan. La importancia dada a las argumentaciones y cómo se proporcionan significados de los objetos matemáticos, diferenciándolos y clarificando relaciones entre ellos son otros rasgos del manual; pero también la ausencia de procedimientos de cálculo, que conlleva la imposibilidad de implementación en el ordenador. Las aplicaciones de esta teoría a las Ciencias de la Computación no se abordan, mostrando una baja idoneidad ecológica en el Grado de Ingeniería Informática. Tampoco se muestra la relevancia de esta materia en el desarrollo profesional de los estudiantes, indicativo de una baja idoneidad afectiva.

7. Conclusiones

Nuestra investigación ha permitido analizar, de forma unificada, dos manuales a través de su comparación con el significado institucional de referencia, establecido en términos de CE, salvando así las dificultades relativas a la diversidad curricular de la etapa universitaria. El estudio de las CE ha identificado significados de los objetos intervinientes, relaciones entre ellos y procesos necesarios en la enseñanza del mcd.

Del análisis de los dos manuales, obtenemos que el texto que consideramos más representativo, respecto al significado de referencia institucional pretendido del mcd, para el Grado en Ingeniería Informática, tiene alta idoneidad ecológica frente a la baja idoneidad en esta faceta del segundo manual. M1 (el más representativo) es un manual centrado en procedimientos, y así, enfocado al uso de recursos tecnológicos. Las aplicaciones informáticas tienen un papel esencial frente a las prácticamente ausentes demostraciones con uso de lenguaje simbólico y en general de procesos de abstracción propios del Algebra Superior. Por el contrario, M2 es un libro de texto con fuertes procesos de generalización (demostraciones, uso de lenguaje simbólico, etc.) donde no se considera el uso de la tecnología y sus aplicaciones.

Según Harel y Sowder (2007), el énfasis de los profesores en la justificación de la demostración desempeña un papel fundamental en la formación de los esquemas de demostración de los alumnos; así, “un aforismo habitual es “Uno obtiene lo que enseña”, y el currículo establecido puede variar considerablemente de un aula a otra” (p. 840). Es decir, la ausencia de las demostraciones en M1 suponen un conflicto de significado entre el pretendido que establece el manual y el normativo, lo que supone una importante carencia en la enseñanza y fuente de conflictos semióticos para el alumno. La proximidad con CE_Inicial de M1, junto con la alta cantidad de ejemplos y en general de situaciones hace que sea un texto más accesible al estudiante de ingeniería. Sin embargo, tal como indican Godino et al. (2014) se observa un cierto efecto Topace, ya que “se rebajan los objetivos de aprendizaje, por lo que se disminuye la idoneidad epistémica de la actividad matemática pretendida” (p. 197).

En el estudio del mcd, la historia de las matemáticas mostró un cambio radical desde la matemática griega, de Euclides, al siglo XIX, con la aparición del Álgebra Abstracta. El uso de la tecnología en la enseñanza de esta temática y su aplicación a la Informática parecen provocar en nuestro siglo una transformación del proceso anterior hacia su inverso, con la vuelta hacia la matemática “griega”, en el sentido de la preeminencia de lo particular frente a lo general, del contenido frente a la forma (Harel y Sowder, 2007):

> Las facilidades que ofrece la tecnología han suscitado preocupación porque pueden generar gran número de ejemplos de forma natural y ello podría minar la sensación de necesidad de esquemas de demostración deductivos en los alumnos. (…) varios estudios muestran que, con una planificación y enseñanza cuidadosamente elaborada durante un periodo de tiempo, es posible el progreso hacia esquemas de demostración deductivos en entornos tecnológicos, donde se dan las deseadas conjeturas y definiciones (p. 854, nuestra traducción).

Como aplicación de esta investigación, el profesor debe tomar conciencia de la tendencia hacia lo procedimental y, en general, hacia la particularización, para replantear la utilización de recursos tecnológicos a fin de trabajar el proceso de generalización. En esta dirección, hemos realizado investigaciones acerca de la influencia del software Mathematica en la enseñanza y aprendizaje de una demostración, y el papel que juegan las hipótesis en ella, así como la dualidad particular-general en el estudio de axiomas (conmutativa) mediado por entornos computacionales. Siguiendo en esta línea y ampliando el actual estudio a más manuales, obtendremos información valiosa para la elaboración de las bibliografías de asignaturas con contenidos de divisibilidad.

Referencias

Balacheff, N. (1993). La transposition informatique, un nouveau problème pour la didactique des mathématiques, En M. Artigue et al. (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 364-370). Grenoble, Paríís: La Pensée Sauvage.

Bodí, S. D., Valls, J. y Llinares, S. (2005). El análisis del desarrollo del esquema de divisibilidad en N. La construcción de un instrumento. *Números, 60,* 3-24.

Camacho, V., Sánchez J. J. y Zubieta, G. (2014) Los estudiantes de ciencias, ¿pueden reconocer los argumentos lógicos involucrados en una demostración? *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 117-138.

Cohn, P. M. (2000). *Classic Algebra*. Londres, Inglaterra: Wiley & Sons.

Conejo, L., Arce, M. y Ortega, T. (2015). Análisis de las justificaciones de los teoremas de derivabilidad en los libros de texto desde la Ley General de Educación. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 51-71.

Contreras, A., Font, V., García, M., Luque, L., Marcolini, M., … y Sánchez, C. (2005). Aplicación del programa Mathematica a las prácticas de cálculo en el primer año universitario. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática IX* (pp. 271-282). Córdoba: SEIEM.

Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(3), 367-384.

Del Pino, J. y Estepa, A. (2017). Análisis del tratamiento de la dispersión en libros de texto de 3º y 4º de ESO. En J. M. Contreras et al. (Eds.), *Actas II Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Recuperado el 23 de febrero de 2019 de enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Dubinsky, E. y Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. En E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J. Kapput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV*, 239-286.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105.

Gea, M. M., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2014). La regresión en los textos de bachillerato de ciencias sociales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 365-373). Salamanca: SEIEM.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11,* 111-132.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8,* 117-142.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontologico Semiótico del conocimento y de la intrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2/3), 167-200.

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F. J. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: NCTM.

Hausberger, T. (2018). Structuralist praxeologies as a research program on the teaching and learning of abstract algebra. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4*(1), 74-93.

Kline, M. (2012). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días***.** (A. Casal et al., trad.). Madrid: Alianza Editorial (original de 1972).

Lacués, E. (2011). Enseñanza y aprendizaje de los sistemas matemáticos de símbolos. *Didac, 55-56*, 29-35.

Ministerio de Educación (2009). *Resolución de 8 de junio de 2009, de la Secretaría General de Universidades, por la que se da publicidad al Acuerdo del Consejo de Universidades, por el que se establecen recomendaciones para la propuesta por las universidades de memorias de solicitud de títulos oficiales en los ámbitos de la Ingeniería Informática, Ingeniería Técnica Informática e Ingeniería Química* (12977). Recuperado el 23 de febrero de https://www.boe.es/boe/dias/2009/08/04/pdfs/BOE-A-2009-12977.pdf

Muñoz-Catalán M. C. y Carrillo, J. (2007). *Conocimiento numérico de futuros maestros. Educación Matemática, 19*(1), 5-25.

Ordóñez, L. (2011). *Restricciones institucionales en las Matemáticas de 2º de Bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida*. Trabajo de Tesis Doctoral. Universidad de Jaén.

Ordóñez, C., Ordóñez, L. y Contreras, A. (2013). Significados personales acerca de una demostración en Teoría de Números con Mathematica. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 411-420). Bilbao: SEIEM.

Ordóñez, C., Ordóñez, L. y Contreras, A. (2014). Las hipótesis en Álgebra, cuestiones didácticas a considerar en un entorno con Mathematica. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 493-502). Salamanca: SEIEM.

Ordóñez, C., Ordóñez, L. y Contreras, A. (2015). La divisibilidad en manuales para estudiantes en Ingeniería Informática. En C. Fernández, M. Molina y N Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 431-440). Alacant: SEIEM.

Ordóñez, C., Ordóñez, L., Contreras, A. y Ruiz, J. F. (2017). La dualidad particular-general en el estudio de la propiedad conmutativa en ingeniería informática. En J. M. Contreras y otros (Eds.), *Actas II Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Recuperado el 23 de febrero de 2019 de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/ordo%C3%B1ez.pdf

Recio, A. M. y Godino J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematics proof. *Educational Studies in Mathematics, 48,* 83-99.

Rosen, K. H. (2004). *Matemática Discreta y sus aplicaciones*. Madrid: McGraw- Hill.

Referencias de los autores

Carmen Ordóñez, Universidad de Jaén (España). ccanada@ujaen.es

Lourdes Ordóñez, Universidad de Jaén (España). lordonez@ujaen.es

Ángel Contreras, Universidad de Jaén (España). afuente@ujaen.es

The teaching of the greatest common divisor mediated by a computational context in a Computer Engineering Degree

Carmen Ordóñez, Universidad de Jaén

Lourdes Ordóñez, Universidad de Jaén

Ángel Contreras, Universidad de Jaén

The present study defines the institutional meaning of reference of the greatest common divisor divisor for students enrolled in a Computer Engineering Degree. It is an epistemological study based on different defining domains that yields results relative to this mathematical object, while also linking them to the historical development of abstract algebra. The main goal is to determine the features of the intended meaning of the greatest common divisor, which appear in textbooks employed in the degree, using tools from the onto-semiotic framework (OSA). Specifically, the epistemic configuration concept provided by this framework is essential for this work. The chains of inclusion established between Euclidean Domains, Ideal Principal Domains, Unique Factorization Domains and Integral Domains allowed us to determine the most important components of the mathematical activity when teaching and which will lead to the development of epistemic configurations for each domain. The second phase of the study aims to explore the intended institutional meaning found in university textbooks recommended for computer engineering students. To this end, we included a refined selection of university student manuals that deal with divisibility and prepared an analytical template, considering the primary entities set out in the theoretical framework. Developing this tool led to deal with, in a unified manner, the diverse nature of course content inherent to tertiary education. We used the instrument to detect which epistemic configurations can be found in the textbooks and to identify the meaning of the objects involved, the relationships between them and the processes applicable when teaching about the greatest common divisor. We also highlighted tendencies in the individual–general duality and how teaching is affected by the use of computing resources and the treatment of applications corresponding to the degree. A comparison between textbooks explores a significant difference between one text that moves within computational environments - where computer applications and procedures are the context - with another text, where generalisations are made, but applications are not considered. Restrictions in definitions given and the absence of demonstrations in the most recommended textbooks are noteworthy. This allows extracting the shortcomings of meaning and highlights a tendency in teaching towards prioritising the specific rather than the general, which is itself a source of semiotic conflict.