

## Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática: Estudios de caso en distintos niveles educativos

Ignasi Florensa, Escola Universitària Salesiana de Sarrià – Universitat Autònoma de Barcelona (España)

Francisco Javier García, Universidad de Jaén (España)

Gemma Sala, Universitat de Barcelona (España)

---

### Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática: Estudios de caso en distintos niveles educativos

#### Resumen

*Durante las últimas décadas el número de trabajos sobre el papel de la modelización matemática en los procesos de enseñanza ha aumentado de modo significativo. La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) concibe la modelización matemática como procesos de construcción de praxeologías de complejidad creciente y sitúa el análisis de las condiciones y restricciones que afectan su viabilidad en el centro de la actividad investigadora. Presentamos tres procesos de modelización en Educación Infantil, Secundaria y Universidad, así como su análisis ecológico. Mostramos las complejidades existentes para hacer vivir tales procesos en las instituciones docentes y sus similitudes y diferencias.*

**Palabras clave.** Modelización matemática; teoría antropológica de lo didáctico; recorridos de estudio e investigación; condiciones y restricciones ecológicas.

### Conditions for teaching mathematical modelling: Case studies across educational levels

#### Abstract

*Over the last decades the number of papers analyzing the role of mathematical modelling in teaching and learning processes has increased significantly. The Anthropological Theory of Didactics (ATD) conceives mathematical modelling as a process of construction of praxeologies of growing complexity and places the analysis of the conditions and restrictions that affect its viability at the center of the research activity. We present three modelling processes in Early Childhood, Secondary and University Education, as well as their ecological analyses. We show the existing complexities to make such processes live in the educational institutions as well as their similarities and differences.*

**Keywords.** Mathematical modelling; anthropological theory of the didactic; study and research paths; ecological conditions and restrictions.

## 1. Introducción

El punto de partida de nuestra investigación es indagar sobre las condiciones que han facilitado y las limitaciones que han dificultado que la modelización matemática pueda integrarse y desarrollarse en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los distintos niveles educativos. Distintas comunidades de investigadores y profesionales destacan la importancia que puede desempeñar la modelización matemática en la enseñanza y aprendizaje de matemáticas, permitiendo alternativas a una enseñanza de la matemática útil y funcional para el estudio de problemas reales.

Durante las últimas décadas, el número de trabajos de investigación sobre el papel de la modelización matemática en educación matemática ha aumentado de manera significativa. Los números especiales de *ZDM* (2018 (1-2)) son buen ejemplo del estado actual de desarrollo de este ámbito de investigación y de la presencia de distintos enfoques que abordan de formas diversas qué es y cómo se describe y analiza

la modelización matemática. Aunque algunas de las líneas de actuación de estos enfoques pueden tener cierto grado de acuerdo, los puntos de partida de los enfoques teóricos siguen presentando diferencias importantes. Como se introduce en Carreira, Barquero, Kaiser y Cooper (2019), algunas de las líneas que agrupan a la comunidad europea de investigación en modelización matemática tratan del desarrollo de herramientas para analizar procesos de modelización, la necesidad de desarrollar estrategias para diseñar, implementar y evaluar dichos procesos y el desarrollo de herramientas para analizar las restricciones de su implementación, entre otras.

Un punto de partida bastante común en las líneas de investigación es lo que Gascón (2011) denomina el problema docente de la modelización matemática. Según García, Gascón, Ruíz-Higuera y Bosch (2006), las dos formulaciones más frecuentes del problema son: ¿cómo enseñar modelización matemática? y ¿cómo enseñar matemáticas a través de la modelización? En este artículo nos situamos en el segundo. Gascón (2011) defiende que los problemas de investigación son diferentes de los problemas docentes. En el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), postula que los problemas de investigación se construyen sobre los docentes a partir de una triple problematización: epistemológica, económica y ecológica.

La dimensión epistemológica del problema de investigación implicaría plantearse qué es la modelización matemática, así como qué relación existe entre la actividad matemática y la actividad de modelización. Abordar la dimensión epistemológica de un problema de investigación implica la construcción de un modelo epistemológico de referencia que fije, explícitamente, el punto de vista del investigador. En este caso, debe construirse un modelo explícito de la concepción de la modelización matemática, en el marco de un modelo general de la actividad matemática.

La dimensión económica del problema llevaría al investigador a plantearse qué papel juega la modelización matemática en la *contingencia institucional*, lo que conduciría a un análisis de la transposición didáctica de los procesos de modelización en las instituciones docentes, mediado por el modelo epistemológico de la modelización previamente construido.

Finalmente, la dimensión ecológica del problema de investigación conduciría a indagar sobre condiciones y restricciones, que pueden favorecer o dificultar, la implementación de procesos de modelización tal y como se conciben desde la respuesta al problema epistemológico. Los trabajos en el marco de la TAD sobre el problema de investigación de la modelización son numerosos y diversos. Se ha ido diseñando un modelo epistemológico de referencia sobre la actividad de modelización en el marco más amplio de la actividad matemática (Chevallard, 1989; García et al., 2006), se ha abordado el diseño, implementación y análisis de procesos de estudio de modelización matemática (se describirán algunos en este artículo), y se ha estudiado la ecología de tales procesos en algunas instituciones (Barquero, Bosch & Gascón, 2011, 2013). Se ha desarrollado también la noción de *recorrido de estudio e investigación* (REI) como dispositivo didáctico-matemático, con una metodología propia de diseño, implementación y análisis con el fin de implementar procesos de modelización en instituciones escolares (Chevallard 2015; Winsløw, Matheron & Mercier, 2013).

El presente artículo se centra, principalmente, en la problemática ecológica de la modelización bajo condiciones ecológicas distintas. Para ello, en primer lugar, presentamos el modelo epistemológico de la modelización construido desde la TAD, señalando alguno de los fenómenos didácticos que dicha propuesta pretende (Gascón, 2014). En segundo lugar, presentamos tres procesos de modelización implementados

en tres niveles educativos, señalando los fenómenos a los que responden, así como las condiciones y restricciones que permitieron identificar. Finalizaremos presentando el análisis transversal de las condiciones y restricciones identificadas y formularemos algunas conjeturas que deberán ser estudiadas en futuras investigaciones.

## 2. La modelización matemática en el ámbito de investigación de la TAD

La noción de modelización matemática, desde la TAD, ha estado vinculada a la noción de actividad matemática desde los primeros desarrollos de este marco de investigación, cuando se asume que hacer matemáticas consiste esencialmente en la actividad de producir, transformar, interpretar y hacer evolucionar modelos matemáticos para poder aportar respuestas a ciertas cuestiones problemáticas. Desde los primeros trabajos que se refieren a la modelización matemática (Chevallard, 1989; Gascón, 1994), esta se describe a partir de una serie de estadios:

- (1) Se plantea la situación y problemática inicial (extra-matemática o intra-matemática) en la cual se construye el sistema a modelizar y se plantean las cuestiones generales que surgen acerca del sistema sin respuesta inmediata.
- (2) Se construye un modelo matemático a partir de definir el sistema a modelizar, se identifican y asignan variables que se consideran pertinentes y se establecen relaciones entre estas.
- (3) Se trabaja con el modelo, lo cual puede requerir un trabajo manipulativo con el modelo creado para refinar el modelo que se ajuste lo mejor posible al sistema y interpretar este trabajo y los resultados dentro del sistema modelizado.
- (4) Se plantean nuevas cuestiones, las cuales no hubieran podido ser planteadas con anterioridad, cuya resolución aumentará el conocimiento del sistema estudiado o puede llevar a un nuevo proceso de modelización.

Investigaciones posteriores sobre la enseñanza de la modelización amplían esa descripción. Bolea (2002), García et al. (2006) y Barquero (2009) interpretan los procesos de modelización como un proceso que, partiendo del estudio de una situación y cuestiones iniciales en el seno de un sistema concreto, lleva a la construcción y desarrollo articulado de praxeologías matemáticas de complejidad creciente. Estas praxeologías, en tanto que modelos, juegan distintos papeles. Por un lado, permiten describir ciertos aspectos del sistema y construir posibles respuestas a las cuestiones planteadas. Por otro lado, actúan como *máquinas* que permiten plantear nuevas cuestiones, normalmente ligadas al carácter predictivo que hace que los modelos sean herramientas potentes, difícilmente planteables en el seno del sistema original.

Un hecho característico, y diferenciador de las investigaciones desde la TAD sobre los procesos de modelización matemática, es el papel del modelo epistemológico de referencia del ámbito a enseñar. Este modelo es una reconstrucción explícita y alternativa (a la organización del saber escolar) del saber a enseñar. Se desarrolla por parte de los investigadores a fin de que los procesos de estudio que se materialicen superen, parcialmente, ciertos fenómenos didácticos. Así, el modelo se entiende como una hipótesis de los investigadores que deberá enriquecerse y validarse con el diseño, experimentación y análisis de los procesos de estudio. Varios de los fenómenos que se han abordado son el de la “aritmización del álgebra en la secundaria” (Bolea, 2002; el “autismo temático y falta de razón de ser de la proporcionalidad en secundaria” (García, 2005), la “ausencia de razón de ser del cálculo diferencial en el paso de la secundaria a la universidad” (Lucas, 2015), o el “aplicacionismo como epistemología dominante en la enseñanza universitaria de las CCEE” (Barquero, 2009), entre otros.

En el marco de la TAD, se han creado herramientas teóricas para diseñar procesos de estudio donde la actividad de modelización se pueda desarrollar por completo: los *recorridos de estudio e investigación* (Chevallard, 2015). Son procesos iniciados por una cuestión generatriz que se plantea a una comunidad de estudio. La cuestión generatriz debe cumplir ciertos requisitos: tener un fuerte poder generador (capaz de generar la aparición de cuestiones derivadas), sin respuesta inmediata y ser una cuestión viva (de interés real) para la comunidad de estudio (Barquero et al., 2011). La movilización de praxeologías y su desarrollo, ligado a la generación de posibles respuestas a la cuestión inicial y derivadas, están en la base del REI: el conocimiento aparece como funcional. García, Barquero, Florensa y Bosch (2019) explican de manera sistemática las características de un REI y su metodología de diseño.

## 2.1. La ecología de la modelización matemática y metodología de análisis

En el ámbito de la TAD y la perspectiva institucional que aporta, la *dimensión ecológica* de las actividades de modelización es esencial. Esto es, el estudio de condiciones que facilitan y de restricciones que pueden limitar la integración de procesos de modelización matemática en las instituciones escolares. Como explican Barquero, Bosch y Gascón (2019), formular problemas de investigación en este ámbito supone considerar el estudio de la transposición didáctica de estos saberes (Bosch & Gascón, 2006), desde que son producidos por la comunidad sabia, que se adaptan por la “noosfera” (mediante la redacción de currículos, libros de texto, leyes educativas...), hasta que se enseñan y aprenden en las aulas. El desarrollo de los procesos de modelización como posible respuesta ante ciertos fenómenos didácticos contribuyendo a reducir los efectos negativos asociados no puede separarse del análisis de condiciones y restricciones que afectan a la posible implementación de tales procesos.

El análisis de dichas condiciones y restricciones es crucial para estudiar hasta qué punto la hipótesis planteada en el modelo epistemológico de referencia y los procesos de estudio emergidos del modelo son viables y permiten superar los fenómenos didácticos estudiados. Un número considerable de trabajos en la TAD han situado la ecología de la modelización en el corazón de su investigación, lo cual les ha permitido describir y detectar condiciones y restricciones (Barquero, Bosch & Gascón, 2019).

Para este análisis ecológico, Chevallard (2002) introduce la *escala de niveles de determinación didáctica* (ver Figura 1) que permite situar en qué nivel o niveles, de los más generales a los más específicos, se pueden situar las diferentes condiciones y restricciones que facilitan o limitan la enseñanza escolar de ciertos saberes, en particular, de la modelización matemática. Y, en consecuencia, permiten poder discutir hasta qué punto estas restricciones y condiciones son controlables, incluso modificables en el ámbito de actuación de los docentes e investigadores.

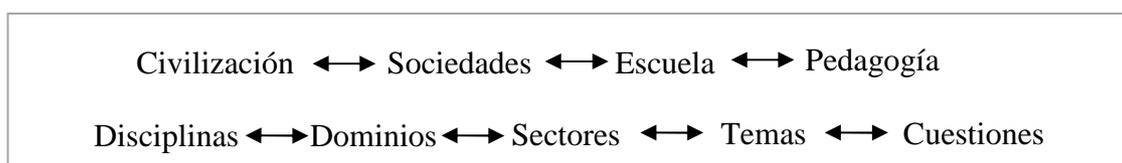


Figura 1. Escala de niveles de codeterminación didáctica

Los niveles van desde el nivel más genérico, el de la *civilización*, hasta el más específico, el de las *cuestiones* planteadas. Los niveles inferiores hacen referencia a cómo se estructura una disciplina para ser enseñada, en particular, la matemática, en distintos *dominios* (geometría, aritmética, álgebra, etc.) y estos en, *sectores*, *temas* y

*cuestiones* concretas. Esta estructura varía enormemente si consideramos distintos niveles escolares, es decir, la enseñanza de la geometría o de la modelización matemática se organiza de formas distintas si nos situamos en la etapa de infantil o en la universidad. Los niveles superiores de codeterminación se refieren a aquellas condiciones y restricciones más generales a las disciplinas, y se centran en analizar la forma en que nuestras *civilizaciones* y *sociedades*, a través de las *escuelas* (de la escuela infantil a las universidades), organizan la enseñanza de las disciplinas.

En nuestro trabajo, tomamos tres estudios de caso en los cuales se ha propuesto el diseño e implementación de un REI para la enseñanza de la modelización matemática en Educación Infantil, Educación Secundaria y Universidad. Para describir y analizar cada caso aportamos: (1) los fenómenos didácticos particulares a los cuales el REI construido quiere dar respuesta; (2) el breve resumen del diseño a priori de la actividad de modelización contemplada en el REI; (3) los análisis de las condiciones y restricciones principales detectadas tras sus respectivas implementaciones. Vamos a tomar aquí los niveles de codeterminación como instrumento metodológico para ilustrar en qué nivel se pueden situar las distintas condiciones creadas y restricciones detectadas para la enseñanza de la modelización matemática.

### **3. Análisis a posteriori de los REI en las distintas etapas educativas**

#### **3.1. Un REI en Educación Infantil: Los gusanos de seda**

El proceso de modelización que describiremos en este apartado surge, principalmente, como respuesta a dos fenómenos didácticos – la pérdida de sentido de los objetos matemáticos (Chevallard, 2007) y la desarticulación de la matemática escolar (García, 2005) – observables en diferentes instituciones y, en particular, en la Educación Infantil (EI) en torno a la enseñanza de los conocimientos numéricos.

Ruíz-Higueras (2005) destaca el papel dominante del conteo en EI, asumiendo que su dominio es suficiente para dotar de sentido y funcionalidad al número natural. Brousseau (2007) ya señaló los efectos indeseados de tal aproximación (niños que reproducen el algoritmo del conteo cuando les es demandado, pero incapaces de usarlo con sentido, por ejemplo, para construir una colección equipotente a otra). El conteo, como técnica óptima para medir colecciones finitas, emergerá con sentido y funcionalidad en EI como culminación de un proceso amplio de exploración de tipos de tareas (comparación, producción y control de colecciones), proceso en el que los niños tendrán oportunidades para construir técnicas intermedias y hacerlas evolucionar en función de su validez y coste (Sierra & Rodríguez, 2012; Lendínez, García & Sierra, 2017). El análisis exploratorio de algunos libros de texto en García y Sierra (2015) mostraba la atomización de las tareas de tipo numérico que proponen a los niños de esta etapa, así como la ausencia de otras necesarias para dotar de sentido a estos conocimientos. Este tipo de material escolar, de uso extendido en esta etapa (aunque en muchas clases de EI se complementa con otro tipo de trabajo menos estructurado), no permiten la exploración de situaciones reales y relativamente complejas (sistemas), que den sentido a una construcción articulada de herramientas numéricas, y matemáticas en general, como respuesta a tipos de problemas.

El proceso de modelización que brevemente desarrollaremos aquí (García & Ruíz-Higueras, 2013; Ruíz-Higueras & García, 2011) se articula en torno a la exploración de un sistema vivo y auténtico: una colección de gusanos de seda. Destacamos dos tipos de problemas en torno a este sistema. El primero tiene que ver con el cuidado de los gusanos. Introducir una hipótesis, plausible para los niños, de que cada gusano

necesita su hoja de morera para alimentarse, permite la emergencia de tipos de problemas que tienen que ver con la producción de colecciones equipotentes y la comparación de colecciones. Según la edad de los niños y los objetivos del docente, se podrá organizar la actividad matemática para que emerjan objetos como la biyección, las colecciones intermedias (como dedos de la mano u otros objetos), subitización, estimación, conteo, así como códigos para representar y comunicar información numérica (icónica, indo-arábiga). Estos objetos matemáticos juegan el papel de modelos, en la medida en que permiten describir información del sistema y, sobre todo, controlar y anticipar las acciones a realizar sobre el mismo (por ejemplo, dejar escrito en un papel las hojas que se necesitan para que, mañana, el jardinero las traiga).

El segundo tipo de problemas aparece ligado al hecho biológico de la evolución de los gusanos a crisálidas, y de estas a mariposas. Surgen, por un lado, cuestiones sobre cómo controlar y describir la evolución del sistema, teniendo en cuenta que se van formando subcolecciones (gusanos-capullos-mariposas) pero que la cantidad total se debe mantener inalterada (principio de conservación del sistema). De esta forma, la medida y el registro de la cantidad se amplía a problemas de tipo aditivo (cambio y combinación). Por otro lado, surgen cuestiones sobre la medida y el registro del tiempo, ligadas al interés de los niños por investigar en cuántos días el gusano pasa a la fase de crisálida y, tras esta, en cuántos días surge la mariposa. Aunque concebir y medir la magnitud tiempo es algo complejo en esta etapa, se puede abordar de manera inicial, a través de la discretización de la magnitud, la introducción de una unidad familiar para los niños (días) y el recurso a técnicas de registro (modelos) que permitan el conteo (por ejemplo, usando bandas numéricas, calendarios, tablas, etc.).

Finalmente, el sistema está abocado a su desaparición, ya que las mariposas mueren en pocos días. Aún así, se puede generar una actividad muy interesante de interpretación de modelos, que tiene que ver con la reconstrucción de momentos iniciales o intermedios del sistema (ver el mural de la Figura 2) a partir de los modelos que han servido para registrar la evolución del sistema.



Figura 2. Reconstrucción del sistema a partir de la interpretación de los modelos

El recorrido fue diseñado de manera conjunta con una maestra y experimentado por primera vez durante el curso 2008/2009 con alumnado de 5 años. Desde entonces se ha implementado en múltiples ocasiones y una versión algo más estructurada se ha publicado como libro de texto para el trabajo por proyectos en EI (Aguilar, 2010).

El diseño, experimentación y análisis de este proceso de modelización han permitido formular hipótesis sobre la ecología de procesos de modelización de este tipo en EI. En contraste con otras etapas, detectamos condiciones a priori favorables que situamos en los niveles de codeterminación:

- Niveles *sociedad-escuela*: la EI se caracteriza por una gran flexibilidad en la organización de tiempos y espacios, junto con una fuerte autonomía de los centros e implicación de las familias, lo que permitiría procesos de estudio amplios en el tiempo, orientados a la indagación y a la modelización de sistemas extra-matemáticos cercanos a la vida e intereses de los alumnos.
- Niveles *pedagogía-disciplina*: la normativa curricular enfatiza el carácter globalizador e integrador de la acción didáctica. Por ejemplo, en Andalucía la normativa de desarrollo del currículo de EI establece que será en contextos cercanos y accesibles donde los niños podrán construir aprendizajes a partir de procesos de manipulación, observación, indagación, exploración, comprobación, modificación, verbalización, representación... (Orden 05/09/2008). Se establece que el conocimiento matemático se desarrollará en situaciones cotidianas donde se puedan realizar comparaciones, agrupaciones, ordenaciones, selecciones, disposiciones espaciales, etc. Sin embargo, la realidad de los centros es heterogénea, no traduciéndose necesariamente estas condiciones en oportunidades para procesos de modelización como el descrito.
- Niveles *disciplina* e inferiores: según el currículo de EI, el saber a enseñar se estructura en tres grandes dominios (llamadas áreas), que a su vez se dividen en sectores (llamados bloques). Los conocimientos matemáticos a enseñar se presentan como un conjunto poco estructurado y no demasiado extenso, dentro del bloque «Medio físico: elementos, relaciones y medidas», correspondiente al dominio «Conocimiento del entorno», en el que se integran conocimientos de tipo lógico, numéricos (incluyendo una iniciación a la aritmética), espaciales y de iniciación a lo geométrico. Esto no siempre se traduce en una integración a nivel de las cuestiones, los temas y sectores, que en muchas ocasiones tienden a aislarse y a atomizarse en su tratamiento escolar.

En resumen, identificamos, a priori, un conjunto de condiciones muy favorables para la implementación de procesos de modelización de sistemas extra-matemáticos, cuya exploración, descripción y predicción de lugar a la emergencia, con sentido y de manera articulada, de herramientas matemáticas de tipo lógico, numérico, espacial, geométrico o relacionadas con las magnitudes y su medida. Sin embargo, cabe señalar que tanto el diseño como la experimentación de este REI se llevó a cabo con profesorado de EI y de Universidad con amplia experiencia en el diseño y uso en el aula de situaciones adidácticas, así con alumnado acostumbrado a trabajar de esta forma, lo que sin duda generó condiciones ecológicas muy favorables que no podemos considerar que existan, de manera efectiva y generalizada, en otros centros de EI.

### **3.2. Un REI en Educación Secundaria: ¿Qué esconden estas ruinas?**

El REI que ahora describimos surge principalmente como respuesta a tres fenómenos didácticos: el aislamiento disciplinar y tratamiento mono-disciplinar de las cuestiones, el confinamiento temático (por ejemplo, el tema de las cónicas en el dominio de geometría) y la pobreza de la dialéctica entre indagación y estudio a nivel escolar, en particular en Secundaria. Describimos el diseño e implementación de un REI codisciplinar entre matemáticas e historia para el primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria, donde se atendió a la complementariedad entre modelización matemática e indagación (Sala, 2016). La situación problemática parte de una investigación real sobre el descubrimiento de unas ruinas romanas en Badalona a cargo del equipo de arqueólogos del museo local (Padrós & Moranta, 2001). Se sabía que las ruinas tendrían que pertenecer a un tipo de edificio público en la ciudad romana de

*Baetulo*. El yacimiento hallado fue un muro curvilíneo de 1,5 m de altura, recubierto de pavimento romano, que hoy forma parte de la pared del jardín de un conjunto de casas habitadas. Sala, Barquero y Font (2018) y Sala, Font, Giménez y Barquero (2017) describen los procesos de modelización desarrollados, que resumimos.

El REI comienza presentando el sistema inicial con las ruinas romanas halladas, tal como se originó la investigación arqueológica y planteando la cuestión generatriz  $Q_0$ : *¿A qué edificio romano deben corresponder estas ruinas romanas?* El sistema inicial es complejo ya que supone tratar dialécticamente una problemática matemática -*¿Qué curvas se ajustan mejor al muro romano?* y su contextualización histórica -*¿Qué curvas tiene sentido considerar de acuerdo con los edificios construidos en la época romana?* A fin de producir hipótesis plausibles, se deben conocer y poner en uso distintos objetos matemáticos (principalmente geométricos sobre lugares geométricos en el plano y el espacio) y también conocimientos históricos (sobre la tipología de edificaciones romanas y su uso y función en la vida social romana).

La *primera etapa* del REI se diseña con el objetivo de que los estudiantes busquen información sobre formas y usos de los edificios públicos romanos, y realicen las primeras simulaciones de los modelos geométricos que puedan ajustar mejor al muro curvilíneo hallado para formular hipótesis iniciales sobre a qué tipo de edificio podrían pertenecer las ruinas del yacimiento. Esta fase termina con la elaboración de una primera respuesta provisional a  $Q_0$  aceptando y rechazando posibles hipótesis.

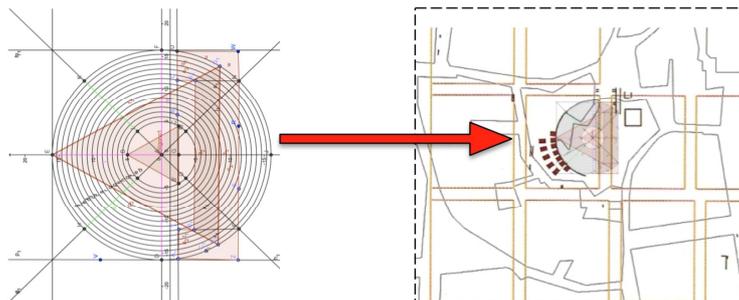


Figura 3a. *Modelo del teatro con GeoGebra por un grupo de estudiantes*

Figura 3b. *Imagen del modelo superpuesta en el plano de la zona del yacimiento*

La *segunda etapa* se centra en buscar cómo validar las respuestas provisionales. Se inicia un nuevo proceso de modelización partiendo del trabajo de simulación previo, donde se refinan y amplían los modelos matemáticos considerados a partir de una nueva fuente de información histórica, el canon de construcción de la época para edificios públicos. Se hace accesible a los estudiantes el libro de arquitectura de *Vitruvius* (c.75 AEC – 10 AEC aprox.) y, a partir de las normas de construcción indicadas, se simulan modelos de construcción de los edificios mediante programas informáticos como GeoGebra (ver Figura 3a). Esta etapa termina con la elaboración de una respuesta final, por grupos, sobre su hipótesis más plausible (mayoritariamente se indica que se trataba de un teatro) y la descripción del proceso de indagación seguido.

La tercera y última etapa, se centró en una cuestión complementaria a  $Q_0$  sobre *¿cómo consiguieron los arqueólogos, en su práctica profesional, construir, constatar y validar sus hipótesis sobre a qué tipo de edificio correspondían estas ruinas?* Se planeó una entrevista con la arqueóloga del equipo del Museo de Badalona que había realizado el descubrimiento y la posterior redacción del informe de los expertos. Estos momentos de interacción, donde los estudiantes pudieron exponer sus respuestas y la

arqueóloga pudo plantearles nuevas cuestiones e información, amplió un medio de validación de respuestas y de contrastación de los procesos de indagación seguidos.

La primera implementación del REI se realizó durante las últimas semanas del curso 2014-15 con un grupo de 30 estudiantes de primer curso de Educación Secundaria (12-13 años) en un centro de Badalona. Participaron las profesoras de Matemáticas y la de Historia, así como la investigadora que se encargó del diseño y de la observación. Las profesoras organizaron a los estudiantes en equipos de tres personas. Cada equipo fue elaborando un informe de indagación donde exponer cuestiones, modelos, conceptos y herramientas de matemáticas y/o historia que ponían en uso y sus respuestas finales, así como una descripción del proceso de indagación.

En relación con el análisis realizado sobre la ecología de procesos de modelización en esta etapa educativa, esta experimentación ha evidenciado ciertas condiciones y restricciones que podemos relacionar con distintos niveles de codeterminación:

- Niveles *sociedad-escuela*, la integración de la interdisciplinariedad en la escuela se ha constituido en los últimos años en una necesidad dado el carácter complejo de la realidad en que se basan las prácticas educativas para un aprendizaje significativo en todos los niveles escolares. Ello implica promover un enfoque multidimensional de cuestiones socialmente relevantes que no se puede realizar a partir de disciplinas aisladas con fragmentación de conocimientos. Un ejemplo es la emergencia del llamado STEM (Stohlmann, Moore, McClelland & Roehrig, 2011) o el enfoque de aprendizaje basado en indagación (IBL), más desarrollado en el ámbito de Ciencias y desplazado hacia las matemáticas. En las instituciones de enseñanza secundaria, las metodologías que implican un tratamiento interdisciplinar de las materias son difíciles de implementar, en parte por la rigidez de los currículos, definidos por áreas y disciplinas, y por la ausencia de prácticas que planteen un abordaje de realidades escolares que permitan integrar la indagación en el estudio de las matemáticas en interacción con otras disciplinas. El REI implementado parte de la necesidad de tratar cuestiones que lleven a un estudio codisciplinar compartido entre matemáticas e historia que, curricularmente y en especial en Secundaria, se plantean como universos independientes. Esta condición de codisciplinariedad, que valoramos como condición positiva, podría representar un reto para cualquier centro escolar al requerir de una reorganización que afecta, por ejemplo, a la compatibilización horaria de espacios y profesorado. En el caso descrito no hubo estas restricciones ya que, por decisión de la escuela, se crearon condiciones favorables, dedicando casi todo el horario a trabajar de forma intensiva en el REI.
- Niveles *pedagogía-disciplina*: En el REI analizado, se planeó una secuencia de cuestiones que requería el desarrollo conjunto de conocimientos y herramientas de matemáticas e historia según se iban necesitando y así lograr que los estudiantes accedieran a una visión de las matemáticas y de la historia distinta a la tradicional. Gracias a este diseño, la metodología de enseñanza de conocimientos referidos a las dos disciplinas que integra el proceso de indagación (formular hipótesis, buscar datos, crear modelos, validar, comunicar, etc.) como la forma de acceder a esos conocimientos pasa a institucionalizarse en la escuela. Tanto es así que tras la primera experimentación el centro incluyó este REI en la programación curricular.
- En el diseño e implementación se trabajó con las dos profesoras de las asignaturas, implicando un aumento del tiempo dedicado a comunicarse para coordinarse en miras a una puesta en práctica satisfactoria. Se crearon instrumentos (redacción de informes, programación de puestas en común, entrevistas, recursos digitales: blog, GeoGebra...) para evaluar aspectos de la competencia de modelización (construir y

validar modelos) e indagación (formular hipótesis, buscar y seleccionar información relevante, buscar estrategias para validación, etc.) que emergieron como esenciales, al margen de las competencias relativas a conocimientos disciplinares. Aunque estos instrumentos permitían una evaluación global de diversas competencias, no profundizaban en las específicas de modelización. Ser capaces de obtener una evaluación detallada de los estudiantes durante todo el proceso es un aspecto que sigue preocupando al profesorado y, por nuestra parte, es un aspecto crucial para seguir investigando-

- Nivel de la *disciplina y niveles específicos de organización de la matemática*: Las competencias desarrolladas contemplaban los contenidos clave de matemáticas (propiedades de la circunferencia, de la elipse, mediatriz, etc.) y de historia (romanización, vida cotidiana en la época romana, etc.), así como contenidos de tecnología (uso de GeoGebra, del blog, del navegador de Internet, etc.) y otros contenidos transversales como la argumentación o la toma de decisiones. Debido a la interacción de las dos disciplinas en la modelización de la realidad, y a las conexiones intra- y extra-matemáticas que ello posibilitó, los estudiantes fueron capaces de resolver el problema con una respuesta razonada y plausible.

### 3.3. Un REI a nivel Universitario: Diseño de piezas

El último caso corresponde a un REI a nivel Universitario en el ámbito de la Teoría de la Elasticidad en un Grado en Ingeniería Mecánica. Este proceso se diseñó como posible respuesta a fenómenos didácticos bastante generalizados en las instituciones universitarias, en particular en la formación de ingenieros: la desconexión de la actividad escolar y la actividad profesional en ingeniería (Kent & Noss, 2002) y la pérdida de la razón de ser de los objetos matemáticos (Chevallard, 2004).

La Teoría de la Elasticidad puede considerarse como el estudio de piezas de cualquier geometría bajo diferentes configuraciones de carga con el objetivo de evitar su falla por plastificación o por deformación excesiva. Se trata de un ámbito muy matematizado que incluye el uso de tensores y valores y vectores propios. Respecto al fenómeno de la desconexión de la actividad escolar-profesional, este tiene uno de sus orígenes en el hecho de que la resolución analítica de las ecuaciones de la elasticidad se limita a casos con geometrías y configuraciones de carga simplificadas. Sin embargo, el interés de estos problemas resolubles analíticamente en la actividad profesional de la ingeniería es muy limitado, pues la mayoría de las situaciones reales no pueden simplificarse de este modo. Además, esta resolución analítica (con papel y lápiz) de problemas simplificados se ha convertido en la principal razón de ser de este dominio en las instituciones escolares. Es ilustrativa de estos dos fenómenos la siguiente cita de uno de los libros referentes del ámbito (nuestra traducción)

“Los problemas del libro, que representan situaciones límite, son más o menos los mismos que se abordan en la mayoría de los libros de elasticidad (...) Los métodos que se tratan aquí pueden no ser directamente útiles para resolver problemas prácticos de ingeniería, pero la discusión proporciona ciertos conocimientos sobre la formulación y solución de dichos problemas simplificados” (Reddy, 2013, p. 24)

Como respuesta a esta situación se desarrolló una propuesta de REI que permitiera superar parcialmente los fenómenos descritos. Este proceso pretendía situar en el centro de la actividad de modelización la siguiente razón de ser del conocimiento: “Diseñar (determinar forma y material) una pieza evitando su falla elástica y el exceso de deformaciones”. Así, el proceso, detallado en Florensa, Bosch, Gascón y Winsløw

(2018), se articula en torno el estudio de un sistema real: el rediseño (por lo que respecta a forma y material) de una pieza metálica de una bicicleta.

El estudio de este sistema presenta un desafío importante: los aspectos a considerar para abordar el problema, la información a gestionar, así como la dependencia entre variables del sistema hacen que el modelo que se desarrolle involucre praxeologías mucho más complejas e interconectadas que las existentes en la organización didáctico-epistemológica anterior. El modelo incorpora tareas relacionadas no sólo con los niveles de tensión y deformación de la pieza sino también otras que involucran aspectos sobre fabricación, durabilidad, coste y eficiencia, las cuales son mucho más cercanas a las existentes en la práctica profesional. Es interesante el desarrollo progresivo del modelo que analiza el sistema: los resultados de algunas tareas deben ser reconsiderados de nuevo por resultados obtenidos de otras actividades, provocando de esta manera una ampliación del modelo, de las tareas y de su nivel de dependencia.

Otro aspecto del trabajo con este sistema se relaciona con el tipo de trabajo matemático que se desarrolla en el modelo. Estudiar las tensiones y deformaciones de las piezas que intervienen en una bicicleta no puede hacerse de manera analítica. Esto genera una ruptura con la organización donde la resolución de problemas analíticos era central. En contraposición, el modelo debe incorporar métodos numéricos para estudiar el sistema y, según los resultados obtenidos, modificarlo. Así, la actividad matemática experimenta una transición desde una actividad más algorítmica en la que domina el trabajo de la técnica hacia otra más funcional que presenta nuevos retos.

La experiencia se diseñó entre un grupo de investigadores y una profesora y se implementó por primera vez el curso 2014-15 en la Escola Universitària Salesiana de Sarrià. El proceso de estudio se ha seguido implementando cada curso hasta 2019-20 con modificaciones siempre en el marco de la asignatura de Elasticidad. En todas las experiencias se mantuvo la organización didáctica previa durante las 7 primeras semanas y durante las 8 restantes se implementó el REI. A partir del análisis de la implementación, identificamos ciertas condiciones y restricciones:

- Niveles *sociedad-escuela*: durante las últimas décadas, varias instituciones en el ámbito de la ingeniería han hecho llamadas a incorporar de procesos de indagación lo cual es una condición favorable para implementar procesos de modelización. Sin embargo, el proceso de diseño, su formato y la metodología de análisis aún son cuestiones abiertas. En segundo lugar, destaca el doble papel del profesor en la institución universitaria: docente-investigador. Esta duplicidad sugiere que puede existir cierta cercanía entre el «saber sabio» y el «saber a enseñar». Esta cercanía es a menudo ilusoria. En el caso que nos ocupa, se identificó una desconexión entre la epistemología dominante (cristalizada hace más de 60 años) y el trabajo de los investigadores del ámbito, que ha evolucionado de manera importante.
- Niveles *escuela-pedagogía*: el currículo actual en los grados de ingeniería está formulado en términos de competencias. Esta condición permite integrar procesos de modelización como el presentado. Su supervivencia durante cinco cursos, incluyendo un proceso de acreditación de la titulación, demuestran este hecho. Sin embargo, no se puede obviar que la escuela en la que se ha realizado la experiencia presenta condiciones específicas favorables. Se trata de un centro que fomenta la innovación docente, con espacios para la formación didáctica y pedagógica de sus docentes. En consecuencia, la implementación de este tipo de procesos en la institución se ha multiplicado: cuatro asignaturas de la escuela (Bartolomé, Florensa, Bosch & Gascón, 2018) han adoptado estas prácticas. Una restricción

que la experiencia ha permitido identificar es el confinamiento temático y el rol de las asignaturas a nivel universitario: muchas de las praxeologías que aparecen en el proceso de modelización surgen de manera más aislada y local en otras asignaturas. Esto dificulta la gestión del proceso, que debe considerar el grado de apertura del trabajo de modelización para evitar un cierto grado de solapamiento.

- Niveles *disciplina* e inferiores: la reorganización propuesta por el proceso presentado permite la integración de una actividad puntual en una organización más compleja y con una razón de ser explícita. Esta nueva organización permite superar una concepción de la modelización aplicacionista en la que el modelo se limita a recibir y generar datos (Barquero, Bosch & Gascón, 2014; González-Martín & Hernandez-Gomes, 2019).

En conclusión, el tercer REI muestra que en el ámbito universitario de la ingeniería se lograron mayoritariamente condiciones favorables para implementar procesos de modelización en el sentido de la TAD. Para el caso planteado, los fenómenos didácticos identificados fueron parcialmente superados: el trabajo que se llevó a cabo permitió una reestructuración praxeológica generando organizaciones progresivamente más complejas con el fin de analizar el sistema inicial planteado.

#### 4. Discusión y conclusiones

Los tres casos presentados han permitido, mediante el uso de la escala de niveles de codeterminación, visibilizar y situar condiciones y restricciones que afectan a la integración de los procesos de modelización en diferentes instituciones. Presentamos a continuación un análisis transversal de las mismas desde una perspectiva más amplia.

##### Niveles *sociedad-escuela*

Los tres casos han puesto en evidencia que las condiciones que emanan son, en general, favorables para la integración de procesos de modelización. Los tres casos identifican la existencia de ciertos eslóganes pedagógicos difundidos por actores sociales entre los que destacan: el desarrollo de competencias transversales, la educación activa, la formación de ciudadanos críticos, etc. Se trata de un fenómeno generalizado que se basa en postulados filosóficos y socio-económicos que, en líneas generales, tiende a defender la escuela más como un lugar en el que los estudiantes desarrollan ciertas destrezas consideradas como necesarias en las sociedades actuales, que como lugar donde se apropian de ciertos conocimientos suministrados por el docente. Con diferencias importantes, en el marco de la TAD esta orientación general queda reflejada en los postulados básicos del paradigma del cuestionamiento del mundo (Chevallard, 2015). Por tanto, es posible formular a modo de conjetura que, en la época actual, y de manera relativamente generalizada (al menos en sociedades occidentales), las condiciones que emergen en los niveles sociedad-escuela son, en general, favorables al desarrollo de procesos de modelización. Sin embargo, el análisis de los casos muestra que la concreción de estos grandes principios en el nivel escuela presenta retos importantes. Por ejemplo, las instituciones escolares tienen un grado importante de rigidez en varios aspectos (espacios, asignaturas, tiempos, entre otros) que son restricciones para los procesos de modelización. Los casos presentados a nivel de EI y universidad ponen de manifiesto cómo estas condiciones particulares en este ámbito influyen en su desarrollo. En el nivel de EI, las condiciones de flexibilidad ligadas a una etapa en la que la libertad en tiempos y espacios son cruciales para la viabilidad del proceso. En el nivel universitario, la idiosincrasia de la institución en la que se implementó el proceso, que promueve procesos de innovación didáctica,

facilita la implementación del REI. A modo de conjetura, podemos considerar que estructuras escolares más flexibles, abiertas y adaptables crean condiciones más favorables para los procesos de modelización, mientras que estas condiciones son cada vez más restrictivas cuando estas estructuras son más rígidas y cerradas.

### Niveles pedagogía-disciplina

Los tres casos analizados se apoyan en el modelo didáctico de los REI, lo que implica la puesta en funcionamiento de nuevas dinámicas y dispositivos de ayuda al estudio. El caso de EI, al menos a priori, parece reflejar condiciones especialmente favorables, al ser una etapa en la que destaca la atención a procesos de estudio en torno a la exploración e indagación en situaciones cotidianas y cercanas a los estudiantes. En las otras dos instituciones, los casos señalan la necesidad de generar ciertas dinámicas y dispositivos de ayuda al estudio que no están disponibles, lo que podemos considerar una restricción importante. Un segundo aspecto tiene que ver con el nivel disciplinar. Los tres procesos de estudio se basan en un modelo epistemológico de referencia que propone una reconstrucción alternativa del conocimiento escolar. Esto provoca que el contraste con la epistemología dominante sea una restricción importante, sobre todo en el REI de secundaria y el de universidad, instituciones en las que el saber a enseñar aparece más estructurado y formalizado. Podemos establecer, a modo de conjetura, que la implementación de procesos de modelización implicaría una renovación en el nivel pedagogía-disciplina más profundo en las instituciones educación secundaria y universidad, que permitiría nuevas formas y dispositivos de ayuda al estudio, y la modificación de la epistemología dominante. Esta situación creemos que se dará en menor medida en una institución como la educación infantil.

Las conjeturas formuladas pretenden ser propuestas de desarrollo de líneas de investigación, no necesariamente nuevas, en las que la comunidad de investigación en didáctica de las matemáticas en el marco de la TAD debería seguir profundizando.

### **Agradecimientos**

Proyectos RTI2018-101153-A-C22 y RTI2018-101153-B-C21 (AEI/FEDER, UE) y PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

### **Referencias**

- Aguilar, B. (2010). *Los gusanos de seda*. Madrid: Anaya.
- Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. Trabajo de Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Los Recorridos de Estudio e Investigación en las escuelas de Ingeniería. *Enseñanza de Las Ciencias*, 29(3), 339–352.
- Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2013). The ecological dimension in teaching of mathematical modelling at university. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 33(3), 307–338.
- Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2019). The unit of analysis in the formulation of research problems: The case of mathematical modelling at university level. *Research in Mathematics Education*, 21(3), 314–330.

- Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2014). Incidencia del «aplicacionismo» en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 83–100.
- Bartolomé, E., Florensa, I., Bosch, M., & Gascón, J. (2018). A ‘study and research path’ enriching the learning of mechanical engineering. *European Journal of Engineering Education*, 44(3), 330–346.
- Bosch, M., & Gascón, J. (2006) Twenty-five years of didactic transposition. *ICMI Bulletin*, 58, 51–64.
- Bolea, M. P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Trabajo de Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Carreira, S., Barquero, B., Kaiser, G., & Cooper, J. (2019). Introducing CERME Thematic Working Group 6 ‘Applications and Modelling’. *EMS Newsletter*, March 2019, 48–49.
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l’arithmétique à l’algèbre dans l’enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modélisation. *Petit X*, 19(19), 43–72.
- Chevallard, Y. (2002). Organiser l’étude 1. Structures et fonctions. En J.-L. Dorier et al. (Eds), *Actes de la XIe École d’Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 3–32). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. Comunicación en Journées de Didactique Comparée. Mayo de 2004, Lyon, Francia.
- Chevallard, Y. (2007). Les mathématiques à l’école: pour une révolution épistémologique et didactique. *Bulletin de l’APMEP*, 471, 439–461.
- Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics tomorrow’s society: A case for an oncomic counter paradigm. En S. J. Cho (Ed.), *Proceedings of 12<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education* (pp. 173–187). Seúl, Corea del Sur: Springer.
- Florensa, I., Bosch, M., Gascón, J., & Winsløw, C. (2018). Study and Research Paths: A new tool for design and management of project based learning in Engineering. *International Journal of Engineering Education*, 34(6), 1848–1862.
- García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Trabajo de Tesis Doctoral. Universidad de Jaén.
- García, F. J., Barquero, B., Florensa, I., & Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 75–94.
- García, F. J., Gascón, J., Ruíz-Higueras, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 226–246.
- García, F. J., & Ruíz-Higueras, L. (2013). Task design within the Anthropological Theory of the Didactics: Study and research paths for pre-school. En C.

- Margolinas (Ed.), *Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 421–429). Oxford, Inglaterra: ICMI.
- García, F. J., & Sierra, T. Á. (2015). Modelos epistemológicos de referencia en el análisis de la actividad matemática en libros de texto: El caso del número en la escuela infantil. En C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 299–307). Alicante: SEIEM.
- Gascón, J. (1994). El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. *Educación Matemática*, 6(3), 37-51
- Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(2), 203–231.
- Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, 25 años, 99–123.
- González-Martín, A., & Hernández-Gomes, G. (2019). The graph of a function and its antiderivative: A praxeological analysis in the context of Mechanics of Solids for engineering. En U. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of CERME11* (pp. 2510-2517). Utrech, Países Bajos: ERME.
- Kent, P., & Noss, R. (2002). *The mathematical components of engineering expertise: the relationship between doing and understanding mathematics*. Comunicación en II Annual Symposium on Engineering Education. Enero 2002, Londres.
- Lendínez, E. M., García, F. J., & Sierra, T. Á. (2017). La enseñanza del número en la escuela infantil: un estudio exploratorio del logos de la profesión. *Journal of Research in Mathematics Education*, 6(1), 33–55.
- Lucas, C. (2015). *Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional*. Trabajo de Tesis Doctoral. Universidad de Vigo.
- Padrós, P., & Moranta, L. (2001). La ciutat i la memòria. El teatre romà de Baetulo. *Revista Carrer dels Arbres*, 12, 15–31.
- Reddy, J. N. (2013). *An introduction to continuum mechanics*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.
- Ruíz-Higueras, L. (2005). La construcción de los primeros conocimientos numéricos. En M. C. Chamorro (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil* (pp. 181–219). Madrid: Pearson Educación.
- Ruíz-Higueras, L., & García, F. J. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(1), 41–70.
- Sala, G. (2016). *Competència d'indagació matemàtica en contextos històrics a Primària i Secundària*. Trabajo de Tesis Doctoral. Universitat de Barcelona.
- Sala, G., Font, V., Giménez, J., & Barquero, B. (2017). Inquiry and modelling in an archaeological context. En G. Stillman, W. Blum, & G. Kaiser (Eds.), *Mathematical modelling and applications: Crossing and researching boundaries in mathematical education* (pp. 325–335). Cham, Suiza: Springer.
- Sala, G., Barquero, B., & Font, V. (2018). Modelización e indagación en la propuesta

de un REI codisciplinar de matemáticas e historia. *Preactas del 6º Congreso de la TAD* (pp. 311–325). Grenoble, Francia: Université Grenoble Alpes.

Sierra, T. Á., & Rodríguez, E. (2012). Una propuesta para la enseñanza del número en la Educación Infantil. *Números*, 80, 25-52.

Stohlmann, M., Moore, T. J., McClelland, J., & Roehrig, G. (2011). Impressions of a middle grades STEM integration program. *Middle School Journal*, 43(1), 32–40.

Winsløw, C., Matheron, Y., & Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model of didactics. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 267–284.

### **Referencias de los autores**

Ignasi Florensa, Escola Universitària Salesiana de Sarrià, Universitat Autònoma de Barcelona (España). iflorensa@euss.es

Francisco Javier García, Universidad de Jaén (España). ffgarcia@ujaen.es

Gemma Sala, Universitat de Barcelona (España). gsala@ub.es

## **Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática: Estudios de caso en distintos niveles educativos**

Ignasi Florensa, Escola Universitària Salesiana de Sarrià, Universitat Autònoma de Barcelona

Francisco Javier García, Universidad de Jaén

Gemma Sala, Universitat de Barcelona

Mathematical modelling and its incorporation in teaching and learning processes are a flourishing research field in mathematics education: the number of papers regarding this question is increasing. Within the anthropological theory of the didactic (ATD), several works tackling this issue have been developed in the last decades. In this approach, the notion of mathematical modelling is closely related to mathematical activity and, consequently, to the concept of praxeology. ATD considers mathematical activity as consisting of producing, transforming, interpreting and developing mathematical models. Within this framework, these models are processes of construction of praxeologies of increasing complexity. Herein one of the central aspects is the analysis of the ecological conditions and constraints affecting the implementation of modelling processes in school institutions. The levels of didactic codeterminacy are the main theoretical construct developed to analyse such conditions and constraints. A second proposal of the ATD in regard with mathematical modelling in school institutions is the didactic device of study and research paths (SRPs). This device consists in stating a generating question to the community of study (students and teachers) that will address the question and derived subquestions. In the last decade diverse researchers have designed, experienced and analysed several modelling processes in different institutions and teaching levels. We present in this paper three SRPs implemented in three institutions and levels: early childhood, secondary and university education. We illustrate the use of the levels of didactic codeterminacy and to analyse similarities and differences of the ecological conditions affecting the implementations. The first modelling process revolves around the didactic phenomena involving cardinal numbers and its development in the early childhood context. The second SRP is a codisciplinary proposal at the crossroads between mathematics and history. Finally, the modelling study process at university presents the design of part of a bike where mathematical modelling and mechanical engineering are involved. The analysis of these three experiences first shows up the early childhood level as the one with more favourable conditions mainly due to the lack of a highly formalised curriculum and the absence of a compartmentalised knowledge structure. Second, the three cases show strong dependence of the long-term viability on the specific conditions of each institution further from the conditions of the higher levels. We finish by raising some conjectures as proposals to be developed in future research.