Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico

Francisco Javier García[1], Universidad de Jaén (España)

Berta Barquero[2], Universitat de Barcelona (España)

Ignasi Florensa[3], Universitat Autònoma de Barcelona (España)

Marianna Bosch[4], Universitat Ramon Llull (España)

Recibido el 12 de abril de 2019; aceptado el 29 de abril de 2019

Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico

Resumen

En la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), el diseño de tareas se integra dentro de su metodología experimental planteada en términos de ingeniería didáctica. La implementación de nuevas organizaciones de enseñanza y aprendizaje, basadas en nuevas formas de concebir las actividades matemáticas escolares, se inscribe en una problemática epistemológica e institucional. En este artículo, presentamos una reflexión sobre los objetivos, los principios, la metodología y el alcance que atribuimos a este trabajo experimental. La reflexión se complementa con la descripción de tres casos, que sirven para ejemplificar cómo estos objetivos, principios y metodología han sido implementados en procesos didácticos concretos. Concluimos con una reflexión sobre la necesaria dialéctica y articulación entre investigación, diseño y prácticas de aula a fin de profundizar en el análisis de la ecología de estas propuestas, es decir, de las condiciones que permiten que ciertas tareas puedan vivir en las instituciones docentes, así como las restricciones que impiden su desarrollo como actividades normalizadas en el aula, desde una visión no normativa de la investigación didáctica.

Palabras clave. Diseño de tareas; fenómenos didácticos; ingeniería didáctica; recorridos de estudio e investigación; modelización matemática.

Task design in the framework of the Anthropological Theory of the Didactic

Abstract

In the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), task design is integrated into its experimental methodology in terms of didactic engineering. The implementation of new teaching and learning organizations, based on new ways of conceiving school mathematical activities, is an integral component of the ATD epistemological and institutional analyses. In this article, we reflect on the objectives, principles, methodology and scope that we attribute to this experimental work. Three cases complement this reflection, to exemplify how these objectives, principles and methodology have been implemented in concrete didactic processes. We conclude with a reflection about the necessary dialectic between research, design and teaching practices, with the aim of deepening into the analysis of the ecology of our proposals, that is, the conditions that enable certain activities to exist in school institutions, as well as the constraints that hinder their development as normalised classroom activities, from a non-normative perspective of didactic research.

García, F.J., Baquero, B., Florensa, I. & Bosch, M. (2019). Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 15*, 75-94.

Keywords. Task design; didactic phenomena; didactic engineering; study and research paths; mathematical modelling.

Desenho de tarefas no âmbito da Teoria Antropológica do Didático

Resumo

Na Teoria Antropológica do Didático (TAD), o desenho de tarefas integra-se dentro da sua metodologia experimental formulada em termos de engenharia didática. A implementação de novas organizações de ensino e aprendizagem, baseadas em novas formas de conceber as atividades matemáticas escolares, faz parte de uma problemática epistemológica e institucional. Neste artigo, apresentamos uma reflexão sobre os objetivos, os princípios, a metodologia e o alcance que atribuímos a este trabalho experimental. Esta reflexão é complementada com a descrição de três casos, que servem para exemplificar como estes objetivos, princípios e metodologia foram implementados em processos didáticos concretos. Concluímos com uma reflexão sobre a necessária dialética e articulação entre investigação, desenho e práticas de aula, a fim de aprofundar a análise da ecologia destas propostas, ou seja, as condições que permitem que certas tarefas possam viver nas instituições de ensino, assim como as restrições que impedem o seu desenvolvimento como atividades normalizadas em sala de aula, a partir de uma visão não normativa da investigação didática.

Palavras chave. Desenho de tarefas; fenómenos didáticos; engenharia didática; percursos de estudo e investigação; modelação matemática.

'Task-design' dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique

Résumé

Dans la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), la conception de tâches d'enseignement est intégrée dans sa méthodologie expérimentale en termes d'ingénierie didactique. La mise en place de nouvelles organisations didactiques, basées sur de nouvelles façons de concevoir les activités mathématiques scolaires, s'inscrit dans une problématique épistémologique et institutionnelle. Dans cet article, nous présentons une réflexion sur les objectifs, principes, méthodologie et portée que nous attribuons à ce travail expérimental. Cette réflexion est complétée par la description de trois cas qui illustrent comment ces objectifs, principes et méthodes ont été mis en œuvre dans des processus didactiques concrets. Nous concluons par une réflexion sur la dialectique et l'articulation nécessaires entre la recherche, le design et les pratiques en classe pour approfondir l'analyse de l'écologie des nouvelles organisations didactiques, c'est-à-dire des conditions qui permettent à certaines activités de vivre dans les institutions scolaires, ainsi que des contraintes qui empêchent leur développement comme activités normalisées en classe, dans une perspective non-normative de la recherche en didactique.

Paroles clés. Conception de tâches; phénomènes didactiques; ingénierie didactique; parcours d'étude et de recherche; modélisation mathématique.

1. Introducción

En el desarrollo de la investigación en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), el diseño de tareas ha ido ocupando una posición cada vez más relevante. Si bien en sus comienzos ligados a la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1985), los análisis se centraban más en fenómenos relacionados con las condiciones de existencia y el tránsito de las organizaciones matemáticas entre instituciones, con el tiempo la identificación de dichos fenómenos supuso un interés por el diseño de dispositivos didácticos que permitiesen abordarlos. A modo de ejemplo, si tomamos como referencia las tesis doctorales dentro de la comunidad de investigadores de la TAD en España, observamos que en la mayoría el diseño e implementación de algún tipo de intervención ha sido una parte esencial de la investigación (e.g., García, 2005; Rodríguez, 2005; Sierra, 2006; Barquero, 2009; Ruiz-Munzón, 2010; Serrano, 2013; Florensa, 2018). El trabajo dentro de la TAD en otros países, como Francia, Dinamarca o Argentina, también revela la enorme importancia que el diseño de actividades tiene en las investigaciones que se han llevado a cabo.

La experiencia acumulada durante todos estos años, tanto sobre el proceso de diseño de tareas como en su implementación y análisis en el aula, son suficientes para reflexionar sobre qué significa diseñar en la TAD, intentando dar respuestas, al menos parcialmente, a las siguientes cuestiones guía:

¿Por qué diseñamos en la TAD? i.e., ¿cuáles son nuestros objetivos como diseñadores?

¿Cómo llevamos a cabo este trabajo de diseño? i.e., ¿cuáles son nuestros principios de diseño y nuestra metodología?

¿Cuál es, o podría ser, el impacto de nuestro trabajo como diseñadores? i.e., ¿bajo qué condiciones ecológicas viven, o deberían vivir, nuestros diseños y qué restricciones deben afrontar?

En la primera parte del artículo ofrecemos elementos de respuesta a las dos primeras cuestiones. Siguen una serie de casos que permiten señalar cómo este trabajo de diseño se ha desarrollado en diversas investigaciones. Terminamos con una reflexión sobre la distancia entre *innovación* e *investigación*, centrándonos en la problemática ecológica y normativa que afecta la implementación de nuevos diseños en el aula.

2. Marco teórico

En esta sección exponemos los elementos teóricos básicos que explican los fines del trabajo de diseño en la TAD, así como los principios y la metodología que lo guían.

2.1. Diseño en la TAD: Fines y objetivos

La TAD, como marco teórico, parte de una concepción de la didáctica de las matemáticas como la ciencia que estudia la difusión y a adquisición del conocimiento matemático (Chevallard y Sensevy, 2014). En consecuencia, sitúa su problemática en un nivel epistemológico e institucional, en contraste con otros marcos teóricos que abordan problemáticas ligadas a dimensiones cognitivas, sociológicas, lingüísticas, etc.

La formulación de la teoría de la transposición didáctica ya puso de manifiesto el carácter problemático de esta difusión del conocimiento matemático entre instituciones, dando lugar al desarrollo de constructos teóricos cada vez más elaborados que, a día de hoy, podemos considerar que conforman lo que se conoce como la TAD y que, como ocurre en cualquier otro campo científico, está en continuo desarrollo.

Según señala Gascón (2014), desde esta perspectiva, la didáctica de las matemáticas se entiende como la ciencia que construye, describe y explica fenómenos didácticos, de forma análoga a otras ciencias sociales que construyen, describen y explican fenómenos sociales. Gascón (2013) sitúa el origen de esta concepción de la didáctica de las matemáticas en la *revolución* que supuso la obra de Guy Brousseau y sus colaboradores, destacando "la ambición original de la TSD [teoría de las situaciones didácticas] de construir una ciencia didáctica relativamente autónoma, con un objeto de estudio propio y en la que la noción de 'fenómeno didáctico' ocupa una posición central" (Gascón, 2013, p. 71). Así, Gascón (2014) atribuye un carácter potencialmente fenomenotécnico a la didáctica de las matemáticas. Apoyándose en Torretti (2012), señala que un fenómeno se debe entender como "un suceso o proceso tipificable y reproducible […], desglosable del devenir" (Torretti, 2012, citado por Gascón, 2014, p. 104). En particular, un fenómeno didáctico puede ser entendido en el sentido de la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 2002), como "una regularidad no intencional que no se puede reducir a fenómenos cognitivos, sociológicos o lingüísticos" (Gascón, 2013, p. 74)

En el ámbito de la TAD, se postula la existencia de fenómenos didácticos ligados a la relatividad institucional del conocimiento matemático. Por ello, Gascón (2014) señala la necesidad del investigador de cuestionar tanto el modelo epistemológico global de las matemáticas, como los modelos epistemológicos locales de los saberes matemáticos vigentes en las instituciones que intervienen en los procesos de transposición didáctica. Este cuestionamiento conduce a elaborar modelos epistemológicos propios de la actividad matemática en general y de los ámbitos de la matemática que se analizan. A través de estos *modelos epistemológicos de referencia* (MER), el investigador toma un punto de vista determinado y explícito acerca de la actividad matemática que se lleva a cabo en una institución, convirtiéndose en una herramienta central para la identificación de fenómenos didácticos. Numerosas investigaciones en el marco de la TAD han mostrado la fecundidad de estos MER para identificar fenómenos didácticos. En Bolea (2002) la construcción de un MER del álgebra como herramienta de modelización de organizaciones matemáticas previamente existentes, permitió identificar fenómenos didácticos ligados a la concepción dominante, en la educación secundaria, del álgebra como simple generalización de la aritmética. Esta "aritmética generalizada" tiende a recluir el álgebra al trabajo con ecuaciones y dificulta su desarrollo como proceso de modelización -o "algebrización"- de otros ámbitos matemáticos.

Así, una primera etapa en la metodología de investigación de la TAD tiene que ver con la construcción de los MER del ámbito o ámbitos de la actividad matemática que se estén analizando. Estos modelos deben ser entendidos siempre como relativos y provisionales, abiertos a cuestionamiento y revisión, y pertinentes en la medida en que sean fértiles para la identificación de fenómenos didácticos y la formulación de problemas didácticos (Gascón, 2014). La construcción de tales modelos es compleja y laboriosa, incluyendo el análisis y cuestionamiento de varias fuentes de información, entre otras, "fuentes sabias" que den acceso a la "matemática sabia" (i.e., la matemática de las instituciones productoras de saber matemático), "fuentes escolares" de den acceso a la "matemática escolar" (i.e., la matemática de las instituciones encargadas de la enseñanza de las matemáticas), incluyendo en ambos casos las "fuentes históricas" que permitan rastrear el origen y evolución del conocimiento matemático en el tiempo, y con referencia a diversas instituciones, tanto sabias como escolares o de utilización del saber.

La identificación de fenómenos didácticos y la formulación de problemas de investigación, a través de los MER, provoca el interés de los investigadores por cuestionarse por qué la enseñanza de las matemáticas es como es en una cierta institución docente, y si es posible organizar esta enseñanza de manera que sean modificables efectos que generan los fenómenos didácticos identificados. Si lo primero (MER, fenómenos didácticos) forma parte de lo que Gascón (2011) define como *dimensión epistemológica* de un problema didáctico, lo segundo se corresponde con lo que este autor considera *dimensión económico-institucional* de un problema didáctico. Involucra, por un lado, el análisis del funcionamiento de las organizaciones matemáticas y didácticas en las instituciones implicadas en el problema didáctico y, por otro, la concepción de nuevas formas de organizar el conocimiento matemático y su estudio.

> "(…) no hay que olvidar que cuando nos preguntamos *cómo son las cosas* aparecen cuestiones que sólo pueden responderse investigando lo que sucede cuando intentamos *cambiar las cosas* en una dirección determinada (….) la actividad que se ha de llevar a cabo para responder a las preguntas tocantes a la dimensión económico-institucional de un problema didáctico está muy ligada a lo que Chevallard (2010, en prensa [sic]) designó

> como el *análisis clínico de la didáctica*, y que engloba lo que suele denominarse como *ingeniería didáctica*" (p. 213).

En Gascón (2011), el *análisis clínico* incluye tanto la observación y descripción de las organizaciones matemáticas y didácticas en una institución, como el diseño, experimentación y evaluación de otras organizaciones didácticas posibles, construidas en base al MER adoptado por el investigador, con el objetivo de estudiar los hechos didácticos que tienen lugar al introducir cambios controlados en los sistemas docentes.

Encontramos pues una segunda etapa en la metodología de investigación de la TAD, que se suele visibilizar con el diseño e implementación de tareas o de una secuencia de actividades para el aula. Sin embargo, su alcance va mucho más allá de una propuesta de "innovación didáctica". Se acerca más a la visión de la didáctica de las matemáticas como *epistemología experimental* (Brousseau, 2002), cuyo objetivo es explorar otras formas de organizar la actividad matemática y los procesos de estudio en instituciones escolares, de manera que, potencialmente, se puedan modificar los efectos manifestados en forma de fenómenos didácticos identificados por el investigador.

2.2. Diseño en la TAD: Renovación del paradigma didáctico vigente

Diversas investigaciones en el marco de la TAD han puesto en evidencia fenómenos didácticos relevantes en la enseñanza de las matemáticas en infantil, primaria, secundaria y universidad. Tratamos algunos de ellos en la sección 3 de este artículo.

Aunque algunos fenómenos fueron identificados en momentos diferentes, en el seno de investigaciones distintas, la evolución del corpus teórico de la TAD ha generado la hipótesis de que todos están vinculados con la vigencia, en las instituciones escolares actuales, de un paradigma didáctico dominante. Chevallard (2013) define paradigma didáctico como "conjunto de reglas que prescriben, aunque sea implícitamente, qué se estudia -qué pueden ser las apuestas didácticas *O*- y qué formas de estudiarlas puede haber" (p. 163). Este autor considera que el paradigma vigente en las instituciones escolares se caracteriza por la *visita* a las obras matemáticas, que se presentan "como un monumento con valor por sí mismo, que los estudiantes deben admirar y disfrutar, aunque no sepan casi nada sobre sus *razones de ser,* ni actuales ni del pasado" (p. 164).

Las obras matemáticas aparecen, ante los estudiantes, como obras humanas cristalizadas ("monumentos" en Chevallard, 2013), valiosas en sí mismas, pero desprovistas de las cuestiones que dieron lugar a su creación, o al menos de las cuestiones a las que podrían dar respuesta y que por tanto darían un sentido a su estudio:

> "[C]uando se visitan monumentos no hay que plantear preguntas como "¿Para qué?" o ¿Y qué"? (…) los estudiantes se reducen a ser meros espectadores, incluso cuando los educadores les instan con pasión a "disfrutar" del puro espectáculo de las obras matemáticas" (p. 164).

Frente a este paradigma, Chevallard (2013) propugna la necesidad de instaurar un nuevo paradigma didáctico, que en contraste con el actual aparecería como un *contraparadigma*, aunque no se opone a él sino que lo incluye y amplía. Este nuevo paradigma se caracteriza por la necesidad de dotar de sentido y de funcionalidad a las obras matemáticas que se estudian en las instituciones escolares. Habría que poner en primer lugar el estudio de las *cuestiones* a las que estas obras matemáticas podrían dar respuesta. Por ello Chevallard (2013) lo denomina *paradigma de cuestionamiento del mundo*. Desde esta perspectiva, "estudiar una obra matemática *O"* no es *visitarla*, sino que es enfrentarse a un proceso de estudio relativamente abierto, que parte de una o varias cuestiones *Q*, y cuyo estudio daría lugar muy probablemente a encontrarse con la obra *O*, o al menos con algunos elementos de ella. Así, el papel del profesor no sería "presentar" la obra *O* a los estudiantes para que estos puedan "visitarla", sino conducir un proceso de indagación guiado por cuestiones vivas y fecundas, asumiendo, tanto estudiantes como profesor la responsabilidad de buscar respuestas a dichas cuestiones, de forma análoga a cómo los científicos actúan en su campo de investigación.

En el trabajo de diseño dentro de la TAD, la apertura de los investigadores hacia la posible instauración de este nuevo paradigma supone un reto. Si el nuevo paradigma propugna que el estudio de las matemáticas se organice a través de cuestiones, dando lugar a procesos de estudio amplios y articulados, el diseño de *actividades* que puedan dar lugar a tales procesos de estudio es un reto mayor. En el siguiente apartado describimos las características de estas actividades y cómo se diseñan.

2.2. Diseño en la TAD: Principios y metodología

La actividad escolar de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas está mediada, y depende fuertemente, del tipo de actividades que se planteen, así como de la manera en la que el docente las gestione. La posible implantación de un nuevo paradigma escolar, centrado en el estudio de cuestiones más que en la visita a obras, requiere de nuevos tipos de dispositivos de estudio, construidos sobre un tipo de actividades determinado.

La noción de *recorrido de estudio e investigación* (REI) (Chevallard, 2013) ha sido elaborada en el marco de la TAD como modelo de tipo de actividad que permitiría desarrollar procesos de estudio escolares según los postulados de este nuevo paradigma. Un REI, en la línea del "inquiry-based mathematics education" (Artigue & Blomhøj, 2013), está caracterizado por un proceso de indagación colectivo en el que:

1. El punto de partida es una cuestión problemática Q_0, con poder generador del proceso de indagación. Se suele hablar de una cuestión *crucial, viva* y *auténtica*. La comunidad de estudio, formada por un conjunto de estudiantes *X* y uno o varios facilitadores (profesores) *Y* toma en serio el estudio de la cuestión, asumiendo que es valioso y no una excusa para introducir objetos matemáticos.
2. La cuestión Q_0 es una cuestión generadora de nuevas cuestiones Q_k, lo que hace que el proceso de estudio pueda tener cierto carácter abierto e indeterminado. En tal caso, se suele hablar de REI *abierto*, en contraste con los REI *finalizados*, donde Q_0 se diseña de manera que el proceso de estudio favorezca el encuentro con cuestiones y obras matemáticas elegidas de antemano (Bosch, 2018).
3. El estudio de la cuestión Q_0, y de las que se derivan de esta, da lugar a un proceso compartido y colaborativo de indagación, caracterizado por la búsqueda y estudio de posibles respuestas $R_i^{\lozenge}$ elaboradas en otras instituciones que podrían ayudar a responder a las cuestiones.
4. Se configura un *medio* didáctico *M* formado por todos los elementos disponibles para el estudio de Q_0. *El* acceso a estas respuestas y obras está determinado por los *media* accesibles a la comunidad de estudio, entendiendo por *media* cualquier "fuente de información" como un libro, un artículo, una página web, un experto, un profesor, etc. En la medida en que estas respuestas y obras pueden haber sido elaboradas en otras instituciones, incluso en otros momentos históricos o en base a otras necesidades, la adopción de estas, o de algunos elementos de las mismas, podría requerir análisis y posible "deconstrucción" por contraste con el *medio* disponible, lo que se conoce como la *dialéctica medio-media* (Chevallard, 2007).
5. El proceso de estudio culmina con el desarrollo de una posible respuesta $R^{\heartsuit}$, tentativa y provisional. Esta respuesta podrá incluir objetos matemáticos y no matemáticos, que constituyen la "respuesta oficial" dada por la clase [*X*, *Y*] en el

seno de la institución I a la que pertenezcan. $R^{\heartsuit}$ será significativa en la medida en que ofrezca una respuesta adecuada a Q_0 y a las cuestiones derivadas Q_k.

Teniendo en cuenta la notación incluida en los puntos anteriores, un REI se suele representar esquemáticamente usando el denominado *esquema herbartiano* (Figura 1).

$$[S(X;Y;Q_0) \curvearrowright M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$$
$$M = \{R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \cdots, R_{m,}^{\lozenge} O_{m+1,} \cdots, O_n \ , Q_{n+1,} \cdots, Q_p \ \}$$

Figura 1. Esquema herbartiano (Chevallard, 2008, p. 2)

El proceso de diseño de un REI en la TAD se apoya en los principios básicos de la metodología de la ingeniería didáctica (Artigue, 2014). Apoyándonos en Barquero y Bosch (2015), sintetizamos los aspectos más importantes de esta metodología:

1. El punto de partida es un contenido o tema específico a enseñar y normalmente un problema didáctico referido al mismo. La primera fase de análisis preliminar incluye el análisis epistemológico del contenido matemático, de su necesidad de ser incluido en una cierta institución escolar y de las condiciones y restricciones que podrían afectar su estudio en dicha institución. Esta fase es crucial ya que implica la construcción de un modelo epistemológico de referencia (MER) del saber en cuestión, así como la identificación de fenómenos didácticos hipotéticos.
2. La segunda fase, de diseño y análisis *a priori*, corresponde al diseño. Se distingue una dimensión de *análisis matemático*, de caracterización de los objetos matemáticos y de la actividad que se realizará en torno a ellos (praxeologías matemáticas) en estrecha relación con el MER construido. También se incluye una dimensión de *análisis didáctico*, sobre cómo hacer emerger y sostener la actividad pretendida en el aula, a través del estudio de una o varias cuestiones problemáticas y del proceso de indagación a las que estas dan lugar (praxeologías didácticas).
3. La tercera fase, de análisis *in vivo* de la experimentación en condiciones escolares, incluye la implementación en el aula del proceso de estudio diseñado, su observación y la recolección de datos. Se trata de la fase experimental de la metodología, que sirve de puente entre la fase anterior y la siguiente.
4. Una cuarta fase, de análisis *a posteriori*, basada en las evidencias empíricas recolectadas en la fase anterior, pretende contrastar, validar y desarrollar las hipótesis sobre las que se fundamentó el diseño, y en particular las hipótesis formuladas sobre posibles fenómenos didácticos. Esta fase puede conducir a la formulación de nuevos problemas, y/o de nuevos fenómenos didácticos.

La Figura 2 sintetiza los aspectos más importantes de la ingeniería didáctica como metodología de diseño en la TAD.

Figura 2. Ingeniería didáctica como metodología (adaptado de Barquero & Bosch, 2015, p. 252)

En relación con otras metodologías orientadas al diseño (Doorman, este volumen; Nishimura & Honda, este volumen) con fases de diseño, experimentación en el aula y análisis posterior, un aspecto distintivo de la ingeniería didáctica como metodología es la validación interna, fruto de la confrontación entre los análisis a priori y a posteriori. Aunque la ingeniería didáctica se originó como metodología de investigación (identificación y contraste empírico de fenómenos didácticos) más que metodología de diseño, su evolución ha dado lugar a un uso dual, como señala Perrin-Glorian (2011) cuando distingue entre *ingeniería didáctica para la investigación* e *ingeniería didáctica para el desarrollo de recursos y la formación del profesorado*. Este papel dual sigue presente en el uso que desde la TAD se viene haciendo de la metodología.

3. Diseño de recorridos de estudio en investigación: Algunos ejemplos

El objetivo de esta sección es ejemplificar el trabajo de diseño dentro de la TAD, desde una perspectiva amplia. Para ello, será necesario: 1) identificar el ámbito del conocimiento matemático objeto de estudio; 2) describir los modelos epistemológicos construidos y los fenómenos didácticos que estos permiten identificar; 3) describir el diseño de recorridos de estudio e investigación que pretenden organizar el estudio del ámbito matemático en cuestión desde el paradigma del cuestionamiento del mundo.

3.1. Proporcionalidad y relaciones funcionales en la enseñanza secundaria

En García (2005) se describe el fenómeno didáctico de la desarticulación de la matemática escolar. La tradicional organización del currículo matemático escolar en bloques de contenidos, que según la escala de niveles de codeterminación didáctica (Chevallard, 2002) designamos como *áreas, sectores* y *temas*, compartimenta el saber matemático a enseñar. Aunque el currículo indica que esta división es con fines expositivos, y que la actividad matemática escolar debería integrar y articular los contenidos ubicados en áreas y sectores, la transposición didáctica, mediada por libros de texto y por la organización de las enseñanzas a cargo del docente, tiende a perpetuar la división. Este fenómeno tiene sus raíces en el *paradigma de visita de las obras*, que tiende a atomizar el saber matemático para que sea “enseñado” (en el sentido de “mostrado”) por el profesor y “visitado” por el estudiante (Chevallard, 2013).

En García (2005) se determinó y analizó este fenómeno para el ámbito de las relaciones funcionales entre magnitudes, poniendo en evidencia que el estudio de la relación de proporcionalidad (directa e inversa) entre magnitudes en la educación secundaria vivía (y en gran medida sigue viviendo) en dos *hábitats*: uno, vinculado al *área* de la aritmética y a los problemas verbales clásicos de proporcionalidad; otro, vinculado al *área* de la funciones y al estudio de clases de funciones, sus propiedades y gráficas. En este segundo hábitat, la actividad matemática que se realiza en torno a este objeto tiene más que ver con sus propiedades como “función” (pendiente, corte con los ejes, crecimiento, etc.). El papel anecdótico de la actividad de modelización matemática en la educación secundaria incide en esta desarticulación entre ambas *áreas.*

Para profundizar en el análisis del fenómeno, se diseñó un MER que proponía integrar la proporcionalidad en el estudio de las relaciones funcionales (García, 2005, 2007), a partir del análisis de la proporcionalidad en Bosch (1995) y del papel articulador de la modelización matemática (Bosch, García, Gascón y Ruiz-Higueras, 2006). Bosch (1995) describió tres tipos de organización matemática en torno a la proporcionalidad: *modelización clásica* (razones y proporciones), *modelización ecuacional* (ecuación lineal entre cantidades del tipo $y = k \cdot x$) y *modelización funcional* (relación funcional del tipo $f(x) = k \cdot x$). Aunque la diferencia es evidente en el nivel de la *praxis* (tipo de tareas y de técnicas), es más destacable en el nivel del *logos*. Bosch (1995) señala que la primera y la segunda modelización se construyen en el área de la aritmética, donde las cantidades, conocidas o por determinar, se interpretan como valores concretos de ciertas cantidades de magnitud, estando la noción de variable ausente. Por el contrario, el logos de la tercera se ubica en el área de las relaciones funcionales, tomando sentido las nociones de *variable* y de *tipo de variación* entre magnitudes.

La idea de *tipo de variación* permitió construir un MER integrador de la proporcionalidad con el resto de relaciones funcionales, partiendo de la hipótesis de que lo que caracteriza a las funciones es el papel que juegan como *modelos de la variación* o, dicho de otro modo, pensando las funciones como *primitivas* de tipos de variación entre magnitudes. Así, la relación de proporcionalidad se presenta como una relación más, modelo de un tipo de variación que denominamos *equitativa.* El estudio de otro tipo de *condiciones* sobre la posible variación entre magnitudes (*condición de linealidad, de diferencias constantes de orden 2 o n*) daría lugar a la construcción de otros modelos (afines, cuadráticos, exponenciales, hiperbólicos), generando una actividad matemática en torno a las *funciones reales de variable real* (García, 2007).

Este MER sirve de base para el diseño de un REI centrado en la exploración de tipos de variación entre magnitudes y en la construcción de modelos. El diseño concreto, que aquí esbozamos, parte de una situación de ahorro de dinero para un viaje de fin de curso (de ahí la denominación del REI como “planes de ahorro”). Este contexto presenta la ventaja de ser relativamente familiar para los estudiantes de educación secundaria, y es suficientemente abierto para que tenga sentido formular diferentes tipos de hipótesis sobre la variación de ciertas cantidades. La cuestión generatriz Q_0 se planteó así:

> Q_0 : "*Deseamos planear con tiempo el viaje de fin de curso, para lo que tenemos que decidir un plan de ahorro que nos permita reunir una cantidad suficiente de dinero. Aunque no sabemos aún el precio exacto del viaje, podemos hacer una estimación de la cantidad de dinero que necesitamos, y comenzar a tomar decisiones sobre los diferentes plazos de entrega, las diferentes cantidades a dar en cada plazo, etc. Por supuesto, no se trata de decidir hoy cuánto dinero hay que entregar y cómo, sino de empezar a trabajar sobre ello, con la intención de anticiparnos a final de curso y a las necesidades que tendremos cuando sepamos el precio exacto del viaje.”* (García, 2005, p. 365)

El estudio de esta cuestión conduce a un proceso de modelización que comienza con una posible simplificación y estructuración de la situación y la identificación de las variables más relevantes: número de plazos, cantidad a entregar en cada plazo, existencia de cuota inicial o cuota de entrada y posible evolución de esta cantidad. La identificación de estas variables es crucial, ya que da sentido a formular diferentes tipos de variación, que conducirán a la emergencia de diferentes tipos de relaciones funcionales:

- Cuota constante C en cada plazo, con cuota inicial o no (sistema *equitativo*, que da lugar a modelos funcionales lineales y afines).
- Cuota creciente conforme los plazos avanzan, con cuota inicial o no (sistemas *acumulativos crecientes*, que pueden producir modelos funcionales cuadráticos y exponenciales).
- Cuota decreciente conforme los plazos avanzan, con cuota inicial o no (sistemas *acumulativos decrecientes*, que pueden producir modelos funcionales cuadráticos y exponenciales).

Formulada cada tipo de variación en términos de una posible hipótesis sobre el sistema de ahorro, el REI se diseñó como un conjunto articulado de tareas (Figura 3).

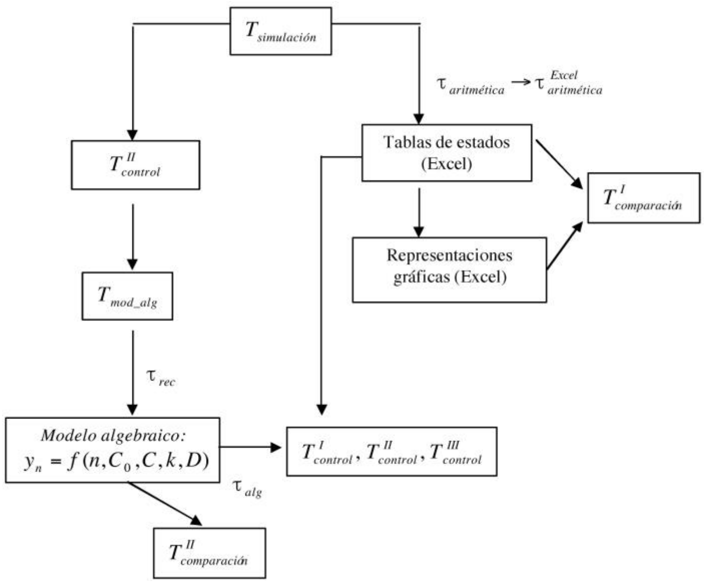

Figura 3. Esquema del REI "planes de ahorro" (García, 2005, p. 419)

La actividad matemática comienza con *tareas de simulación* de planes de ahorro: asumida una hipótesis y dados ciertos valores de los parámetros del plan de ahorro (e.g., plan *equitativo* sin cuota inicial, con cuota fija de 10€ y 15 plazos), simular cuánto dinero se acumularía según avanzan los plazos. Este primer tipo de tareas son de carácter eminentemente aritmético y de alcance limitado. Dicha limitación se hace evidente cuando se afrontan lo que denominamos *tareas de control*, inversas de las anteriores (e.g., si se desea ahorrar 500€ en 15 plazos, qué cuota hay que fijar y cómo debe evolucionar en el caso de un *plan de ahorro de cuota no fija*). Ante las limitaciones de las técnicas derivadas de las anteriores (que supondría dar valores al azar a los parámetros y simular el plan de ahorro), este tipo de problema provoca la necesidad de construir un modelo algebraico de cada tipo de plan de ahorro (Figura 4), que permita establecer relaciones entre los parámetros y las variables que definen cada plan.

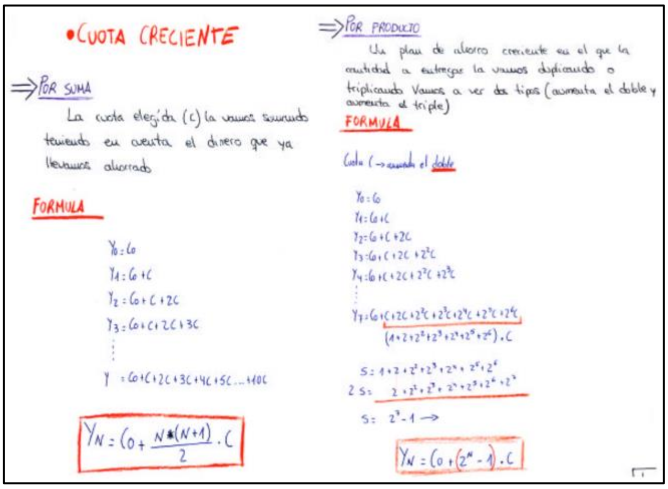

Figura 4. Modelos algebraicos producidos por una alumna de 1º de Bachillerato para dos tipos de planes de ahorro de cuota creciente (García, 2005, p. 492)

Los modelos construidos permiten *controlar* cada plan de ahorro y afrontar *tareas de comparación* entre planes de ahorro (tanto basados en la misma hipótesis como en distintas). Estas tareas dan sentido a técnicas basadas en manipulaciones algebraicas y a las que se apoyan en representaciones gráficas (Figura 5).

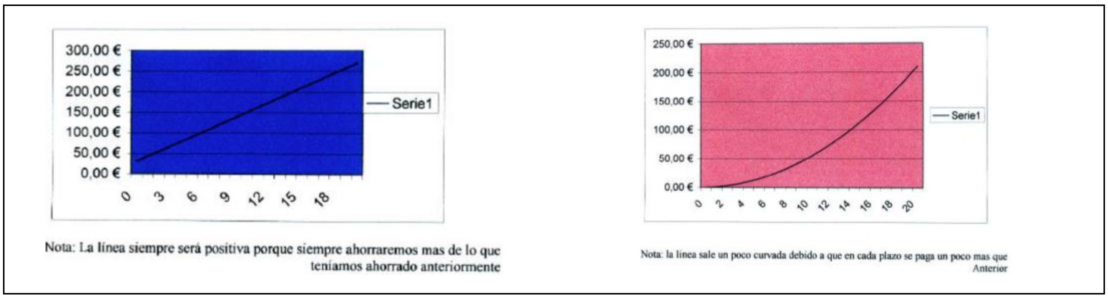

Figura 5. Modelos gráficos producidos por una alumna de 1º de Bachillerato para comparar dos tipos de planes de ahorro de cuota creciente (García, 2005, p. 494)

El REI se articula como conjunto de cuestiones derivadas de la Q_0 (¿simular/ controlar/ comparar planes de ahorro?) que dan lugar a una actividad matemática integrada en torno a tipos de variación entre magnitudes, donde la relación de proporcionalidad es una más de las posibles. Su diseño ofrece un material de aula que incide sobre el fenómeno de la desarticulación en el estudio de las relaciones funcionales en la educación secundaria, mostrando el papel de la modelización matemática.

3.2. Modelización matemática en grados de ciencias experimentales

Esbozamos una investigación cuyo punto de partida fue indagar en las posibilidades de integrar la modelización matemática en los primeros cursos universitarios de matemáticas en los grados de ciencias experimentales (CCEE). En Barquero, Bosch y Gascón (2011, 2014) se analiza qué tipo de matemáticas se enseñan en estos grados y, en contra de lo que se podría suponer acerca del papel de la modelización matemática en dichos estudios, la realidad es distinta. Muchos de estos estudios integran la enseñanza de la modelización matemática, aunque esta siempre aparece al final de los distintos sectores (álgebra lineal, cálculo en una variable y ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales), cuya delimitación y asignación de temas es bastante estándar. Estas investigaciones describen un fenómeno didáctico para la enseñanza de la modelización sobre la tendencia generalizada a aislar esta actividad y reducirla a una simple aplicación de los conocimientos matemáticos, presentados de antemano a los estudiantes, para ejemplificarlos en situaciones o contextos científicos sin que ello suponga ninguna problematización ni del sistema al que se aplica ni de la pertinencia o eficacia de estos modelos matemáticos. Dicho fenómeno es, en gran medida, consecuencia del denominado "aplicacionismo" (Barquero et al., 2014, p. 89) que aparece como modelo epistemológico imperante en las instituciones universitarias encargadas de la enseñanza de las matemáticas para las CCEE.

Para completar este análisis preliminar, se necesita construir desde la investigación un modelo epistemológico de referencia que permita definir, independientemente de los modelos dominantes en estas instituciones universitarias, qué es la modelización matemática y su relación con las matemáticas. Desde los inicios de la TAD se asume que gran parte de la actividad matemática, si no toda, puede reformularse como actividad de modelización matemática (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). En el proceso de modelización, tienen una estructura praxeológica tanto el sistema extra- como intra-matemático que se sitúe en el punto de partida y donde se planteen las cuestiones problemáticas, como el modelo que se construye para dar respuesta a estas cuestiones. Consecuentemente, la actividad de modelización matemática se interpreta como proceso de (re)construcción y articulación de praxeologías matemáticas que se amplían y completan a medida que avanza el proceso y con el objetivo de responder a la/s cuestión/es de inicio. Así, la modelización se considera no solo una posible área o tema de las matemáticas (que podría ser tratado, o no) si no que se sitúa en el corazón de la actividad matemática. Estas suposiciones epistemológicas, descritas a través del MER sobre la modelización matemática, pasan a formar parte del *problema de investigación*. En nuestro caso, se centra en indagar qué tipo de dispositivos didácticos posibilitarían una integración generalizada de la modelización matemática en los sistemas de enseñanza universitarios de las matemáticas para las CCEE y, especialmente, estudiar su *ecología*, es decir, qué condiciones se requieren y qué tipo de restricciones institucionales limitan o impiden la integración y desarrollo de la modelización.

Como posible respuesta a este problema de investigación, proponemos abordarlo a través del diseño, experimentación y análisis ecológico de los *recorridos de estudio e investigación*. Los REI son dispositivos didácticos que explicitan la modelización matemática como motor de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Para el diseño matemático y didáctico *a priori* del REI que nos ocupa, partimos de una cuestión generatriz sobre el estudio de la dinámica de poblaciones. A partir de ciertos datos sobre el tamaño de una población en distintos periodos de tiempo, nos preguntamos sobre:

> Q_0 : ¿Podemos predecir la futura evolución (a corto, medio y largo plazo) de esta población? ¿Será siempre posible? ¿Qué hipótesis sobre el entorno, la población y su crecimiento se pueden asumir? ¿Cómo podemos hacer estas previsiones y cómo validarlas?

Frente a esta cuestión generatriz, los investigadores realizaron un análisis epistemológico de las distintas cuestiones derivadas y respuestas asociadas. En términos de la modelización matemática, se analizó qué hipótesis se podían formular, qué modelos matemáticos emergían y qué conocimientos matemáticos y/o biológicos eran necesarios, qué respuestas parciales se iban obteniendo y qué nuevas cuestiones iban emergiendo en el proceso de construcción, trabajo y validación de estas respuestas (ver detalles en Barquero et al., 2011, p. 351). La Figura 6 muestra el esbozo de la estructura matemática de este REI, en la cual se muestran sus distintas ramas:

- La primera centrada en la construcción de *modelos discretos* para el estudio de poblaciones con *generaciones separadas*, donde el tamaño (x_t) de la población en tiempo *t* solo depende del tamaño de la generación anterior (x_{t-1}). Estas primeras hipótesis llevan a construir modelos basados en sucesiones recurrentes de orden 1, $x_{t+1}= f(x_t)$, del bloque de sucesiones y cálculo en una variable.

- La segunda sigue con modelos discretos y supone generaciones mezcladas (x_t depende de las *d* generaciones anteriores: $x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-d}$), llevando a considerar modelos basados en sucesiones recurrentes vectoriales (orden 2 o superior), $X_t = f(X_t)$, del bloque de álgebra lineal (vectores, matrices y su diagonalización).
- En las dos últimas, con el tiempo como magnitud continua y una estructura paralela a la desarrollada para los modelos discretos, se consideran modelos continuos basados en ecuaciones diferenciales (poblaciones independientes) o sistemas de ecuaciones diferenciales, al suponer poblaciones en competencia.

De entre las funciones de este análisis epistemológico *a priori*, destacamos diversas de sus funciones. Por un lado, sirvió para estudiar la potencialidad de la cuestión generatriz que se sitúa en el punto de partida e indagar qué "territorio" matemático podía abarcarse a través de la actividad de modelización. Esto llevó a mostrar cómo el "esqueleto matemático" de cuestiones derivadas y de respuestas generadas a partir del estudio de Q_0 permitía cubrir todo el contenido del programa de matemáticas propuesto para los estudios universitarios de CCEE. En esta ocasión, enseñando estos contenidos desde una aproximación de la enseñanza de la matemática como herramienta de modelización frente al estudio de cuestiones. Este esqueleto matemático sirvió de base para el diseño didáctico *a priori* y su posterior implementación en aulas universitarias.

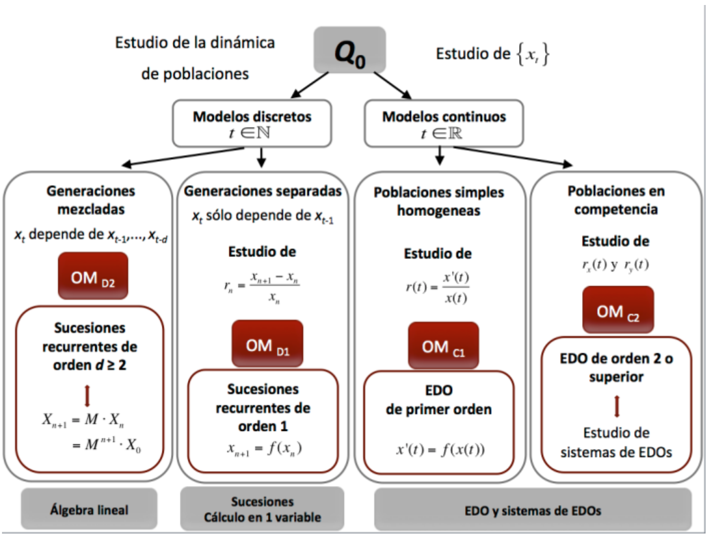

Figura 6. Estructura del REI sobre dinámica de poblaciones (Barquero y Bosch, 2015, p. 265)

Este REI se experimentó durante cinco cursos académicos con estudiantes de primero de ingeniería técnica industrial de la Escuela Técnica y Superior de Ingeniería de la Universitat Autònoma de Barcelona. Las sucesivas implementaciones del REI y su análisis *in vivo* fueron enriqueciendo los diseños matemáticos y didácticos. El esqueleto del REI se fue nutriendo de la formulación de nuevas hipótesis, cuestiones, modelos y respuestas, formando en cada iteración una herramienta más potente para el diseño del REI, su gestión en las aulas universitarias y su observación *in vivo* de los recorridos que emprendían los grupos de trabajo. Respecto al diseño didáctico, se fueron incorporando nuevos dispositivos didácticos para superar restricciones que emergían. Cada año los distintos dispositivos de clases de teoría, de problemas y el taller de modelización, donde se experimentaba el REI, estuvieron mejor coordinados en base a las cuestiones que se abrían en el taller. Por ejemplo, cuando se tuvo que introducir cómo operar con matrices o su diagonalización, o definir qué son las ecuaciones diferenciales y sus técnicas de resolución, se paraba temporalmente el taller y se programaban las sesiones teóricas y de problemas que permitirían introducir y formalizar estos conocimientos. También se observó que muchas responsabilidades que se asignaba a los estudiantes (formulación de cuestiones, búsqueda de respuestas, redacción y defensa de informes, etc.) fueron aceptadas a medida que avanzaba el curso y se integraban dispositivos, e.g., los informes semanales de avance de los grupos de trabajo, el papel de "secretario de la semana" que reportaba el trabajo de todos los grupos, etc. Esta asignatura desapareció debido a una reforma de los grados universitarios y, con ello, la continuidad de este REI. Aun así, los diseños matemáticos y didácticos desarrollados fueron adaptados a otros contextos universitarios (Barquero, Serrano y Serrano, 2013) con los que se pudo seguir avanzando en el problema de la ecología de los REI y su relatividad institucional.

3.3. La formación de ingenieros en la universidad

Tal y como se ha explicitado, la TAD estudia la difusión de conocimientos y su adquisición en la sociedad y, consecuentemente, su campo de estudio no se limita al ámbito de las matemáticas. Un ejemplo de esta expansión hacia otros dominios de la didáctica son los trabajos de Florensa, Bosch, Gascón y Winsløw (2018) y de Bartolomé, Florensa, Bosch y Gascón (2019) en la formación de ingenieros.

Florensa (2018) describe la aparición de tres fenómenos didácticos en el estudio de la elasticidad en los grados de ingeniería mecánica. La elasticidad puede entenderse como el estudio y desarrollo de modelos que permitan relacionar las cargas que recibe una pieza y las deformaciones que provoca. El caso de la elasticidad lineal es una simplificación en el que esta relación entre tensiones y deformaciones se rige por una relación lineal. Este ámbito de la ingeniería se desarrolló de forma notoria durante la segunda mitad del siglo XIX con los trabajos de Cauchy, Navier y Lamé.

Uno de los fenómenos didácticos identificados en este ámbito es la diferencia entre el tipo de tareas propuestas en la asignatura de Elasticidad y los problemas abordados con el mismo modelo en otras asignaturas (e.g., Computer Aided Engineering) o en la práctica profesional del ingeniero. Los problemas que se proponen en la institución escolar (escuela de formación de ingenieros) son casos límite, con geometrías y cargas simples, lo que los aleja de casos reales. Este fenómeno tiene su origen en que la resolución analítica del modelo (determinar los estados de tensiones y deformaciones en todos los puntos de un sólido) es factible solo cuando la geometría de la pieza de estudio, así como las cargas, son extremadamente simples. Además, se trata de un fenómeno que no es único de la institución de estudio. Este extracto del prólogo del libro *An introduction to continuum mechanics* ilustra el fenómeno (nuestra traducción):

> *"Muchos problemas de elasticidad lineal tienen que ver con geometrías complejas y no pueden obtenerse sus soluciones analíticas. En consecuencia, el objetivo del libro es familiarizar el lector con métodos de resolución aplicados en problemas simples con geometrías límite. Estos problemas límite presentados son los mismos en la mayoría de los libros de elasticidad. De hecho, los métodos presentados aquí pueden no ser útiles para resolver problemas de ingeniería prácticos pero su discusión puede generar ideas interesantes sobre la formulación y solución de los problemas límite."* (Reddy, 2013, p. 265)

La existencia de este fenómeno provoca que las tareas que pueden existir en la institución escolar se limiten a la resolución de problemas límite con lápiz y papel. Además, el objetivo principal de la asignatura es presentar el modelo constitutivo elástico lineal por su importancia intrínseca y no por la capacidad de resolver problemas en ingeniería mecánica. El análisis del fenómeno en Florensa et al. (2018) muestra que esta concepción del saber a enseñar se ha mantenido invariable el último siglo y que el desarrollo de métodos numéricos desde mediados del siglo XX que permiten resolver problemas con geometrías y cargas complejas se ha incorporado en otras asignaturas (e.g., Métodos Numéricos, *Computer Aided Engineering*).

En Florensa (2018) y en Florensa et al. (2018) se construye un MER en el que se propone cambiar la razón de ser de la asignatura de Elasticidad. La nueva razón de ser que el MER asigna al dominio es: establecer el nivel de tensiones y deformaciones unitarias en cualquier pieza y bajo cualquier carga con el fin de diseñar una pieza (seleccionar un material y una forma) para evitar falla elástica y deformaciones excesivas. Así pues, el MER tiene una praxeología principal cuyo tipo de tarea es el diseño de piezas de forma genérica bajo circunstancias diversas de carga.

Este MER se utilizó como base epistemológica para el diseño de un REI que, con modificaciones, se ha implementado desde 2015 hasta el curso 2018-2019 en la asignatura de Elasticidad de la Escola Universitaria Salesiana de Sarrià. La estructura de la asignatura se ha mantenido igual en todas las ediciones: para un semestre de 15 semanas se ha mantenido la estructura tradicional (2h teoría + 2h problemas) durante las primeras 7, y se ha implementado el REI durante las 8 semanas restantes. La cuestión generatriz del REI para la primera edición fue:

> *"Q_0: Una empresa fabricante de bicicletas nos pide diseñar una pieza de su último modelo (plato, cuadro, pedal, asiento) y para ello tenemos, en forma de probetas de laboratorio, tres materiales disponibles de propiedades mecánicas desconocidas. Escribid un informe para la empresa con la forma y las dimensiones del diseño propuesto y las propiedades mecánicas del material seleccionado. El informe debe incluir las dimensiones, los planos, las cargas consideradas para el diseño, el factor de seguridad mínimo una planificación temporal y el presupuesto del proyecto y de la fabricación."* (Florensa, 2018)

En las siguientes ediciones se modificó el tipo de pieza a diseñar. Para 2016-17 se pidió diseñar una máquina de movimiento continuo pasivo utilizado en las tareas de recuperación traumatológica. Para 2017-18 y 2018-19 el REI se ha centrado en el diseño de piezas para el coche de competición del equipo EUSSMotorsport de la escuela de ingeniería que participa en la competición de Fórmula Student. Este cambio en las dos últimas ediciones ha introducido cambios significativos: las piezas diseñadas pasan a ser montadas en un coche de competición y su validación pasa a ser un punto crítico.

El trabajo alrededor de la cuestión generatriz provocó que la comunidad de estudio se enfrentara a cuestiones previamente ausentes en la institución escolar. Apareció la necesidad de estimar unas cargas para diferentes escenarios de uso, incluir aspectos relativos a la fabricación de la pieza o cuestiones relativas a la durabilidad. También la búsqueda de normas relativas a cada sector jugó un papel importante. Además, el uso de software que permite obtener soluciones numéricamente se reveló como uno de los tipos de tarea centrales. Todas estas cuestiones básicas en la actividad profesional del ingeniero no existían en la organización anterior. El papel jugado por el modelo cambió significativamente: durante la primera parte del semestre (aun manteniendo la misma estructura que en la organización anterior) el modelo se presentaba como clave para la resolución del proyecto que se planteó durante la segunda parte de la asignatura.

Otra consecuencia observada en las implementaciones del REI es la capacidad de la nueva organización del saber a enseñar de superar la extremada compartimentación de la organización tradicional. En el REI aparecen cuestiones que tradicionalmente pertenecen a otros dominios como la durabilidad, la fabricación o su coste económico.

4. Discusión y conclusiones: Ecología y normatividad de los recorridos de estudio e investigación

En el apartado 2.1, hemos tratado de hacer explícitos los fines y objetivos del trabajo de diseño dentro de la TAD. Han aparecido dos dimensiones importantes de todo problema didáctico: la *dimensión epistemológica*, que obedece al cuestionamiento de la estructura de las praxeologías matemático-didácticas en juego en el problema abordado, y la *dimensión económico-institucional*, que obedece al cuestionamiento de cómo es la *vida* de dichas praxeologías en una cierta institución, así como de cómo podría ser. Hemos argumentado que ambas dimensiones de todo problema didáctico contribuyen a dilucidar los fines y objetivos del trabajo de diseño dentro de la TAD: la identificación de fenómenos didácticos y la exploración de nuevas formas de organizar los procesos de estudio de manera que se puedan modificar los efectos que provocan dichos fenómenos didácticos. Las investigaciones esbozadas ejemplifican algunos de estos fenómenos didácticos, además del diseño de recorridos de estudio e investigación orientados a reducir los efectos asociados a dichos fenómenos.

Gascón (2011) pone de relieve la *dimensión ecológica* de un problema didáctico, acerca de las *condiciones de vida* de las praxeologías en una institución. Esta dimensión aborda cuestiones sobre las condiciones y restricciones que afectan a la vida de las praxeologías en las instituciones y que ofrecen explicaciones sobre por qué la actividad matemática respecto a un dominio es como es, pero también por qué no podría ser de otra forma o qué debería modificarse para que fuese de otra forma.

Frecuentemente, el trabajo de diseño en educación se asocia con una decidida pretensión de que el material diseñado sea incorporado y usado en las prácticas habituales de aula, borrando la distancia existente entre investigación e innovación educativa. Desde la innovación, se tiende a no cuestionar las condiciones que una institución impone sobre las matemáticas y su estudio, aceptando que el trabajo de diseño debe asumirlas y tenerlas en cuenta a la hora de elaborar el producto. Sin embargo, desde la investigación, se asume el cuestionamiento de dichas condiciones, liberando al diseñador de las limitaciones que estas imponen, y abriéndose a explorar otras formas de interpretar la actividad matemática y su estudio.

Las experimentaciones de REI a cargo de investigadores de la TAD en diversas instituciones docentes han señalado un complejo universo de condiciones y restricciones que afectan al tipo de actividad matemática y de procesos de estudio que es posible realizar, y en particular al tipo de actividad matemática y de proceso de estudio que implica la realización de un REI (para restricciones y condiciones específicas de los REI propuestos en este artículo, ver García, 2005; Barquero, 2009; Florensa, 2018). En conjunto, la implantación de REI en las instituciones escolares choca con restricciones como la necesidad de instaurar procesos de estudio extendidos en el tiempo, orientados a la indagación, en los que los estudiantes asuman una mayor responsabilidad, el profesorado deje de ser la única e incuestionable fuente de información, las respuestas sean aceptadas como provisionales, y por tanto sujetas a verificación y modificación. También otras, como la concepción rígida y lineal de currículos y planes de estudio, el aislamiento disciplinar de las matemáticas, o ligadas a la evaluación de saberes.

Finalmente, una última dimensión que no queremos dejar de mencionar tiene que ver con el debate sobre la *dimensión normativa* de la didáctica como ciencia. Aunque se trata de un tema complejo que va más allá del diseño de tareas, toca a esta actividad de lleno. Gascón y Nicolás (en prensa) analizan el carácter normativo o prescriptivo de la didáctica desde la perspectiva de la TAD, señalando que:

> Si una comunidad de estudio (…) vive un recorrido de estudio e investigación (REI) sustentado en un MER de cierto dominio, esto es, un REI que se inicie con los tipos de tareas de la praxeología raíz del MER y que responda a las cuestiones derivadas de la cuestión generatriz, entonces el REI cubrirá un sub-árbol del árbol correspondiente al MER y, como consecuencia, la comunidad de estudio llevará a cabo una actividad matemática que no sufrirá las «limitaciones» que presentan los procesos de estudio escolares de dicho dominio que están sustentados en el modelo epistemológico dominante en la institución. (Gascón y Nicolás, en prensa)

Los REI ejemplificados en los apartados precedentes y otros diseñados en el marco de la TAD no tienen como objetivo principal ser "norma" (sobre cómo enseñar la proporcionalidad y las relaciones funcionales en secundaria, o la modelización en grados de ciencias experimentales, o la elasticidad en grados de ingeniería), sino una posible respuesta científica a fenómenos didácticos identificados en las instituciones.

Con ello no tratamos de renunciar a la ambición de la didáctica de las matemáticas, como dominio científico, de jugar un papel importante en la toma decisiones sobre *acciones didácticas* concretas a realizar en el sistema de enseñanza de las matemáticas, ni de poner en cuestionamiento su legitimidad, sino de entender que estas decisiones no son, en sentido estricto, resultados científicos, sino fruto de otro tipo de mecanismos.

Referencias

Artigue, M. (2014). Didactic Engineering in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 159-162). Cham, Suiza: Springer.

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM - Mathematics Education, 45*(6), 797-810.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas.* Manuscrito de Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Barquero, B., & Bosch, M. (2015). Didactic Engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task design in Mathematics Education* (pp. 249-272). Cham, Suiza: Springer.

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(3), 339-352.

Barquero, B., Serrano, L., & Serrano, V. (2013). Creating the necessary conditions for mathematical modelling at university level. En B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME8* (pp. 950-959). Ankara, Turquía: Middle East TU.

Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2014). Incidencia del «aplicacionismo» en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 83-100.

Bartolomé, E., Florensa, I., Bosch, M., & Gascón, J. (2019). A 'study and research path' enriching the learning of mechanical engineering. *European Journal of Engineering Education, 44*(3), 330-346.

Bolea, M. P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares* Manuscrito de Tesis Doctoral. Universidad de Zaragoza.

Bosch, M. (1995). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Manuscrito de Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Bosch, M. (2018). Study and Research Paths: a model for inquiry. En B. Sirakov, P. N. De Souza & M. Viana (Eds.), *International Congress of Mathematicians* (Vol. 3, pp. 4001-4022). Rio de Janeiro: World Scientific Publishing Co.

Bosch, M., García, F. J., Gascón, J., & Ruiz-Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. *Educación Matemática*, *18*(2), 37-74.

Brousseau, G. (2002). *Theory of Didactical Situations in mathematics*. Dordrecht, Holanda: Springer.

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie y regulation. En J.-L. Dorier (Ed.), *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas: Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 705-746). Jaén: Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. (2008). Afterthoughts on a seeming didactic paradox. En J. Lederman, N. N. Lederman & P. Wickman (Eds.), *Cadre du Colloque International 'Efficacité y équité en éducation'* (pp. 1-6). Rennes, Francia: Université de Rennes.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: Alegato a favor de un contraparadigma emergente. *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 161-182.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE Universitat de Barcelona.

Chevallard, Y., & Sensevy, G. (2014). Anthropological approaches in mathematics education, French perspectives. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 38-43). Dordrecht, Holanda: Springer

Florensa, I. (2018). *Contributions of the epistemological and didactic analysis: Question-answer maps in engineering and in teacher education*. Manuscrito de Tesis Doctoral. Universitat Ramon Llull.

Florensa, I., Bosch, M., Gascón, J., & Winsløw, C. (2018). Study and research paths: A new tool for design and management of project based learning in Engineering. *International Journal of Engineering Education*, *34*(6), 1848-1862.

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articuación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Manuscrito de Tesis Doctoral. Universidad de Jaén.

García, F. J. (2007). El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio de las relaciones funcionales en la Educación Secundaria. En P. Flores y otros (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 71-90). La Laguna: SEIEM.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(2), 203-231.

Gascón, J. (2013). La revolución brousseauniana como razón de ser del grupo Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *3*(1), 69-87.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, n. *25 años*, 99-123.

Gascón, J., & Nicolás, P. (en prensa). Economía, ecología y normatividad en la teoría antropológica de lo didáctico. *Educaçao Matemática e Pesquisa* (número especial).

Perrin-Glorian, M. J. (2011). L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. En C. Margolinas y otros (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 57-78). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Reddy, J. N. (2013). *An introduction to continuum mechanics*. Cambridge, MA: CUP.

Rodríguez, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de matemáticas: Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico.* Manuscrito de Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Manuscrito de Tesis Doctoral. Universitat Autónoma de Barcelona.

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica.* Manuscrito de Tesis Doctoral. Universitat Ramon Llull.

Sierra, T.A. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Manuscrito de Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Torretti, R. (2012). Fenomenotecnia y conceptualización en la epistemología de Gaston Bachelard. *THEORIA. An International Journal for Theory, History and Foundations of Science*, *27*(1), 97-114.

Referencias de los autores

Francisco Javier García[1], Universidad de Jaén (España). fjgarcia@ujaen.es

Berta Barquero[2], Universitat de Barcelona (España). bbarquero@ub.edu

Ignasi Florensa[3], Universitat Autònoma de Barcelona (España). iflorensa@euss.es

Marianna Bosch[4], Universitat Ramon Llull (España). marianna.bosch@iqs.edu

Task design in the framework of the Anthropological Theory of the Didactic

Francisco Javier García, Universidad de Jaén

Berta Barquero, Universitat de Barcelona

Ignasi Florensa, Universitat Autònoma de Barcelona

Marianna Bosch, Universitat Ramon Llull

Extended abstract

In the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), task design is integrated into its experimental methodology in terms of didactic engineering. The implementation of new teaching and learning organizations, based on new ways of conceiving school mathematical activities, is an integral component of the ATD epistemological and institutional analyses. In this article, we present a reflection on the objectives, principles, methodology and scope that we attribute to this experimental work.

In this paper we introduce some theoretical constructs needed to understand the role that the design of activities plays within the ATD. Design work under the ATD needs to be considered under a conception of didactics of mathematics as a science that builds, describes, and explains didactic phenomena, like other social sciences do. This *phenomenotechnical* character of research under the ATD is crucial to understand the why and the how of our work as designers. Thus, any design within the ATD starts with the construction of an *epistemological model of reference* of the mathematical knowledge at stake. Researchers need these models in order to break the *illusion of transparency* of the mathematical knowledge at stake or, in other words, to avoid taking for granted the way it is interpreted within a given institution. These models have proven to be important tools for the identification of didactic phenomena. Once these phenomena are identified, design work within the ATD should be considered as a part of an experimental work, aiming at creating and testing alternative ways to organise the teaching and learning of some mathematical knowledge, in order to reduce the negative effects associated to the didactic phenomena already identify.

We argue that most of the didactic phenomena researchers within the ATD have identified could be connected with the *paradigm of visiting works.* Alternatively, our research has focused on designing and testing new ways of structuring the study of mathematics under the *paradigm of questioning the world*. The notion of *study and research paths* has been developed in order to propose a different kind of activities, which could bring this paradigm into live. What are *study and research paths,* and the methodology researchers use to design them, is also explained in the theoretical part of the paper. Here, we exemplify our work as designers. We present three cases, in which *epistemological models of reference* have been constructed in order to identify some didactic phenomena, which led to the design and implementation of specific *study and research paths*. We conclude with a reflection about the necessary dialectic between research, design and teaching practices, with the aim of deepening in the analysis of the ecology of our proposals, that is, the conditions that enable certain activities to exist in school institutions, as well as the constraints that hinder their development as normalised classroom activities, from a non-normative perspective of didactic research.