

Perfiles del profesorado sobre la enseñanza y uso de la demostración

Caçilda dos Santos, Agrupamento de Escolas Fernão de Magalhães Chaves (Portugal)

Tomás Ortega, Didáctica de la Matemática. Universidad de Valladolid (España)

Recibido el 25 de Febrero de 2013; aceptado el 30 de julio de 2013

Perfiles del Profesorado sobre la Enseñanza y Uso de la Demostración

Resumen

En este artículo se describen problemas y sentimientos (afectividades), creencias, afinidades y actitudes del profesorado sobre la demostración. Todo ello nos permite detectar la existencia de diferentes categorías (perfiles) de profesores según sus actitudes implícitas en su docencia respecto de la demostración matemática. Esta categorización ha surgido del análisis de las respuestas a dos cuestionarios y de entrevistas a compañeros de trabajo. Los ítems utilizados, entre otros aspectos, valoran la forma de presentar las matemáticas, la forma de demostrar, la frecuencia, los gustos (aficiones) y actitudes que tienen con las demostraciones. Concluimos que los diferentes perfiles dibujan diferentes formas de ejercer la enseñanza y uso de la demostración.

Palabras clave: perfil, profesorado, demostración, categorías, creencias, actitudes.

Perfis dos Professores relativamente ao Ensino e Uso da Demonstração

Resumo

Nele presente artigo descrevem-se problemas e sentimentos, crenças, afinidades e atitudes dos professores sobre a demonstração. Todo ele nos permite detetar a existência de diferentes categorias (perfiles) de professores segundo suas atitudes implícitas na sua docência relativamente à demonstração matemática. Esta categorização surgiu da análise das respostas a dois questionários e de entrevistas a companheiros de trabalho, tendo em conta diferentes itens, como a forma de apresentar as matemáticas, a maneira de demonstrar, a frequência, os gostos e atitudes que se têm com as demonstrações, entre outros, concluindo-se que os diferentes perfis desenham diferentes desempenhos de ensino e uso da demonstração.

Palavras chave: perfil, professores, demonstração, categorias, crenças, atitudes.

Teachers' Profiles on Teaching and Uses of Proofs

Abstract

In this article we describe problems and feelings, affinities, beliefs and attitudes of teachers regarding proof. This allows us to detect the existence of different categories of teachers according to their underlying attitudes in their teaching on mathematical proof. This categorization has emerged from the analysis of the responses to two questionnaires and from interviews with colleagues, attending to different items, such as how to present mathematics, their way of dealing with proof, the frequency,

Para citar: Dos Santos, C., & Ortega, T. (2013). Perfiles del Profesorado sobre la Enseñanza y Uso de la Demostración. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 4, 27-45.

tastes and attitudes they have towards proof, among others, concluding that different profiles draw different performances of teaching and use of proof.

Keywords: profile, teachers, proof, categories, beliefs, attitudes.

Profils des Professeurs à propos de l'Enseignement et l'Usage de la Démonstration

Résumé

Dans cet article nous décrivons les problèmes et les sentiments affectifs, les croyances, les affinités et les attitudes des enseignants face à la démonstration. Tout cela nous permet de repérer l'existence de différentes catégories (profils) d'enseignants en fonction des attitudes sous-jacentes à leur pédagogie en ce qui concerne la démonstration mathématique. Cette catégorisation a émergé de l'analyse des réponses données à deux questionnaires et des entrevues avec des collègues. Les items utilisés mesurent, entre autres, la façon de présenter les mathématiques et de démontrer, ainsi que la fréquence, les goûts et les attitudes qu'ils ont par rapport aux démonstrations. Nous arrivons à la conclusion que les différents profils représentent différentes façons d'aborder l'enseignement et l'utilisation de la démonstration.

Paroles clés: profil, professeurs, démonstration, catégories, croyances, attitudes.

1. Introducción

Nuestro punto de partida es la resignificación de la demostración matemática (DM) y, con ello, de las Matemáticas. Consideramos que ciertas dificultades de los alumnos de Educación Secundaria en el aprendizaje de las matemáticas se deben a rupturas en el pensamiento lógico-matemático. Estas rupturas están provocadas por la falta de desempeño mental provocado en parte por el abandono de las metodologías demostrativas y del rigor matemático. Es necesario repensar los papeles, las funciones y ventajas de la DM, y los esquemas de razonamiento de cada uno, pero en este planteamiento es crucial determinar las creencias, afectividades, afinidades y actitudes del profesorado al respecto. Con este fin tratamos de averiguar: la influencia de los currículos en el tratamiento de la DM; el gusto (afición), el posicionamiento sobre su docencia y los recursos alternativos (sustitutivos) del profesorado; el número de las DM que se hacen en el aula; la evolución de la DM en la práctica educativa y en los libros de matemáticas, etc.

El objetivo de la investigación aquí presentada consiste en determinar el posicionamiento del profesorado de bachillerato frente a la DM y establecer una clasificación de estos profesores según sus actitudes ante las pruebas matemáticas. Esta clasificación codifica diferentes tendencias pedagógicas respecto a las demostraciones que, sin duda, están influenciadas por las programaciones y por los exámenes, como las pruebas de acceso a la universidad, que descartan el uso de DM. Por otra parte, como veremos, los alumnos no se interesan por ellas, no valoran su importancia, y esa indiferencia o posicionamiento en contra predispone a muchos profesores para no hacer demostraciones (Van Asch, 1993). Finalmente, aunque no es el objetivo de esta investigación, creemos que las DM son claves en el desarrollo cognitivo de los alumnos y en el aprendizaje de la sintaxis matemática, cuyo desconocimiento provoca innumerables errores, que, entre otros, ya fueron detectados por Radatz (1979) y por Movshovit-Hadar, Zaslavksi e Inbar (1987). Asimismo, creemos que es necesario establecer un equilibrio entre DM y justificaciones de otra índole que permitan la construcción matemática.

Por eso, muy lejos de generalizaciones o de soluciones universales e intemporales, queremos clarificar la situación actual con el fin de que este diagnóstico ayude a poner remedio a la devaluación del razonamiento demostrativo (generalmente deductivo), movilizar a profesores y a investigadores, pero, sobre todo, a los diseñadores curriculares y a los editores de textos de matemáticas y, con eso, esbozar algún diseño que consiga (re)colocar a la DM en los primeros aprendizajes

A continuación se describen los antecedentes de la investigación y el marco teórico, le sigue la metodología que se ha utilizado, el desarrollo de la propia investigación y las conclusiones.

2. Antecedentes y marco teórico

Las investigaciones educativas en el campo de la DM se vienen prodigando desde el tercer cuarto del siglo pasado. Aquí, se presenta una síntesis de la revisión de esos trabajos que nos permite encuadrar nuestra investigación a la vez que nos aporta un marco teórico para nuestro análisis. Los trabajos que más directamente han influido en esta investigación han sido Ibañes y Ortega (2001 y 2002), que pueden guiar al profesorado en cómo hacer demostraciones y qué entienden los alumnos, pero hay muchos otros que merecen ser destacados y que versan sobre el aprendizaje, las funciones, los niveles y la docencia de las DM.

Entre otras investigaciones, son interesantes las que tratan la comprensión y aspectos propios de las demostraciones relacionadas con su enseñanza, su estructura y su rigor (Bell, 1976; Galbraith, 1981; Fischbein, 1982; Martin & Harel, 1989; Hanna, 1983). Particularmente, Leron (1983) propone para las clases, aquello que él llama *método estructural*, que consiste en presentar pruebas como alternativa al método tradicional, aconsejando que cualquier demostración debe estar bien preparada y precedida de un esclarecimiento general; Harel y Sowder (1998) e Ibañes y Ortega (2001) utilizan el concepto de esquema de prueba (EP) y establecen sendas clasificaciones, por niveles, desde la perspectiva de los alumnos; Lakatos (1976) estudia el formalismo matemático y las actitudes de los alumnos ante las pruebas rigurosas, y analiza las transformaciones que sufren estas pruebas hasta su aceptación generalizada; Hersh (1993) y Davis (1993) estudian las pruebas visuales y las hechas por ordenador; Van Dormolen (1977) reconoce tres niveles de DM que se corresponden la abstracción de los alumnos; Semadeni (1984) propone una etapa intermedia entre la explicación intuitiva y la demostración que la llama *demostración-acción*; Balacheff (1988) distingue entre *pruebas pragmáticas*, *pruebas intelectuales* y *demostración* propiamente dicha, señalando que el tipo de prueba es determinado por el contrato didáctico; Van Asch (1993) da especial relevancia a las *pruebas preformales*, que las concibe como unas pruebas que contienen la idea esencial de la DM y pueden transformarse fácilmente en ellas; Martin y Harel (1989) alertan que ciertos estudiantes, ante *justificaciones falsas* presentadas a propósito, las confunden y las identifican con DM, incluso después de haber visto la versión “verdadera”, para ellos el problema reside en la prioridad docente de la repetición y memorización de demostraciones en detrimento de su comprensión, y valoración. Hanna (1989) distingue entre las DM que simplemente prueban y las que además explican, y recomienda el uso de estas últimas. Chazan (1993) indica que los alumnos prefieren argumentos empíricos e informales (ejemplos) en lugar de los deductivos y Balacheff (1988) afirma que los profesores no hacen demostraciones por esta razón. Tanto Chazan como Ibañes y Ortega (2002) señalan que los alumnos confunden las DM con

los EP inductivos de uno o de varios casos (que son ejemplos) y, por tanto, su veracidad está limitada. Movshovitz-Hadar (1988) sugieren tres etapas para la elaboración de pruebas, para la resolución de ejercicios o para la exposición de ejemplos: la presentación *verbal simbólica*, en donde además de lo que escribe, también se debe valorar lo que el profesor habla, la presentación *vía encuesta inductiva*, en donde una DM se divide en sub-demostraciones que faciliten su comprensión y, finalmente, la presentación *global*, que debe de ser semi-formalizada antes de su aspecto final; Radford (1994) acredita que la DM esté directamente ligada a la concepción que se tiene de los objetos matemáticos, prevé la necesidad de un cambio conceptual que debe ser acompañado de una transformación en las representaciones, y sugiere cambios de organización e información. De Villiers (1990) estudia las funciones de las demostraciones y critica fuertemente el uso exclusivo de la función exclusiva de “demostrar”, proponiendo *cinco funciones* para la DM: *verificación, explicación, sistematización, descubrimiento y comunicación*; de estas funciones, según Ibañes y Ortega (2002), los alumnos confieren una gran importancia a la función de explicación y la utilizan como herramienta en la distinción de procesos matemáticos. La clasificación de las demostraciones realizada por Ibañes y Ortega (1998) abunda en la comprensión de cómo demostrar y, en cierto modo, se complementa con el trabajo posterior Ibañes y Ortega (2001) donde se describe una investigación sobre los EP de los alumnos de bachillerato (17 años), y descubren que éstos están en un estado de transición entre los EP inductivos de un caso y los intuitivo-axiomáticos, y recomiendan una docencia específica para que los alumnos distingan a las demostraciones de otros procesos matemáticos y sus EP evolucionen gradualmente hacia los axiomáticos.

La mayoría de los autores referidos tratan problemas de comprensión de las demostraciones por parte de los alumnos, pero no es obvio que los profesores de Educación Secundaria los conozcan. Nosotros, en cierto modo, también lo hacemos, ya que centramos nuestro enfoque en los profesores y los alumnos constituyen el foco de su actividad docente. Por esta razón, para nosotros es muy importante conocer la perspectiva del profesor sobre la demostración y su uso. En concreto, nuestra investigación se ha centrado más en sus experiencias, actividades y expectativas en relación con la DM y nuestro objetivo de investigación consiste en investigar el posicionamiento del profesorado respecto de la DM y su actitud como docente frente al uso de la misma.

Por otra parte, los aspectos de la demostración tratados en las investigaciones precedentes nos han proporcionado un marco teórico para analizar las respuestas de los profesores y, como ha sucedido, determinar los posicionamientos y actitudes tan diferentes y, por tanto, ello nos ha permitido detectar diferentes perfiles del profesorado respecto de la demostración y su uso, y proponer una clasificación de los docentes en función de esos perfiles. Esta propuesta, sin duda, hará reflexionar a más de un profesor sobre su actitud frente a la DM.

3. Metodología y desarrollo de la investigación

La dinámica de todo el trabajo está motivada por la voluntad de mejorar la enseñanza de la demostración en bachillerato, participando activamente investigadores e investigados, y siempre orientados por las conjeturas de la investigación, que se fundamenta en los antecedentes y en problemas actuales de la enseñanza de la DM.

Se sigue una metodología de diseño, en este caso dirigida por los antecedentes, las experiencias y las hipótesis de la investigación en la que las triangulaciones y refinamiento de las encuestas es una constante de la investigación. Esta metodología ha sido descrita por varios autores (Brown & Dowling, 1998; Cobb, Confrey, diSessa, Leherer, & Schauble, 2003; Collins, Joseph, Bielaczyc, 2004; Confrey, 2006), ampliamente estudiada por Molina (2006) y, además de esta autora, en España también la han aplicado, entre otros, Pecharromán y Ortega (2009) y González (2012). Esta metodología es progresiva y se va adaptando conforme va progresando la investigación, los datos que van emergiendo en la misma gobiernan un refinamiento continuo desde la propia introducción, y las contribuciones del profesorado que ha colaborado en la investigación tienen una importancia relevante, ya que sus declaraciones surgen de sus propias actividades como docentes de matemáticas.

Para preparar los dos cuestionarios que se van a pasar, se parte de algunas opiniones personales basadas en nuestra experiencia sobre la DM y una primera exploración directa de la profesora investigadora con bastantes profesores de bachillerato de su región. A esta exploración le sigue un cuestionario sobre la DM y el profesorado, éste es refinado por un segundo, más amplio, que fue cumplimentado por una muestra más numerosa de profesores en activo. Con el fin de esclarecer aún más el posicionamiento del profesorado se realizó una entrevista semiestructurada a dos profesores, uno portugués que cumplimentó los dos y otro español que cumplimentó el segundo. El primer cuestionario fue respondido por 20 docentes de Matemáticas, todos portugueses, y el segundo por 51 (31 portugueses y 20 españoles), todos ellos de bachillerato. En ambos casos se trata de muestras a disposición y, a pesar de no ser numerosas en términos de generalizaciones, permitieron consolidar algunas de nuestras suposiciones y realizar un estudio comparativo de la situación entre Portugal y España acerca de la demostración, cuestión que aquí no se aborda, pero que creemos es de interés.

A propósito de la muestra, algunos profesores encuestados, tanto españoles como portugueses, no son estables y han sido desplazados varias veces en los concursos de traslados por profesores funcionarios, y han recorrido varios centros, incluso varias provincias. También tienen notables diferencias de edad y de formación (diferentes licenciaturas). Así, refiriéndonos al segundo cuestionario, las numerosas diferencias de los 51 profesores conforman una muestra muy heterogénea y, por tanto, las respuestas son más ricas en diversidad. En concreto, aparte de las preguntas sobre su situación profesional, los cuestionarios tenían varios ítems para recabar datos sobre los siguientes aspectos: la forma de persuadir y convencer; las competencias del profesor de matemáticas; los destinatarios de las DM; la posible desaparición gradual de la DM; la posible indiferencia de los alumnos; la diferencia entre esquemas, métodos y tipos de prueba; la conexión de las DM con los tipos de inteligencia; la forma de demostrar; posición sobre los EP de los propios alumnos; la disposición a demostrar; el afecto/gusto por las DM; la enseñanza de las DM; uso y acreditación de las pruebas informáticas; otros recursos de enseñanza de la DM; y tipos de pruebas que utilizan.

El primer cuestionario constaba de 30 ítems de respuesta SÍ-NO, 17 ítems puntuables con una escala Liker, 14 que requerían una respuesta explicativa y 4 con posibilidad de elección de varias respuestas (14, 5, 6 y 9) no excluyentes. El análisis de este cuestionario nos permitió construir el segundo que es más amplio y mejora (refina) al anterior. Éste consta de 204 ítems tipo Liker, 13 con respuestas cerradas (SÍ, NO, NO SÉ, A VECES), 7 invitaciones a que los encuestados pudieran escribir

otras categorías tipo Liker, 3 de respuestas explicativas y otras 3 con la posibilidad de elegir varias respuestas (6, 4, 4).

El guión de la entrevista constaba de 41 preguntas y todas versaron sobre aspectos tratados en el segundo cuestionario. La entrevistadora fue la profesora investigadora y su papel se redujo al de moderadora, tratando de que el diálogo fluyera entre ambos profesores sin que ella tuviera que intervenir.

4. Análisis de datos

El análisis de la infinidad de datos aportados nos ha permitido establecer categorías de profesores en función de su posicionamiento respecto a la demostración, que son reflejos de sus convicciones al respecto, responden a diferentes perfiles del profesorado y proyectan distintas pedagogías sobre la demostración. La clasificación que se presenta surge de manera natural de las evidencias que se han detectado en los datos procedentes de las encuestas y de la entrevista realizada. Se reproducen algunas declaraciones de los profesores entrevistados: “*Port.*” Identifica al profesor portugués y “*Esp.*” a la profesora española.

4.1 Según la forma de convencer y persuadir

Los profesores parecen repartirse entre aquellos que ven la demostración como único y mejor camino para convencer y persuadir, y los que opinan todo lo contrario, pero también hay algunos docentes que creen que la forma de proporcionar certezas depende de los asuntos y de los contextos. Efectivamente, las respuestas a algunas cuestiones planteadas en las encuestas aplicadas sugieren esa clasificación y la Tabla 1 muestra las emitidas en el segundo cuestionario de nuestra investigación.

Tabla 1. ¿Será la demostración el único y mejor camino para convencer y persuadir?

Respuestas	Total	Porcentaje	Moda
Sí	10	19,61	
No	10	19,61	
A veces	27	52,94	A veces
No lo sé	4	7,84	

La opción más acatada es la intermedia. Son pocos los profesores que no tienen criterio, pero entre las 27 respuestas “A veces” hay algunas correctas, pero hay otras que no lo son tanto, ya que interpretan que unas veces es conveniente hacerlo por su importancia y, otras, sin criterio alguno. Sea como fuere, estas respuestas sugieren que la forma de persuadir es circunstancial. Las respuestas a ésta y a otras cuestiones perfilan tres tipos de profesores respecto a la forma de convencer:

- **Exacto.** Acredita que la certeza total sólo existe en la demostración rigurosa.
- **Intuitivo.** Prefiere las argumentaciones intuitivas y evidentes más que las demostraciones.
- **Maleable.** Defiende que la forma de convencer y persuadir depende de las situaciones.

La profesora española responde de manera afirmativa y le asocia los valores de motivación y rigor, pero desconocen el significado de EP.

Esp. Sí, yo estoy de acuerdo. Además, creo que influye mucho en la motivación que se puede conseguir en los alumnos a través de diferentes metodologías y de incluir ese rigor; sería también una forma de que ellos vieran... a veces el resultado un poco más complicado... pero sí que, ese conocimiento, y que pueden ver que las matemáticas son eso... Yo creo que sí.

4.2 Según las competencias del profesor de matemáticas

Nuestro estudio registra profesores que asumen la demostración como una competencia esencial para enseñar y saber matemáticas, hay otros que opinan de manera contraria y algunos que no saben qué decir sobre eso. Las respuestas de los profesores se registran en la Tabla 2.

Tabla 2. *¿Será la demostración una competencia esencial del profesor de Matemáticas?*

Respuestas	Total	Porcentaje	Moda
Sí	33	64,71	
No	13	25,49	
No lo sé	5	9,80	Sí

En suma, la mayoría acredita que la demostración es fundamental para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por eso creen que deben instruirse en formación continua, privilegiando tanto los aspectos didácticos como los científicos de la docencia. En cierto modo, es una paradoja sobre las funciones atribuidas a la demostración ya que muchas actuaciones docentes dependen de la voluntad del profesorado. Estas apreciaciones permiten distinguir tres clases de profesores respecto a sus competencias demostrativas:

- **Pro-demostrativo.** Asume la demostración como una competencia esencial del profesor
- **Anti-demostrativo.** No incluye la demostración en las competencias fundamentales del profesor.
- **Neutro.** Deja que los programas se encarguen de las competencias del profesor.

Ambos profesores entrevistados diferencian entre la formación recibida en la universidad y la actividad como profesores:

Esp. Yo también pienso que, en la formación universitaria, lo que hacemos es aprender a demostrar; pero, luego, para aprender a enseñar demostraciones en Secundaria...

4.3 Sobre para quién deben de ser las demostraciones

Las respuestas a algunos ítems de nuestros cuestionarios dibujan dos categorías docentes: la que considera que la DM sólo debe ser para algunos y la que, aunque matizan de diferentes maneras, grados o estadios de maduración, considera que su instrucción debe ser para todos los alumnos, como la mayor forma de obtener certeza,

de memorizar algoritmos o metodologías, de estimular el juicio crítico y de ejercitar el razonamiento. Así pues, surgen estas dos nuevas categorías:

- **Abierto/Extensivo.** Acredita que las demostraciones son esenciales para todos los alumnos.
- **Cerrado/Restringido.** Piensa que las demostraciones sólo son para algunos.

Los profesores entrevistados creen que las DM deben ser para todos los alumnos desde los primeros niveles:

Port. As demonstrações devem ser, essencialmente, pensadas e dirigidas para os alunos. Para todos. Para o próprio ensino.

Esp. Sí. Para todos, desde el principio; desde los niveles básicos.

4.4 En cuanto a la desaparición gradual de la DM

Nuestra investigación testifica una gradual desaparición del rigor, de las metodologías y de las demostraciones. La Tabla 3 resume las respuestas a un banco de cuestiones sobre posibles causas de muchos desarreglos matemáticos; se culpa a la incomunicación entre el Sistema Educativo y los profesores, pero también señalan otros factores (pérdida de rigor, reducida carga horaria, escaso nivel de exigencia, extensión de los programas) que, de una u otra forma, inciden en el tratamiento curricular de la DM en el proceso educativo que se pone en práctica.

Tabla 3. *Está siendo maltratada la demostración y la falta rigor matemático.*

Ítems de posicionamiento	Número de respuestas positivas en 51 profesores	Porcentaje
Los programas son muy ligeros y poco secuenciales	18	35,29
El número de demostraciones está disminuyendo	31	60,78
La carga horaria de las Matemáticas es muy reducida	35	68,63
El nivel de exigencia es muy bajo	35	68,63
Se está perdiendo el rigor y el sentido matemático	35	68,63
Los programas son muy extensos	37	72,55
Falta de comunicación entre los que hacen y los que enseñan los programas de matemáticas	40	78,43

En la Tabla 4 se presentan las respuestas de los profesores sobre la depreciación de la demostración en el currículo. Así hay bastantes profesores que se muestran preocupados, pero también hay otros, quizá poco críticos, que no.

Las declaraciones de los entrevistados son claras y ambos afirman que van desapareciendo de los currículos, de los manuales escolares y de los exámenes

Port. Nos programas tem vindo a diminuir; consequentemente, nos manuais também e nos exames também porque a avaliação é sempre consequência dessas duas actividades anteriores... Ham... A forma da demonstração também tem vindo a diminuir... o... o método de demonstrar também variado muito, tem sido mais leviano...

Esp. No puedes preguntar... entonces las demostraciones que se han indo perdiendo, se pierden también, de cara a los exámenes. Eso influye, negativamente, desde el punto de vista del aprendizaje y hace que el desarrollo de la razón sea muy limitado.

Tabla 4. ¿Está preocupado/a con la actual problemática de la demostración y del rigor matemático?

Escala	Total	Porcentaje	Moda
Sí	35	68,63	Sí
No	16	31,37	

Estos y otros datos de nuestro trabajo nos permiten detectar los siguientes tipos de profesores, respecto a la desaparición del rigor y de las demostraciones:

- **Descontento.** Se preocupa por la paulatina desaparición de la demostración de las asignaturas de matemáticas.
- **Indiferente.** No expresa ninguna inquietud por la paulatina desaparición de la demostración en la Educación Matemática (EM).

Ambos entrevistados muestran su preocupación:

Port. *Sim, piora a qualidade da aprendizagem.*

Esp. *Sí, estoy de acuerdo... Y acaba, acaba por perderse un poco el desenvolvimiento de la razón; el desarrollo de la razón...*

4.5 En cuanto a la indiferencia de los alumnos ante una demostración

Se registran profesores que se rinden ante esa actividad y dejan de hacerla, otros que procuran evitar la situación intentando otro modo de concebirla, otros aún, que procuran estrategias alternativas, en particular, la concretización ya que la tendencia de los alumnos es trabajar en lo concreto, con recetas y formulas listas para aplicarlas de forma mecánica. En efecto, a la vista de las respuestas resumidas en la Tabla 5, las actitudes de los estudiantes respecto de las demostraciones no son las más deseables.

Tabla 5. Actitudes de los alumnos ante las demostraciones.

Actitudes	Porcentaje	Número de respuestas positivas de 51	Moda
Interés	13,73	7	Incomprensión
Curiosidad	15,69	8	
Atención	17,65	9	
Indisciplina	17,65	9	
Contestación	35,29	18	
Indiferencia	35,29	18	
Confusión	47,06	24	
Incomprensión	56,86	29	

Así, el rechazo y la inapetencia de los alumnos hacía el estudio de demostraciones, debido a factores de incomprensión, indiferencia, confusión, etc., circunscriben distintas actuaciones por parte del profesorado y, como se muestra en la Tabla 6, se sienten muy condicionados por las actitudes de los alumnos y, en consecuencia, actúan de forma muy diferente.

Port. *Uma chatice. Mesmo que o professor queira demonstrar alguma coisa, como não sei nos testes e exames, os alunos já não se interessam por elas e, para quase todos, é tempo perdido fazê-las...*

Esp. Sí. La primera reacción es de rechazo. ... porque no están en los contenidos; no puedes examinar de eso. Entonces, los alumnos en seguida dicen ¿esto entra en examen?, como no entra, aunque quiera, ya no se interesan. Aunque quiera, ya no hago algo de demostración; y ahora no se demuestra nada.

Tabla 6. Si la mayoría de los alumnos se muestra ausente cuando hace una demostración, ¿qué actitudes suele tomar?

Respuesta	Total	Moda	Porcentaje
Deja de hacerla	4		7,84
Hace una demostración alternativa	17	Concretiza	33,33
Concretiza y punto	23		45,10
Aprovecha los esquemas de prueba de los alumnos	12		23,53

Sobresalen, pues, diferentes desempeños docentes, incluso algunos que contemplan los estadios de razonamiento de los alumnos y que nosotros agrupamos en las dos siguientes categorías:

- **Rendido (resignado).** Desiste de hacer la demostración ante el rechazo de los alumnos.
- **Persistente.** Intenta siempre hacer la demostración, mismo contra las objeciones de los alumnos.

Port. Não deixa de fazer a demonstração, mas, tenta... ir por outros caminhos, mas é importante que o aluno tenha a percepção de que terminou a demonstração e que, de facto, provou o que queria.

Esp. Pues, yo trato de convencerles, ahí es de la importancia de la demostración, de que aprendan a demostrar como forma de razonamiento que puede ser válida para otros momentos de su vida cotidiana.

4.6 En cuanto a la diferencia entre esquemas, métodos y tipos de prueba

Se descubren profesores que están actualizados respecto a esos procedimientos matemáticos, otros que confunden estos medios y muchos que ni siquiera conocen algunos de ellos o que nunca oyeron hablar de tales. En la Tabla 7 se presenta el resumen de estas respuestas.

Tabla 7. ¿Para usted, existe alguna diferencia entre métodos, tipos y EP?

Respuesta	Total	Porcentajes	Moda
Sí	16	31,37	
No	2	3,92	No lo sé
No lo sé	33	64,71	

Estas respuestas, juntamente con otras que fueron obtenidas, permiten considerar los siguientes géneros docentes, en función de sus conocimientos sobre metodologías, tipos y razonamientos demostrativos:

- **Informado.** Manifiesta que conoce los pormenores de la metodología de las pruebas matemáticas.

- **Desinformado.** Manifiesta que no conoce los pormenores de la metodología de las pruebas matemáticas.
- **Impreciso.** Se muestra confuso con los pormenores de la metodología de las pruebas matemáticas.

Se detecta que, en general, no describen relación alguna entre pensamiento inductivo, estructura del enunciado y procedimientos, pero a la vez denotan una interpretación muy sagaz:

Esp. Yo, por métodos, pues, lo decía Port., los diferentes procedimientos que se pueden utilizar, como La Reducción al Absurdo. Los EP, serían más los que corresponden al alumno, los que él va realizando, que serían previos a la demostración rigurosa y completa. Y los tipos de prueba, pues,... eh... cuando las utilizan con diferentes... utiliza diferentes recursos para poder hacer las pruebas.

4.7 Según la conexión con los diferentes tipos de inteligencia

Encontramos profesores que conectan varios tipos de inteligencia con las demostraciones y que aseguran que la adquisición de estos tipos está directamente correlacionada con el aprendizaje y reiteración del razonamiento matemático y otros que sólo ligan algunas de esas formas a las DM. En la Tabla 8 se presenta una síntesis de estas respuestas y, a la vista de la misma, llama la atención la escasa consideración de la inteligencia emocional y la diferencia entre las puntuaciones de la inteligencia lógico matemática y el resto.

Tabla 8. *Tipos de inteligencia que más se conectan con el aprendizaje de las demostraciones.*

Tipos de inteligencia	Número de respuestas positivas de 51	Porcentaje	Moda
Corporal y Kinestésica	2	3,92	
Emocional	4	7,84	
Musical	4	7,84	
Interpersonal	6	11,76	
Intrapersonal	12	23,53	
Verbal-Lingüística	19	37,25	Lógico-
Natural	19	37,25	Matemática
Espacial	30	58,82	
Práctica	32	62,75	
Creativa	43	84,31	
Deductiva	47	92,16	
Lógico-Matemática	49	96,08	

Estas respuestas, junto con otras exploraciones de nuestra investigación nos permiten agrupar a los profesores en las dos categorías siguientes:

- **Consistente.** Asocia al aprendizaje de la demostración con bastantes tipos de inteligencia.
- **Inconsistente.** Sólo relaciona la demostración con algunos tipos de inteligencia y lo hace de forma inconsistente.

Curiosamente, ponen a la demostración al servicio de los diferentes tipos de inteligencia.

Esp. Pues, sí. Yo también creo que la demostración nos ayudaría a desarrollar... casi todos. Sin duda, la lógico-matemático y... la emocional, que también es importante... Sí... es que tu razones matemáticamente a través de la demostración... y la verbal-lingüística, con esa comunicación de las ideas matemáticas... Y, esa verbal-lingüística, aun me llevaría a relacionarlo con... la interpersonal... porque, en muchas ocasiones, cuando entre ellos, tienen que hablar y... y comentar ellos una demostración uno a otro, explicarse... también desarrollan...

4.8 Según la forma de cómo demostrar

Hallamos profesores que prefieren ir de lo general a lo particular, otros optan por lo contrario, y otros que varían la forma de enseñar en función de los contenidos y de las contingencias de todo el proceso, incluyendo varios aspectos que faciliten el aprendizaje de las matemáticas. En la Tabla 9 se describen algunos recursos que apoyan ese aprendizaje y el respectivo grado de adhesión positiva por parte de los profesores. Éstas y otras respuestas emitidas en la entrevista aseguran que el comportamiento de los profesores sobre las consideraciones de qué hacer a la hora de presentar las demostraciones para que los alumnos las aprendan es muy diferente.

Tabla 9. *Cómo demostrar, qué debes considerar para facilitar el aprendizaje al hacer una demostración.*

Consideraciones	Número de respuestas positivas en 51 profesores	Porcentaje
Considerando los aspectos socio-afectivos de los alumnos	13	25,49
Contemplando las representaciones que los alumnos hacen de las Matemáticas	17	33,33
Hablando de las historias de las demostraciones	20	39,22
Con lenguaje formal	23	45,10
Partiendo del general para el concreto	30	58,82
Variando los tipos de prueba	34	66,67
Variando los métodos de prueba	35	68,63
Partiendo del concreto para el general	38	74,51
Permitiendo que los alumnos conjeturen	41	80,39
Relacionando “las etapas” de la demostración con contenidos ya conocidos	42	82,35
Con lenguaje matemático ajustado al nivel de los alumnos	44	86,27
Recordando lo necesario para entender la demostración	44	86,27

Estas consideraciones nos permiten clasificar a los profesores como:

- **Clásico/formal.** Parte de lo general para lo concreto, de la demostración para los ejemplos, usando lenguaje y razonamientos formales.
- **Concreto/Práctico.** Parte de lo concreto para lo general, de los ejemplos para la demostración, usando lenguaje y razonamientos intuitivos.
- **Didáctico.** Articula la forma de presentar las demostraciones según las situaciones.

4.9 En cuanto a la posición sobre los EP de los propios alumnos

Encontramos profesores que tienen en cuenta aspectos socio-afectivos de los alumnos, sus representaciones, sus conjeturas, su nivel de lenguaje matemático, etc., otros sólo tienen en cuenta estas consideraciones en algunas situaciones; y otros que nunca las aprovechan o respetan. Por tanto, surgen estas tres categorías docentes:

- **Evolucionista.** Aprovecha las formas de pensar de los alumnos para mejorar la comprensión de las demostraciones.
- **Arbitrario.** Sólo considera los mecanismos de prueba y razonamiento de los estudiantes algunas veces.
- **Egocéntrico.** No quiere saber (no se interesa por) el estado de maduración de los esquemas de razonamiento de sus alumnos.

Ambos profesores creen que es interesante considerar los EP de los propios alumnos:

Port. *Sim, sim, é fundamental.*

Esp. *Yo creo que sí, que es muy bueno partir de los EP de los propios alumnos y que la intervención del profesor sea partiendo de sus esquemas para ayudarles a ellos, para guiarlos un poco... y que aprendan ya a pasar de ahí a la demostración más rigurosa.*

4.10 Según la disposición de demostrar

Se han detectado desde profesores que lo demuestran todo, hasta los que no prueban nada, ni siquiera los teoremas más importantes. En la Tabla 10 se presenta el resumen de algunos datos respecto a eso.

Tabla 10. *¿Suele demostrar los teoremas más importantes?*

Respuestas	Total	Porcentaje	Moda
Si	19	37,25	
No	7	13,73	A veces
A veces	24	47,06	

Éstos y otros datos recogidos en nuestra investigación sobre la propensión de los profesores para hacer demostraciones nos permiten distinguir tres tipos de profesorado:

- **Demostrativo.** Demuestra formalmente todas, o casi todas, las propiedades que presenta.
- **Argumentativo.** No demuestra. Suele “justificar” las propiedades que presenta con ejemplos, esquemas u otras alternativas a la demostración
- **Selectivo/flexible.** Demuestra o no dependiendo de la situación del momento (alumnado, dificultad,...)

Ambos profesores entrevistados creen que se tienen que seleccionar muy bien las DM que se quieran enseñar e incluirlas en la programación:

4.11 Según el afecto/gusto por las demostraciones

Encontramos profesores entusiastas y apegados a las DM, otros contrarios a ellas y algunos que, digamos, son neutrales ya que ni son proclives ni son insensibles a ellas. Estas posiciones nos permiten agrupar al profesorado en tres categorías:

- **Aficionado.** Le gustan las demostraciones.
- **Reacio.** No le gustan las demostraciones.
- **Indiferente.** Ni le gustan ni le disgustan las demostraciones, unas le gustan y otras no.

4.12 Sobre la enseñanza de las demostraciones

Existen profesores predispuestos a esa enseñanza de forma exhaustiva, otros contrarios a ella y otros que defienden que la enseñanza de una demostración depende de muchos factores como su grado de dificultad y el estadio del nivel de razonamiento del alumnado, entre otros. Nuestra investigación detecta los siguientes tipos docentes en función de su tendencia para hacer demostraciones:

- **Favorable.** Se muestra a favor de la enseñanza de demostraciones para un buen aprendizaje de las Matemáticas y para el desarrollo del razonamiento.
- **Contrario.** Es contrario a la enseñanza de las demostraciones, no viendo en ellas ningún beneficio educativo.
- **Imparcial.** No está ni en contra ni a favor de la enseñanza de demostraciones, dependiendo del contexto, del alumnado y de la propia demostración.

Port. As demonstrações que se fazem agora não são verdadeiras demonstrações... Dada a falta de tempo para fazer demonstrações, as que se fazem devem, pelo menos, ser feitas na íntegra e com todo o rigor e explicações necessários.

4.13 Sobre el uso y acreditación de las “pruebas informáticas”

Descubrimos profesores, no muchos, que le otorgan mucha fiabilidad y que les denominamos *informáticos*; otros, tampoco muchos, que no les conceden credibilidad, a menos que sean verificaciones o programas para encontrar contra-ejemplos y que llamamos *matemáticos*; finalmente, la mayoría les otorgan alguna credibilidad en algunas situaciones, les llamamos *indecisos*. El resumen de los datos se presenta en las Tablas 11 y 12.

Tabla 11. ¿Cree que es posible hacer una demostración por máquina (prueba informática)?

Respuestas	Total	Media	Desviación Típica	Porcentaje	Moda
1	4			7,84	
2	18			35,29	
3	19	2,75	0,80	37,25	No lo sé
4	7			13,73	Algunas veces
5	3			5,88	
Resultados				Total	Porcentaje
Informáticos				22	43,14
Indecisos				19	37,25
Matemáticos				10	19,61

La Tabla 12 contiene un resumen de los datos recogidos sobre fiabilidad de las pruebas informáticas. A simple vista se puede conjeturar que la correlación entre posibilidad y fiabilidad es muy alta y los cálculos lo ratifican ya que se obtiene un coeficiente igual a 0,991.

Port. Não, não... não a faz... era impossível. Portanto, eu penso que a máquina não era necessária... no Ensino Secundário. Eu penso que o professor tem que ter a habilidade de... dar importância aos conteúdos e... e tornar a máquina... fazer... demonstrar aos alunos que a máquina é desnecessária

Tabla 12. *¿Qué fiabilidad afianza a las pruebas hechas por máquina (pruebas informáticas)?*

Respuesta	Total	Media	Desviación Típica	Porcentaje	Moda
1	5			9,80	
2	16			31,37	
3	19	2,76	0,83	37,25	No lo sé
4	8			15,69	Algunas veces
5	3			5,88	
Resultados				Total	Porcentaje
Negativos				21	41,18
Indecisos				19	37,25
Positivos				11	21,57

Los datos de ambas tablas y otros recogidos en la investigación sugieren la siguiente tipología docente, respecto a las pruebas informáticas:

- **Informático.** Cree plenamente en la posibilidad de hacer pruebas informáticas y en su fiabilidad.
- **Matemático.** No cree en las pruebas informáticas porque no las considera fiables o no las considera fiables porque no cree en ellas.
- **Indeciso.** Cree que se pueden hacer en algunos casos y que tienen cierto grado de fiabilidad.

4.14 Sobre el uso de recursos que apoyan la enseñanza de la demostración

En la Tabla 13 se presentan en orden creciente los datos recogidos sobre algunos de los recursos que son usados por los profesores para apoyar la enseñanza de las demostraciones y la forma como los valoran en ese proceso.

Tabla 13. *Acreditación de recursos que apoyan la enseñanza de las demostraciones.*

Estrategia	Número de respuestas positivas de 51 profesores
Pruebas informáticas	16
Apoyo Multimedia	21
Explicaciones verbales	22
Argumentos Informales	26
Explicaciones escritas	31
Esquemas de prueba del alumnado	34
Esquemas	36
Ejercicios	36
Pruebas visuales	37
Ejemplos concretos	38

Llama la atención que, de todos los recursos que son considerados por los profesores, las pruebas informáticas y los apoyos multimedia son los menos valorados; por el contrario, las mayores valoraciones son para los ejemplos, las pruebas visuales y ejemplos. Por otra parte, la mayor parte del profesorado utiliza varios recursos para facilitar la comprensión de los alumnos, pero aún así se puede establecer una clasificación atendiendo a los recursos que utilizan más

- **Tradicionalista.** Utiliza los recursos más apropiados para seguir el razonamiento de las demostraciones (explicaciones verbales orales y escritas, y esquemas).
- **Inductivos.** Son los profesores que utilizan con mayor frecuencia argumentos informales, esquemas del alumnado, ejercicios y ejemplos
- **Innovadores.** Aunque son los menos, éstos utilizan con mayor frecuencia recursos electrónicos: pruebas informáticas, multimedia, visualizaciones

A continuación se reproduce un diálogo entre la entrevistadora, PI, y los profesores entrevistados: moderador

Esp. Para los alumnos es muy buena la posibilidad de trabajar con estos programas de... Geometría Dinámica...

PI. Visualizar...

Esp. Sí, visualizar las demostraciones en el ordenador. Y creo que, sí, es...

PI. ¿Pero, pruebas por ordenador?

Esp. Eh...

PI. Sólo...

Esp. Claro, no. Sólo hacerla con el ordenador, no... pero...

Port. Pela visão...

Esp. Claro. Efectivamente, que puedan visualizarlas, eso sí.

4.15 En cuanto al tipo de prueba que utilizan

Encontramos que muchos profesores, prefieren utilizar pruebas muy sencillas y básicamente aritméticas, otros que optan por mezclar argumentos inductivos y deductivos, y se preocupan más que otra cosa por ser explicativos; un tercer grupo elige las pruebas más elaboradas y complejas con una metodología matemática muy variada. Así, el profesorado se reparte entre el uso de pruebas explicativas y pruebas formales, pero hay otros que dicen no preocuparse de las características y/o potencialidades de las DM. Así, surgen estas tres clases de docentes:

- **Explicativo.** Prefiere las demostraciones con características explicativas y mezcla razonamientos inductivos y deductivos.
- **Formal.** Conceden prioridad a las demostraciones formales sean explicativas o no.
- **Estático.** No se preocupa de las particularidades de las demostraciones.

Port. O que se fazem agora são... não são uma demonstração na verdadeira acepção do tema... portanto... são mais leves... mais...

Esp. Esquemas

Agradecimientos. Esta investigación ha sido subvencionada en parte por el proyecto I+D+I EDU 2009-12063

Referencias

- Asch, A.G., Van (1993). To prove, why and how? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 24 (2), 301-313.
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En D. Pimm (ed.) *Mathematics, Teachers and Children*, (pp. 316-230), London: Hodder and Stoughton.
- Bell, A. (1976). A study of pupils' proof-explanations. *Mathematical Situations: Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.
- Brown, A., & Dowling, P. (1998). *Doing research/reading research: A mode of interrogation for education*, London: Falmer Press.
- Chazan, D. (1993). Reports interviews with high school students describing their views of proofs as evidence, versus their acceptance of examples as verification. *Educational Studies in Mathematics*.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Leherer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher*, 32 (1), 9-13.
- Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design Research: Theoretical and Methodological Issues. *The Journal of the Learning Sciences*, 1(13), 15-42.
- Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R.K. Sawyer, *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, Washington University, St Louis.
- Davis, P.J. (1993). Visual Theorems. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 333-344.
- Dormolen, J. Van. (1977). Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics*, 8(1), 17-34.
- Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the learning of Mathematics*, 3(2), 8-24.
- Galbraith, P.L. (1981). Aspects of proving: A clinical investigation of process. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 1-28.
- González, J.C. (2012). *Estudio de Contraste sobre la preferencia y significación de pruebas formales y preformales*. (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Valladolid.
- Hanna, G. (1983). Rigorous proof in mathematics education. *The Ontario Institut for Studies in Education*, Toronto.
- Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the learning of mathematics*, 9(1), 20-25.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *Issues in Mathematics Education*, 7, 234-283.
- Hersh, R. (1993) Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 389-399.
- Ibañez, M., & Ortega, T. (1998). La Demostración en Matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria. *Educación Matemática*, 9(1), 65-104.
- Ibañez, M., & Ortega, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. *UNO*, 28, 39-60.
- Ibañez, M., & Ortega, T. (2002). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 21, 49-63.

- Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Leron, U. (1983). Structuring mathematical proofs. *American Mathematical Monthly*, 90, 174-185.
- Martin, G., & Harel, G. (1989). Proof frame of pre-service elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 41-51.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. (Tesis doctoral no publicada), Universidad de Granada, Granada, España.
- Movshovitz-Hadar, N. (1988). Stimulating presentation of theorems followed by responsive proofs. *For the Learning of Mathematics*, 8(2), 12-19.
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(1), 3-14.
- Pecharromán, C., & Ortega, T. (2009). Diseño de un marco de investigación. Aplicación al proceso de aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 367-378) Santander: SEIEM.
- Radatz, H. (1979) Error Analysis in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 163-172.
- Radford, L. (1994). La Enseñanza de la Demostración: Aspectos teóricos y prácticos. *Educación Matemática*, 6(3), 21-35.
- Semadeni, Z. (1984). Action Proofs in Primary Mathematics Teaching and in Teacher Training. *For the Learning of Mathematics*, 4, 32-34.
- Villiers, M.D. de (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras*, 24, 7-24.

Referencia a los autores

Caçilda dos Santos, Agrupamento de Escolas Fernão de Magalhães Chaves (Portugal). cspaz@sapo.pt

Tomás Ortega, Didáctica de la Matemática. Universidad de Valladolid (España). ortega@am.uva.es

Teachers' Profiles on Teaching and Uses of Proofs

Caçilda dos Santos, Agrupamento de Escolas Fernão de Magalhães Chaves (Portugal)

Tomás Ortega, Didáctica de la Matemática. Universidad de Valladolid (España)

This article describes a study leading to a classification of Math teachers at the secondary-school level based on their opinion of mathematical proofs and their attitudes toward the use of proofs in teaching.

A number of previous studies have been taken into consideration: some related to learning proofs (Ibañes y Ortega, 2001 y 2002); others dealing with the structure of proofs, their rigor and teaching (Bell, 1976; Galbraith, 1981; Fischbein, 1982; Lerón, 1983; Martin & Harel, 1989; Hanna, 1983); others concerned with the levels and functions of proof, with proof schemes and preformal proofs, These have provided a theoretical framework from which to analyze our data.

The methodology was designed to adapt to the study as it progressed. The emerging data led to continual refinement; the contributions made by cooperating teachers were especially relevant as their observations stem from their work (Cobb, Confrey, diSessa, Leherer, & Schauble, 2003; Collins, Joseph, Bielaczyc, 2004; Confrey, 2006; Molina, 2006).

Exploratory interviews carried out on Portuguese secondary school teachers were the basis for a preliminary questionnaire to which 20 Portuguese math teachers responded. After refining this questionnaire, a greatly enhanced second questionnaire was given to 31 Portuguese and 20 Spanish secondary school teachers. Both cases dealt with available samples. Finally, a male Portuguese teacher and a female Spanish teacher, both of whom had filled out the second questionnaire, took part in a joint interview.

The analysis of the data from the questionnaires and the interview gave rise to a classification of teachers taking into account the following aspects: ways of persuading and convincing; the competences of math teachers; the profile of students to whom proofs were taught; the possible gradual disappearance of mathematical proof in syllabuses; possible lack of interest on the part of students; the difference between schemes, methods and types of proofs; the relationship between proofs and types of intelligence; different ways of presenting a proof; students' opinions regarding proof schemes; the willingness to use proofs; the liking for proofs; the teaching of proofs; the use and accreditation of computerized tests; other methods of teaching proofs; and the types of proofs that were used.

Among other findings, we conclude that proofs are disappearing from both state curricula and textbooks; this, in turn, is leading all but the most highly convinced teachers to stop using them, among other reasons, because students do not like them. Intuitive argumentation is used in their stead, thus eroding mathematical knowledge. Mathematical writing and reading is full of errors and lack of comprehension because mathematical language is not being used; without it the meaning of mathematical concepts, representations and reasoning is lost, as has been proven by Radford's (1994) work.

Some teachers have adapted to the gradual loss of rigor, formalism and mathematical proofs, opting instead for simplified explanations that do not transmit the soundness of a proof, which is where mathematical strength lies.