Gasta sólo lo que puedes pagar. Una experiencia de optimización con alumnos de secundaria.

María Candelaria Espinel Febles, Universidad de La Laguna

Juan Agustín Noda Gómez, IES Magallanes, Granadilla

Recibido el 27 de Junio de 2012; aceptado el 5 de Septiembre de 2012

Gasta sólo lo que puedas pagar. Una experiencia de optimización con alumnos de secundaria.

Resumen

La experiencia que se presenta pretende valorar la intuición optimizadora en estudiantes de secundaria obligatoria. El problema que se aborda es, dado un conjunto de cantidades, elegir entre ellas las que sumen una cantidad exacta o lo más cercana a ella. El resultado de la experiencia de aula en un contexto específico ha permitido identificar la poca preparación de los estudiantes para este tipo de tarea. La principal conclusión es que los estudiantes están preparados para sumar cantidades, pero les resulta muy difícil elegir los sumandos que sumen una determinada cantidad, desconocen estrategias y son incapaces de inventar heurísticos que les lleve a conseguir el objetivo. La reflexión, consecuencia de la experiencia realizada, es que a los problemas de optimización se les dedica poca atención en la enseñanza obligatoria a pesar de ser de gran utilidad en la vida cotidiana

Palabras clave. Problemas tipo mochila, optimización, enseñanza secundaria, tarea, instrucción.

Gastar apenas o que você pode pagar. Otimização com uma experiência de alunos do ensino médio.

Resumo

A experiência mostrada tenta avaliar a intuição de otimização em alunos do ensino médio obrigatório. O problema abordado é dado um conjunto de quantidades, escolher aqueles que lleguem a um valor exato definido ou o mais próximo a ele. O resultado da experiência na sala de aula em um contexto específico identificou má preparação dos estudantes para este tipo de tarefa. A principal conclusão é que os alunos estão preparados para somar números, mas é muito difícil escolher os numeros que adicionam uma certa quantidade, no conhecen estratégias e são incapazes de inventar heurísticas que levam a atingir a meta. O reflexao, conseqüência da experiência feita, é que os problemas de otimização recebem pouca atenção no ensino obrigatório, apesar de ser muito úteis na vida cotidiana.

Palavras chave. Problemas da mochila, otimização, ensino médio, tarefas, instrução.

Para citar: Espinel, M.C. y J.A. Noda (2012). Gasta sólo lo que puedas gastar. Una herramienta de optimización con alumnos de secundaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 2, 71 – 85.*

Only spend what you can afford. An optimization experience with high school students

Abstract

This experience was intended to attempt to evaluate the optimizing intuition in secondary school students. The problem posed consists in selecting objects from a previously given set whose total value should be equal to an exact number, or as close to this exact number as possible. As a result of the classroom experience in a specific context, we observe the poor preparation of students for this type of task. The main conclusion is that students are prepared to add quantities; however they find it difficult to choose quantities which add an exact number. They do not possess adequate strategies, and are incapable of inventing heuristics to achieve their goal. The reflection, which results from the experience, is that in spite of their usefulness in daily life, little attention is paid to optimization problems in compulsory education.

Key words. Knapsack problems, optimization, secondary education, task, instruction.

Dépenser que ce que vous pouvez vous permettre. Une expérience optimisation avec des étudiants du secondaire .

Résumé

L'expérience que non présentons prétend valoriser l'intuition d'optimisation chez les élèves du secondaire. Le problème abordé est, donné un ensemble de quantités, choisir celles qui additionnent à un montant exact ou le plus près d´elle. Le résultat de l'expérience en classe dans un contexte spécifique a conclut la mauvaise préparation des élèves pour ce type de tâche. La principale conclusion serai que les étudiants sont prêts à ajouter des numéros, mais il est très difficile de choisir les opérandes qui ajoutent un certain montant, ils ne fournissent pas des stratégies et sont incapables d'inventer des heuristiques qui les amènent à atteindre l'objectif. La réflexion, une conséquence de l'expérience faite, c'est que les problèmes d'optimisation reçoivent peu d'attention dans l'enseignement obligatoire en dépit d'être très utiles dans la vie quotidienne

Paroles clés. Problèmes à dos, l'optimisation, le lycée, les devoirs, d´instruction

1. Introducción

Si se va de compras y sólo se dispone de una cantidad fija para gastar, digamos 50 euros, es lógico elegir productos cuyo coste no sobrepase esa cantidad. Esta es una situación usual, que necesita de nuestra percepción optimizadora. En matemáticas, elegir unos productos cuyo valor sumen una cantidad fija se conoce como problema de subconjunto suma. Si en la lista de productos, hay unas prioridades, entonces se presenta el conocido como problema de la mochila (Martello & Toth, 1990).

Ambos problemas admiten distintas variantes y pueden aparecer en situaciones cotidianas, que cualquier ciudadano debería saber afrontar. Por ejemplo, con el fin de promocionar algunas zonas comerciales, ha estado de moda un concurso en el que una persona ha de gastar exactamente 1000 euros en un plazo de tiempo y en determinados comercios, que sería un caso de problema de subconjunto suma. Otra situación cotidiana es que, para ahorrar cuando se va de compras a las rebajas, se aconseja salir de casa con una lista de los productos que realmente se necesitan y, aún mejor, con un orden de prioridades; entonces aparece el problema de la mochila. Y así seguramente se pueden seguir poniendo muchos ejemplos habituales para cualquier ciudadano, donde aparece el tipo de problema citado.

La presencia de la optimización en la vida diaria y los escasos problemas de optimización presentes en los diseños curriculares animan a investigar las posibilidades que tienen los problemas tipo mochila en la educación obligatoria. Consecuentemente, el objetivo de este artículo, es, primero, realizar una exposición resumida del problema de la mochila, señalando su utilidad en el aula, a continuación sugerir algunos métodos de solución, y aportar referencias bibliográficas que pueden ser de utilidad al lector.

También se analiza una experiencia de aula relacionada con los problemas tipo mochila, cuyo objetivo fue estimular la intuición optimizadora en estudiantes de secundaria obligatoria. A modo de una primera aproximación a este tipo de problema, se diseña una actividad con datos reales de la cesta de la compra, tomados de un determinado supermercado, con objeto de favorecer la conexión entre matemáticas y situaciones del mundo real, tan necesaria para motivar a los alumnos de primaria y secundaria. Los estudiantes han de elegir unos productos que sumen una determinada cantidad y para ello se espera que desarrollen sus propias estrategias o que inventen heurísticos que les lleven a conseguir gastar el dinero de que disponen sin pasarse.

2. El problema de la mochila

En matemáticas, y más concretamente en optimización combinatoria, el problema de la mochila, que se suele denotar por KP, debido a sus iniciales en inglés, Knapsack Problem, utiliza como modelo una mochila, lo que justifica su nombre (Kellerer, Pferschy, & Pisinger, 2004). Un enunciado sencillo sería del siguiente estilo.

Dada una mochila con una capacidad de 15 kg. que se puede llenar con objetos de distinto peso y valor, ¿qué objetos deberían elegirse con el fin de maximizar mis ganancias y no exceder los 15 kg de peso permitidos?

La imagen que acompaña a la página de Wikipedia relacionada con el tema y que se puede consultar en http://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_la_mochila se reproduce en la Figura 1 y es bastante ilustrativa.

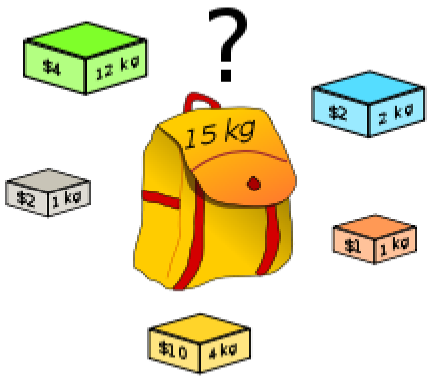

Figura 1. Un ejemplo concreto de problema de la mochila

En general, en el problema de la mochila se trata de llenar un contenedor con una capacidad limitada (la mochila) con una serie de objetos, de forma que el valor total de los objetos introducidos en el contenedor sea el máximo posible. Cada uno de los objetos tiene un valor y un peso o volumen asociado. Seguramente esto conduce a que pueda haber muchas soluciones posibles, pero se busca aquella que proporcione la colección de objetos de mayor valor posible, por ello es un problema de optimización.

Para formarse una idea de cómo funciona un algoritmo que dé solución al problema, y la manera de trabajar, se puede pensar en el siguiente escenario:

- Hay que llenar una mochila que admite un peso máximo P.
- Se tiene una lista de los objetos a introducir en la mochila. Cada objeto tiene asociado un valor y un peso.
- Se quiere llenar la mochila con objetos, de forma que la suma de los pesos de los objetos no supere al peso P que admite la mochila y, además, que el valor total de los objetos introducidos sea el máximo posible.

La mochila mostrada en la Figura 1, tiene una capacidad de 15 kg y muestra 5 objetos, cada uno con su peso en kg y un valor en dólares, como se recoge en las tres primeras columnas de la Tabla 1. La cuarta columna (valor por unidad de peso) alude a una estrategia de solución para este tipo de problemas que se detallara más adelante.

Tabla 1. *Datos para llenar una mochila*

Objetos	Peso en Kg.	Valor en dólares	Valor/Peso
1	12	4	0,33
2	4	10	2,5
3	2	2	0,66
4	1	2	2
5	1	1	1

Hay que llenar la mochila con algunos de los objetos dados, de forma que no se superen los 15 kg y que se alcance un valor máximo del precio total. La solución, si no es usa ninguna estrategia, consistiría en elaborar un listado de todas las combinaciones posibles de objetos, calculando para cada una de ellas el valor total del precio de los artículos que la forman, y elegir finalmente la combinación que proporcione el mayor valor entre todos. Encontrar una posible solución, aunque no sea la óptima, con sólo 5 objetos es fácil, pues con los objetos 1, 3 y 4 de peso 12,2 y 1 kg, se suma el peso máximo 15 kg y los valores respectivos 4, 2 y 2, dan un valor total de 8$.

El problema surge cuando la lista de objetos a introducir en la mochila o contenedor es muy grande y calcular todas las posibilidades es demasiado costoso. Es para esos casos de gran tamaño cuando se trata de buscar algoritmos. La solución es compleja y de hecho, es un típico problema de formulación sencilla, pero de difícil solución, de los que se conocen en informática como *NP-completo*, es decir, no se conoce un algoritmo que lo resuelva en un tiempo polinomial (Garey & Johnson, 1979).

En la formulación matemática del problema de la mochila se consideran n tipos de ítems, que van del 1 al n. Cada tipo de ítem i tiene un valor v_i y un peso p_i. Usualmente se asume que los valores y pesos no son negativos. Para simplificar la representación, se suele asumir que los ítems están ordenados según su peso en orden creciente.

Algunos algoritmos de solución

Tradicionalmente, el problema se ha formulado y resuelto mediante programación lineal entera, por lo que la función a optimizar y las restricciones son lineales. Otra forma de resolver este tipo de problema es a través de un *algoritmo voraz o greedy* (Horowitz & Sahni, 1978).

Un algoritmo tipo *greedy* puede consistir en ordenar los objetos o ítems de forma decreciente en cuanto a su relación valor/peso, esto es de acuerdo a los valores v_i/p_i e ir introduciendo en la mochila objetos en este orden mientras quepan. Cuando, por motivo de capacidad, no sea posible seguir introduciendo el objeto que corresponda por orden, se añade el siguiente objeto o ítem que aún tenga cabida; el resultado al que se llega por este procedimiento es una solución óptima. En el caso de la mochila de 15 kg, presentada en la Figura 1, en la Tabla 1 se recoge la relación valor/peso, y el orden de prioridad. Esta relación lleva a elegir los objetos 2, 3, 4 y 5, de peso 4, 2, 1 y 1, con valores respectivos 10, 2, 2 y 1, y, por tanto, el valor de la mochila, llena hasta 8 kg. pasa a 15 $.

Otro sistema para resolver el problema de la mochila es mediante un *algoritmo genético* (Moreno & Moreno, 1999). Para calcular la solución, se parte de una serie de soluciones iniciales que representan colecciones aleatorias de objetos. Se calcula para cada una de estas soluciones, el valor total de los objetos introducidos en la mochila. El algoritmo genético tomará estas soluciones y realizará operaciones entre ellas, con la intención de ir mejorándolas. Con dicho algoritmo, se iría tomando objetos de una y otra solución, y se calcularía el valor total de objetos introducidos en la mochila de una nueva solución generada, que se comparan con sus antecesoras, y progresivamente se van seleccionando las mejores.

Aplicaciones e información complementaria

El problema de la mochila es uno de los más comunes que se investigan en optimización combinatoria y en Investigación Operativa, ya que tiene grandes aplicaciones en los contextos de la administración de operaciones y de la logística. La situación se presenta con frecuencia en los ámbitos económico e industrial, donde la mochila suele representar la restricción presupuestaria, es decir, la cantidad de recursos económicos de que se dispone y donde la utilidad de los objetos seleccionados se equipara a un beneficio económico por adquirir o llevar a cabo ciertas acciones.

Otro ámbito donde el problema tipo mochila, en su variante subconjunto suma, tiene gran utilidad es en criptografía (Caballero & Hernández, 2000). La búsqueda de sistemas criptográficos es una línea de investigación donde el objetivo es obtener cifrados y descifrados a grandes velocidades. El planteamiento de sistemas de mochila seguros es sencillo, dado un conjunto finito de números enteros y una subsuma del conjunto anterior, se trata de encontrar todos los posibles subconjuntos de enteros que dan lugar a la subsuma.

Existen distintas líneas de investigación sobre este problema, relacionadas principalmente con la modelización de problemas prácticos y con la búsqueda de algoritmos óptimos (Martello & Toth, 1990). Una iniciación a este tipo de problemas se encuentra en muchos textos universitarios propios de Investigación Operativa y Programación Matemática (por ejemplo, Salazar, 2001).

En la actualidad existen también diversas páginas web donde encontrar información básica sobre definiciones y técnicas generales, algunos de las cuales listamos en la Tabla 2, entre otros la ya citada Wikipedia, tanto en inglés como en castellano. Una página web completa dedicada a este problema de la mochila es Knapsack web. Un ejemplo sencillo se presenta en la página sobre programación entera desarrollada en la Universidad Autónoma de México. Incluimos también unas páginas donde se puede encontrar ideas para estudiantes, relacionadas con la criptografía, y documentación propia de asignaturas que se imparten en la universidad y donde se trata este problema. El último recurso presentado en la Tabla 2 es un tutorial sobre este problema.

Tabla 2. *Recursos en Internet sobre el problema de la mochila*

Título	Dirección web
Wikipedia	http://en.wikipedia.org/wiki/Knapsack_problem
Wikipedia	http://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_la_mochila
Knapsack web	http://chern.ie.nthu.edu.tw/Knapsack_Problem.htm
Programación entera, Universidad Autónoma de México	https://sites.google.com/site/programacioentera1501/home
Aplicaciones a criptografía	http://nrich.maths.org/2199
Materiales de la Universidad del País Vasco	http://users.dsic.upv.es/asignaturas/facultad/cri/ClavePb.pdf
Ejercicios relacionados	http://education.ti.com/xchange/US/Math/AlgebraII/8125/Act1_PackItIn_JanusList_final.pdf.
Applets con soluciones al problema	http://www.cs.huji.ac.il/~popcorn/developer/examples/knapsack/index.html.
The knapsack problem	http://www.ifors.ms.unimelb.edu.au/tutorial/knapsack/

3. Marco teórico

La enseñanza a través de la *resolución de problemas* ha sido uno de los métodos más utilizados para poner en práctica el principio general del aprendizaje activo. Con ello se persigue generar, en lo posible, de una manera sistemática, los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas. La resolución de problemas como foco de la enseñanza de las matemáticas ha dado lugar a varios modelos tanto teóricos como prácticos (Santos, 2007).

A veces, se dice que los estudiantes no tienen la oportunidad de hacer matemáticas, se limitan a mirar las palabras clave y a emplear la traslación directa de las estrategias cuando resuelven problemas estereotipo, y su habilidad para resolver problemas está influenciada por la información del contexto. Por otro lado, existe en la actualidad una fuerte corriente en educación matemática que sostiene la necesidad de que el aprendizaje de la misma se realice en continuo contacto con las situaciones del mundo real que les dieron y les siguen dando su motivación y vitalidad (Doorman, Drijvers, Dekker, van den Heuvel-Panhuizen, de Lange, & Wijers, 2007).

Una de las corrientes de investigación en resolución de problemas conduce al diseño de una secuencia con instrucciones de actividades, que comienzan por atraer a los estudiantes con situaciones problemáticas no rutinarias para lograr el desarrollo de ciertos temas con significado matemático. También se pretende extender, explorar y refinar estos contenidos a otras situaciones problema, que a su vez conduzcan a una generalización del sistema o modelo para ser usado en un variado rango de contextos (Burkhardt, 2006). Uno de los principales desafíos dentro de la resolución de problemas el del diseño de buenas tareas que sean originales, no rutinarias y nuevas para los estudiantes (Doorman et at., 2007).

Con frecuencia, también aparecen críticas a los problemas que aparecen en los libros de texto, ya que se presentan en un contexto que no sirve a los estudiantes para resolver los problemas de la vida diaria, puesto que estos no son capaces de transferir el dominio de conocimiento de las matemáticas a un problema general o a una habilidad relacionada. Una situación problemática es un espacio para la actividad matemática, donde los estudiantes, al participar con sus acciones exploratorias en la búsqueda de soluciones a las problemáticas planteadas por el docente, interactúan con los conocimientos matemáticos y, a partir de ellos, exteriorizan diversas ideas asociada a los conceptos en cuestión (Múnera, 2011). Una tarea es una representación de la actividad matemática, encarnada en las interacciones entre personas e instrumentos culturales, que puede ofrecer una oportunidad para que los estudiantes hagan un trabajo matemático que no es habitual (Herbst, 2012).

Dado que la experiencia que se describe a continuación cumple las condiciones anteriores, se opta por considerarla como una tarea de resolución de problemas, que se contempla como parte del currículo de matemáticas, tanto a nivel de primaria como de secundaria (Consejería de Educación, Cultura y Deporte, 2007). Dicha experiencia, corresponde a la actividad que se recoge en la Figura 2, y para cuyo análisis se pueden establecer distintos referentes teóricos. Por un lado, la actividad es una situación problemática, con tareas que se benefician del contexto en el que se presenta. También se trata de la resolución de un problema, en el que interesan las estrategias que se siguen para la búsqueda de solución.

Aunque la actividad no fue motivada con el propósito de trabajar los números decimales, estos aparecen y se podría también considerar como parte de un ejercicio con dichos números, que sirve para desarrollar el cálculo mental (Sowder, 1992). Existen muchos trabajos en esta línea, y sobre los errores que los alumnos cometen cuando usan decimales, véase por ejemplo, Moreno, Hernández y Socas (2009). Como resolución de problemas, los alumnos pueden recurrir a distintas estrategias, como el tanteo; en este sentido se pueden consultar textos como Centeno (1988).

Dentro de todas estas posibilidades, el objetivo de la experiencia que se recoge en este artículo fue más, potenciar capacidades para resolver intuitivamente problemas de optimización que son útiles en el desarrollo de la vida cotidiana. En este sentido, escasean las investigaciones a nivel de secundaria. Aún así conviene señalar alguna línea de investigación sobre problemas de optimización, como por ejemplo Malaspina (2011). Sobre el problema de la mochila, o en su variante de subconjunto suma, apenas aparecen experiencias, ni propuestas para la enseñanza obligatoria, a pesar de ser un problema cotidiano y de presentar tantas aplicaciones.

Hay que señalar algunas actividades que se pueden encontrar en las páginas web citadas en la Tabla 2. Los algoritmos necesarios también surgen al resolver otros problemas, como se observa en Antequera y Espinel (2012). Una propuesta para introducir este tipo de problema en la enseñanza obligatoria, sugiriendo algoritmos e ideas para su desarrollo en el aula, se puede consultar en Espinel (1995).

4. Metodología

Con estos referentes, se describe a continuación la metodología seguida en este trabajo, que se apoya en la actividad que se muestra en la Figura 2. Antes de realizar dicha actividad, se prepararon otras versiones previas, para llevar a cabo algunas experiencias piloto, que después de distintos cambios llevaron a la actividad que se experimenta y describe en este trabajo. Estos cambios corresponden, principalmente, a la forma de presentar la actividad; por ejemplo, se añade en la tabla de los productos, la columna, donde los alumnos pueden marcar los ítems seleccionados.

La idea de la actividad, es que si sólo se dispone de una cantidad, en este caso 10 euros, hay que gastarla pero sin pasarse, eligiendo los productos apropiados, sin tener en cuenta nuestro posible interés por cada artículo. La actividad se diseña con productos elegidos de un supermercado con precios reales, que se presentan ordenados de menor a mayor precio. Se trata de conseguir gastar exactamente 10 euros, y ante la previsible dificultad de los alumnos para conseguir una buena solución, se formulan cuatro preguntas para que sigan intentándolo y mejoren la solución dada cuando sea posible. En la primera pregunta a) se deja libertad para elegir los productos; en el apartado b) se exige una optimización en el número de productos, en c) se insiste en aproximarse a los 10 euros aumentando el número de productos, y en c) se fija elegir sólo 5 productos.

Centro:____________ Nivel Educativo:________

¡Gasto al límite!

Situación

Con un presupuesto de 10 euros, realiza una compra de alimentos seleccionados de la tabla de productos, con las siguientes consignas.

Consignas

➡ ¡Gasta todo el dinero del presupuesto que puedas!
➡ Cada producto se elige una sola vez

Tabla de Productos

Nombre del Producto	Código	Precio (€)	Selección
ALUBIA COCIDA BLANCA, TARRO 570G. ESCURRIDO 400G	A	0,44	
LENTEJA COCIDA, TARRO 570G. ESCURRIDO 400G	B	0,48	
CEREZAS CONFITADAS EN ALMIBAR, TARRO 150 g ESCURRIDO 85 g	C	0,90	
PIÑA EN SU JUGO, BOTE 565 g - ESCURRIDO 340 g	D	1,05	
MELOCOTON EN ALMIBAR, BOTE 850 g ESCURRIDO 480 g	E	1,16	
BATIDO FRESA, MINIBRICK PACK 6 u - 1200 cc	F	1,18	
GARBANZO COCIDO VERDURA, TARRO 570G. ESCURRIDO 420G	G	1,20	
MERMELADA FRESA LIGHT, TARRO 380 G	H	1,25	
MERMELADA FRAMBUESA, TARRO 340 G.	I	1,30	
PIÑA EN SU JUGO, BOTE 822 g ESCURRIDO 490 g	J	1,40	
MELOCOTON EN ALMIBAR, BOTE PACK 3X - 600 g ESCURRIDO 345 g	K	1,50	
KETCHUP, TARRO 560 G.	L	1,52	
PIÑA EN SU JUGO, PACK 3X - 681 g ESCURRIDO 420 g	M	1,90	
BARRITA CEREALES ARROZ CHOCOLATE , CAJA 4 u - 144 g	N	2,05	
BARRITA CEREALES ARROZ CHOCOLATE, CAJA 6 u - 120 g	Ñ	2,45	
BARRITA BIZCOCHITO FRUTA Y FIBRA, CAJA 6 u - 240 g	O	2,80	
BATIDO CHOCOLATE , BOTELLIN PACK 6 u - 1200 cc	P	3,10	
		TOTAL	

Tus respuestas

a) ¿Cuántos productos elegiste? Escribe el código de los productos y su coste total.

b) Realiza otra compra con un menor número de productos que tu primera selección y respetando las consignas. Escribe los códigos y su coste total.

c) Propón otra compra con un mayor número de productos que tu primera selección y respetando las consignas. Escribe los códigos y su coste total.

d) ¿Puedes realizar una compra de sólo 5 productos? Escribe el código de los productos y su coste total.

Figura 2. Actividad propuesta a los estudiantes sobre el problema de la mochila

Participaron en la experiencia 40 alumnos, que corresponden a dos grupos de tercero de la ESO (Educación Secundaria Obligatoria), de una edad media de 15 años, un estudiante universitario de ADE (Administración y Dirección de Empresas) y un adulto, de profesión comerciante, con lo que se le puede suponer experiencia en la resolución de este tipo de problemas. Estos dos sujetos se incluyeron en el estudio, una vez realizado con los alumnos de secundaria y constatada la dificultad, para explorar la posibilidad que dicha dificultad disminuya con la edad de los participantes, la preparación matemática y la experiencia.

A los alumnos no se les dio ninguna explicación previa, sino que en clase de matemáticas se les entrega la actividad, tal como aparece en la Figura 2, para que la resuelvan, como una tarea más en resolución de problemas en matemáticas. Recogidas las soluciones, se hizo un análisis cualitativo de sus resultados.

5. Descripción de los resultados

Las producciones de los alumnos de secundaria muestran que, efectivamente, son muy pocos los que consiguen gastar exactamente los 10 euros en alguno de los cuatro apartados. En total 5 alumnos de los 40 que participan en la experiencia llegan a la solución, y con algún error. Es el primer resultado observado que llama la atención cuando se empieza a analizar los datos.

Los resultados que se obtienen, analizando las producciones de los alumnos, según las cuatro preguntas planteadas en la actividad se analizan a continuación.

Apartado a) Elección inicial de productos

En el primer apartado se pide gastar todo lo que se pueda de 10 euros, dando libertad sobre la forma de elegir los productos. Sólo tres alumnos consiguen llegar en este apartado a un lote de productos que sumen 10 euros. Hay 14 alumnos que se aproximan bastante a los 10 euros, ya que eligen productos cuya suma es igual o mayor que 9,90 euros. En total hay 30 alumnos que consiguen gastar 9 o más euros. De los otros 10 alumnos, uno no contesta, y el resto apuntan resultados poco aceptables, por estar muy alejados de 10, con costes como: 4,13; 6,21; 6,74; 6,85; 7,93; 7,98; 8,14; 8,9 y 8,96. El número de productos elegidos para conseguir la respectiva suma está entre 5 y 9, en los 40 casos analizados y la moda está en 6 productos.

Apartado b) Optimización

En el segundo apartado es pide disminuir el número de productos, gastando lo más que se pueda hasta llegar a 10 euros. Ningún alumno consigue productos que sumen 10 euros en este apartado, pues el alumno que más se aproxima consigue una suma de 9,99. Hay 24 alumnos que llegan a sumas mayores que 9, pero también aparecen 7 alumnos que apuntan productos que sólo suman entre 2 y 3 euros, pues sorprendentemente, se quedan en gastos como 2,06 o 2,95. En este apartado se observa que el número de productos elegidos efectivamente es menor, como se le pide, y suele estar entre 3 y 6 productos en los todos los casos estudiados. Si se compara la solución dada en este apartado b), con la dada en a), la solución aportada no mejora, en el sentido de aproximarse más a los 10 euros, aunque todos los alumnos acatan la orden y lo intentan con menos productos.

Apartado c) Aumento del número de productos

Se pide realizar una compra con un número de productos mayor que el inicial, respetando el coste total de 10 euros. Tampoco en este apartado ningún alumno consigue la cantidad exacta y sólo 19 alumnos consiguen superar los 9 euros. Los alumnos atienden a la consigna de elegir más productos, pero con ello, en general, no mejoran la solución de aproximación a 10, a pesar de que lo intentan con 9 y hasta 10 sumandos.

Apartado d) Número de productos fijo

Se pide intentar la suma próxima a 10, con sólo 5 productos. En este apartado hay cuatro alumnos que eligen cinco productos que suman 10 euros y 23 alumnos que consiguen sumas de 9 o más euros. Hay tres casos de alumnos que no responden y uno que sólo gasta 6,54 euros; el resto consigue buenas aproximaciones. Y también los alumnos atienden a la consigna de elegir sólo cinco productos; sorprendentemente muchos mejoran la solución dada en el apartado a).

Análisis de las mejores respuestas

En la Tabla 3 se recogen siete casos de los alumnos que dan algunas de las mejores soluciones en los cuatro apartados, en el sentido de la aproximación al óptimo coste de 10 euros, que efectivamente en los apartados a) y d) consiguen algunos alumnos. Entre paréntesis aparece el número de productos elegidos para conseguir la respectiva suma.

A continuación se pasa a un análisis de los casos recogidos en la Tabla 3, donde los números entre corchetes corresponden al respectivo alumno nombrados de [1] a [40].

Tabla 3. *Número de artículos y coste total en las mejores soluciones*

	Apartado a. Sumar 10	Apartado b. Disminuir n. artículos	Apartado c. Aumentar n. artículos	Apartado d. Elegir 5 artículos
Caso 1[14]	(7) 9,94	(6) 9,90	(9) 9,90	(5) 9,90
Caso 2[22]	(6) 9,98	(5) 9,97	(10) 9,83	(5) 10
Caso 3[24]	(5) 9,95	(4) 9,95	(9) 9,88	(5) 9,99
Caso 4[32]	(8) 10	(4) 9,87	(9) 9,76	(5) 9,99
Caso 5[33]	(9) 9,93	(6) 9,86	(10) 10,36	(5) 10
Caso 6[36]	(5) 10	(3) 7,10	(6) 5,46	(5) 10
Caso 7[38]	(5) 9,97	(4) 9,87	(9) 9,92	(5) 9,97

El caso 1 muestra un alumno que no consigue mejorar la primera solución, de hecho empeora, pues pasa de conseguir una suma de 9,94 con 7 productos, en los sucesivos intentos, se queda en una suma menor, 9,90.

Los casos 2 y 3 son alumnos que sí consiguen mejorar su primera solución, el primero de ellos con oscilaciones (mejora y empeoramiento de la solución inicial), consigue gastar los 10 euros exactos en 5 productos. El segundo, mejorando en cada apartado, levemente, pero sistemáticamente, se aproxima a la solución óptima con un gasto de 9,99.

El caso 4 es un alumno que consigue el óptimo desde el primer intento y luego, al tener en cuenta las restricciones del enunciado de cada apartado de la actividad propone soluciones peores.

El caso 5, al contrario que en el caso anterior, los sucesivos intentos le permiten obtener el óptimo al final, con alguna oscilación y también tratando en el tercer apartado gastar más de lo que tiene, pues, elige productos que suman 10,36 euros.

Llama la atención el caso 6, ya que es el único alumno que consigue el óptimo en dos apartados, inicial y final y, sin embargo, en los apartados b) y c) se queda muy alejado del 10.

El caso 7 es una muestra de lo que ocurre con la mayoría de los alumnos, que no consiguen llegar a 10 en ninguno de los apartados, pero se aproxima y oscila mejorando y empeorando la solución inicial en los sucesivos apartados. Este alumno además da como solución en el apartado a) 9,97 con 5 productos y con ello tiene resuelto el apartado d). Si bien, en los otros dos apartados, b) y c) atiende a la orden de utilizar menos o más productos como se le pide, sin conseguir mejorar la solución.

Estrategias

Sobre las estrategias que parecen utilizar los alumnos, del análisis de las producciones escritas, se puede deducir que domina el ensayo y error, aunque para confirmarlo con mayor seguridad sería necesario realizar entrevistas a los alumnos. Lo que se observa en las producciones es que la mayoría de los alumnos comienzan eligiendo los primeros productos de la lista dada, es decir los más baratos y luego completan lo que falta del coste total para llegar a 10 con uno o dos de los más caros. Es el caso 5 [33] de la Tabla 2, que para conseguir en el apartado a) un coste de 9,93, elige primero ocho, entre los primeros productos de la lista (productos A hasta J), con un coste total:

$$0{,}44+0{,}48+0{,}90+1{,}05+1{,}16+1{,}20+1{,}25+1{,}40 = 7{,}88,$$

y después busca lo que le falta y elige el producto N, de coste 2.05 para completar la suma, de modo que se obtenga un valor próximo a 10.

Existen algunos casos de alumnos, pocos, que comienzan directamente eligiendo algunos de los productos más caros, como ocurre con el caso 6[36] de la Tabla 3, que da directamente la solución con los productos D, K, M, Ñ y P, en total, 1,05+1,50+1,90+2,45+3,10=10,00.

La mayoría de los alumnos son consistentes en su estrategia. Sólo se encontró pocos alumnos que cambian de estrategia, es decir que en el apartado a) comienzan por los productos más baratos, y en el b) cambian y comienzan eligiendo los más caros, posiblemente al darse cuenta que pueden disminuir el número de productos, eligiendo estos últimos. Un ejemplo es el caso 4 [32], recogido en la Tabla 3, que en el apartado a) elige los productos: A, B, F, G, H, K, M y N, obteniendo el coste: 0,44+0,48+1,18+1,20+1,25+1,50+1,90+2,05=10 y en el apartado b) elige: P, O, Ñ y L con lo que logra un coste total 3,10+2,80+2,45+1,52=9,87, aunque no consiga una aproximación mejor.

Exploración de posibles razones del fracaso de los alumnos

Al preguntarnos por las posibles razones de la dificultad de esta actividad, aparentemente simple, podríamos buscarla en el hecho de tener que trabajar con números decimales. Aunque, en general, los alumnos de 15 años saben sumar, la realidad es que aparecen algunos errores típicos al operar con números decimales por ejemplo, un alumno (caso [20]) que se muestra en la Tabla 4, como solución engañosa. Este alumno, que se eligió inicialmente con la intención de colocarlo en la Tabla 3, entre las soluciones mejores, tuvo errores en las operaciones con decimales. Sólo suma correctamente en el apartado b), donde elige los productos: K, L, M, N, Ñ, obteniendo el coste: 1,50+1,52+1,90+2,05+2,45=9,42. En el resto de los apartados se equivoca como se observa al comparar sus resultados recogidos en la Tabla 4 y la suma real de los productos elegidos:

Apartado a) Productos A, B, C, E, F, O, P:

0,44+0,48+0,90+1,16+1,18+2,80+3,10=10,06

Apartado c) Productos B, I, D, M, A, Ñ, C, N:

0,48+1,25+1,05+1,90+0,44+2,45+0,90+2,05=10,52

Apartado d) Productos C, K, M, Ñ, P:

0,90+1,50+1,90+2,45+3,10=8,95

Tabla 4. *Solución engañosa*

	Apartado a. Sumar 10	Apartado b. Disminuir n. artículos	Apartado c. Aumentar n. artículos	Apartado d. Elegir 5 artículos
Caso [20]	(7) 9,58	(5) 9,42	(8) 9,92	(5) 10

Estudio de caso con un estudiante universitario

Ante el relativo fracaso de la actividad, pues se esperaba más alumnos que alcanzaran una posible solución de coste total 10, surgen algunas preguntas. Se plantea sí estos comportamientos tienen relación con la edad, ya que los alumnos que realizaron la actividad no van de compras a un supermercado, o no les interesa ni piensan en restricciones económicas. Para tratar de estudiar el efecto de la edad y formación matemática se le pide a un estudiante universitario, que si podría tener experiencias en comprar con restricciones que resolviera la actividad.

Tabla 5. *Solución estudiante universitario*

	Apartado a. Sumar 10	Apartado b. Disminuir n. artículos	Apartado c. Aumentar n. artículos	Apartado d. Elegir 5 artículos
Caso ADE	(6) 9,95	(5) 9,8	(9) 9,92	(5) 9,95

El caso ADE de la Tabla 5 corresponde a la solución aportada por un estudiante universitario, de Administración y Dirección de Empresas. Su solución no mejora con respecto a las dadas por los alumnos de secundaria. Una conjetura que resulta es que la dificultad de conseguir el óptimo en la tarea planteada, en principio, podría no tener relación con la edad, ni tan siguiera con una formación matemática más completa, algo que habrá de todas formas que investigar con una muestra más amplia de estudiantes universitarios.

Estudio de caso con un comerciante

Para tratar de analizar el efecto de la experiencia y como discrepancia a las respuestas aportadas por los 40 alumnos y al caso del estudiante universitario se recoge la solución aportada por una persona experimentada, y muchos años comerciante. Esta persona proporciona las siguientes soluciones:

Apartado a). Elige los productos A, C, D, E, F, G, L, I, H; es decir, obtiene un coste igual a 0,44+0,90+1,05+1,16+1,18+1,20+1,52+1,30+1,25=10,00; se hace notar que no elige todos los productos sucesivos y además, tampoco la magnitud del coste es creciente.

Apartado b). En el segundo apartado toma P, C, D, E, A, Ñ, M, obteniendo un coste igual a 3,10+0,90+1,05+1,16+0,44+1,45+1,90=10,00; obsérvese que en esta elección hay un lapsus pues el coste del producto Ñ es 2,45 y en la suma aparece 1,25.

Apartado c). Para el tercer apartado elige L, B, P, O, C, G, es decir, se obtiene el coste de 1,52+0,48+3,10+2,80+0,90+1,20=10,00

Apartado d). Y finalmente, al elegir 5 productos toma L, O, M, I, C, con el coste total igual a 3,10+2,80+1,90+1,30+0,90=10,00

Nuestra apreciación es que la persona experimentada trata de buscar subconjuntos de objetos que sumen cantidades enteras, sin atender a los nombres de los productos sino fijándose directamente en los precios. Por ejemplo, en el apartado c) elige: (3,10+0,90)+(2,80+1,20)+(1,52+0,48)=4+4+2. Este método presenta similitud con un algoritmo *divide y vencerás*, basado en la descomposición de un problema en problemas más simples y muy utilizado en Programación Matemática (Kellerer et al., 2004). Mientras que los alumnos y el estudiante universitario parece que trabajan por ensayo y error, intentando aproximarse directamente a la cantidad fijada, y van completando sus soluciones, sin estrategias bien definidas.

6. Conclusiones y reflexiones

La situación planteada con la consigna, gastar sólo lo que tienes o lo que puedas pagar, quizás se pueda considerar un ejercicio, más que un verdadero problema. A pesar de ello, los alumnos tienen dificultad en elegir una estrategia y encontrar una solución, incluso el estudiante universitario; mayor éxito se obtuvo en una persona con experiencia en la tarea.

En general, los resultados y los comportamientos observados indican que los alumnos han entendido el contexto y el enunciado del problema, ya que en todos los apartados se aportan soluciones, si bien, el modelo de problema no es común en el aula. Los alumnos han mostrado cierta habilidad para realizar cálculos, por ejemplo, se han ayudado de marcas con una cruz en la tabla, para indicar los productos elegidos. Hay bastante semejanza en las soluciones aportadas por todos los alumnos lo que invita a reflexionar sobre la coherencia en el desarrollo de la enseñanza que reciben. La investigación realizada se puede considerar como una indagación preliminar y da pautas para la búsqueda de actividades que permitan que los alumnos se puedan plantear este tipo de problemas.

En las producciones escritas se observa que los alumnos recurren al ensayo y error, sin embargo, esto les lleva a quedarse en una suma cercana al óptimo y parar cuando les parece que la solución está cerca al dinero disponible. Muchos alumnos tienen dificultad en este proceso y se quedan con estrategias incorrectas a pesar de su buena intención. Los alumnos no son capaces de identificar subconjuntos de números que al sumarlos les permitan conseguir cantidades enteras.

La reflexión a que ha llevado la experiencia es que los estudiantes saben sumar, pues a ello se les enseña desde la más temprana edad, pero les resulta muy difícil o son totalmente incapaces de elegir cantidades que sumen una determinada cantidad, desconocen estrategias para realizar sumas de varios sumandos de un modo eficiente y son incapaces de inventar heurísticos que les lleve a conseguir el objetivo. El resultado de la experiencia de aula en un contexto específico permite identificar la poca preparación de los estudiantes para este tipo de tarea. Como docentes tenemos la obligación de crear problemas que supongan estímulos y desafíos adecuados, considerando la utilidad de la optimización en la vida diaria.

En resumen, la experiencia trata de un problema de subconjunto suma, que no debería presentar dificultad para alumnos de 15 años. El problema de la mochila, con un peso total que no sobrepase un valor P, a llenar con n objetos, cada objeto con un peso p y un valor v (siendo p y v enteros positivos), sí podría ser un verdadero problema, ya que se quiere llenar la mochila de tal forma que el valor de los objetos transportados sea máximo. La motivación para el estudio de este problema es porque aparece en numerosas aplicaciones donde hay que seleccionar un conjunto de tareas, objetos, o ítems en presencia de recursos limitados.

En la actualidad, los problemas de optimización tienen poca cabida en la enseñanza obligatoria a pesar de ser de gran utilidad en la vida cotidiana. Pensamos que este tipo de problema, tanto subconjunto suma como mochila, pueden ser la base de una actividad en matemáticas, ya que es un instrumento valioso para tener un comportamiento eficaz cuando en la vida cotidiana debes elegir sabiendo las limitaciones. Lo que se pretende, es desarrollar la intuición optimizadora, conocimiento, percepción, y el pensamiento optimizador en estudiantes de secundaria obligatoria. Creemos que es una forma accesible de introducir un determinado problema de optimización en estos estudiantes. Y sería de gran utilidad para los alumnos conocer estrategias o algoritmos que les ayuden a ello, es decir conocer algunos algoritmos fáciles para resolver un problema tipo mochila.

Referencias

Antequera, A. T., & Espinel, M. C. (2012). Rules for rational decision making: An experiment with 15- and 16- year olds Students. *Investigations in Mathematics Learning 4*(2), 25-41.

Burkhardt, H. (2006). Modelling in mathematics classrooms: refletions on past developmets and the future. *Zentralblatt für Didacktik der Mathematicik, 38*(2), 178-195

Caballero, P., & Hernández, C. (2000). *Criptología y seguridad de la información*. Madrid: Rama.

Centeno, J. (1988). *Números decimales.* Madrid: Síntesis.

Consejería de Educación, Cultura y Deporte (2007) Decreto 127/2007, de 24 de mayo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Canarias. *Boletín Oficial de Canarias n. 113,* Jueves 7 de junio de 2007.

Doorman, M., Drijvers, P., Dekker, T., van den Heuvel-Panhuizen, M, de Lange, J., & Wijers, M. (2007). Problem solving as a challenge for mathematic education in the Netherlands. *ZDM The International Journal of Mathematics Education*, *39*, 405-418.

Espinel, M. C . (1995). Optimizar cantidades. *UNO*, *3*, 116-122.

Garey, M., & Johnson, D. (1979). *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness*. San Francisco, CA.: W.H. Freeman and Company.

Herbst, P. (2012). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo de geometría. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática 1*, 5-22.

Horowitz, E., & Sahni, S. (1978). *Fundamentals of computer algorithms.* Rockville, MD.: Computer Science Press.

Kellerer, H., Pferschy, U, & Pisinger, D. (2004). *Knapsack problems*. Berlin: Springer.

Malaspina, U. (2011). Resolución de problemas y estimulo del pensamiento optimizador en la educación básica. Trabajo presentado en la *XIII Conferencia Inter Americana de Educación Matemática* Recife, Brasil, 2011.

Martello, S., & Toth, P. (1990). *Knapsack problems: Algorithms and computer implementations.* New York: John Wiley.

Moreno, J. M., & Moreno, J. A. (1999). *Heurísticas en optimización.* La Laguna: Dirección General Universidades, Gobierno de Canarias.

Moreno, M. D., Hernández, V. M., & Socas, M. (2009). Interpretación y análisis de los errores obtenidos antes y después de un programa de formación sobre el concepto de número decimal. *Formación del profesorado e investigación en educación matemática, 10*, 179-221.

Múnera, J. J . (2011). Una estrategia didáctica para las matemáticas escolares desde el enfoque de situaciones problema. *Revista Educación y Pedagogía*, *23* (59), 179-193.

Salazar, J. J. (2001). *Programación matemática*. Madrid: Díaz de Santos

Santos, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp. 243-275). New York: Mac Millan Pub. Company.

Referencia a los autores

María Candelaria Espinel Febles, Universidad de La Laguna, (España). mespinel@ull.es

Juan Agustín Noda Gómez, IES Magallanes, Granadilla de Abona (España). joannoda@gmail.com